

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ ПСЕВДОЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ И ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

О. А. Дубовик, А. О. Дубовик

Сургутский государственный университет, alldubovik@gmail.com

Многие свойства функций Бесселя с целочисленными индексами связаны с группой движений евклидовой плоскости. Замена компактной подгруппы евклидовых вращений на некомпактную подгруппу гиперболических и предлагаемая конструкция представлений приводят к изучению групповых свойств функций Бесселя с произвольными индексами. Выявлены связи функций Бесселя с другими специальными функциями, наиболее часто встречающимися в приложениях Ганкеля, Макдональда, Неймана, Г-функций и В-функций Эйлера.

Ключевые слова: представления групп, неприводимость, функции Бесселя.

REPRESENTATIONS OF GROUP OF MOTIONS OF THE PSEUDO-EUCLIDEAN PLANE AND THE BESSEL FUNCTIONS

O. A. Dubovik, A. O. Dubovik

Surgut State University, alldubovik@gmail.com

Many properties of Bessel functions with integer indices are related to the group of motions of the Euclidean plane. The replacement of the compact subgroup of Euclidean rotations by a noncompact subgroup of hyperbolic rotations and the proposed construction of representations lead to the study of the group properties of Bessel functions with arbitrary indices. The connections of Bessel functions with other special functions, most frequently encountered in applications: Hankel, MacDonald, Neumann, Euler Γ -functions and B-functions, are found.

Keywords: group representations, irreducibility, Bessel functions.

Рассматриваются специальные функции математической физики, относящиеся к классу гипергеометрических. Именно этот класс поддается теоретико-групповой интерпретации своих свойств. Существенный вклад в развитие такого подхода внесли Н. Я. Виленкин [1–3] и И. М. Гельфанд [4]. Среди работ иностранных авторов отметим следующие [5–7]. В настоящее время развитие этой теории переживает ренессанс в связи с появившимися новыми задачами [4].

В статье рассматривается нестандартная реализация представлений группы $MH(2)$ движений псевдоевклидовой плоскости. Данная реализация приводит к изучению функций Бесселя, Ганкеля, Макдональда, Неймана, Г-функций и В-функций Эйлера:

1. Преобразование группы движений псевдоевклидовой плоскости $MH(2)$ задается формулами [1]:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \operatorname{ch} \varphi + x_2 \operatorname{sh} \varphi + p, \\ x_2' = x_1 \operatorname{sh} \varphi + x_2 \operatorname{ch} \varphi + q, \end{cases} \quad (1)$$

где $-\infty < p < \infty$, $-\infty < q < \infty$, $-\infty < \varphi < \infty$.

Поставив всякому преобразованию (1) в соответствие матрицу:

$$g = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \varphi & \operatorname{sh} \varphi & p \\ \operatorname{sh} \varphi & \operatorname{ch} \varphi & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

реализуем группу $MH(2)$ как группу матриц третьего порядка. Отметим две подгруппы $MH(2)$. Первая состоит из гиперболических вращений $g(0, 0, \varphi)$. Обозначим ее через Ω . Вторая подгруппа E_2 состоит из параллельных переносов $g(p, q, 0)$ и изоморфна евклидовой плоскости. Поэтому подгруппу Ω можно рассматривать как автоморфизмы абелевой группы E_2 . Следовательно, группа $MH(2)$ является полупрямым произведением абелевой группы E_2 и группы ее автоморфизмов Ω

$$MH(2) = E_2 * \Omega,$$

с умножением $(b_1, A_1)(b_2, A_2) = (b_1 + A_1 b_2, A_1 A_2)$, где $g(b, A)$, $b \in E_2$, $A \in \Omega$.

2. Представление группы $MH(2)$ строится в пространстве бесконечно дифференцируемых финитных функций $f(A)$ на Ω . Операторы представления $T_\chi(g)$ зададим формулой [8]:

$$T_\chi(g_0)f(A) = \chi(A^{-1}b_0)f(A_0^{-1}A), \quad (2)$$

где χ – одномерное представление коммутативной группы E_2 .

Не трудно проверить мультипликативное свойство:

$$T_\chi(g_1) \cdot T_\chi(g_2) = T_\chi(g_1 \cdot g_2)$$

и значит, $g \rightarrow T_\chi(g)$ – представление.

Каждое одномерное представление χ группы E_2 задается парой комплексных чисел (χ_1, χ_2)

$$\chi(b) = \exp(\chi_1 p + \chi_2 q),$$

поэтому группа X одномерных представлений E_2 изоморфна двумерному комплексному линейному пространству $\mathbb{C}_2$. Если $\chi \in X$, то $\chi_A: b \rightarrow \chi(A^{-1}b)$ также является элементом группы X . Поэтому X разбивается на непересекающиеся классы транзитивности по отношению к группе Ω . Каждому классу отвечает одно и то же представление (2) группы $MH(2)$. Тогда для описания этих представлений достаточно выбрать по одному элементу $\chi \in X$ из каждого класса транзитивности. Классу транзитивности, состоящему из пар комплексных чисел $(R \operatorname{ch} y, R \operatorname{sh} y)$, соответствует представление:

$$T_R(g)f(y) = \exp\{R(-p \operatorname{ch} y + q \operatorname{sh} y)\}f(y - \varphi). \quad (3)$$

Относительно скалярного произведения:

$$(f_1, f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) \overline{f_2(y)} dy$$

представление унитарно тогда и только тогда, когда R – чисто мнимое число. При $R \neq 0$ представление неприводимо [8].

3. Построим представление группы $MH(2)$ в пространстве H бесконечно дифференцируемых финитных функций на мнимой прямой y с носителем, не содержащим точку $y = 0$.

$$T_R(g)f(y) = \exp \left\{ R \left(-\frac{1}{2} \left(y + \frac{1}{y} \right) p + \frac{1}{2} \left(y - \frac{1}{y} \right) q \right) \right\} f(\exp(-\varphi)y).$$

Заметим, что H представимо в виде прямой суммы двух инвариантных подпространств, в каждом из которых $T_R(g)$ действует неприводимо и эквивалентно представлению (3).

Перейдем к другой реализации представлений $T_R(g)$. С этой целью каждой функции $f(y) \in H$ поставим в соответствие пару функций:

$$F_{\pm}(\lambda) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} f(y)(\pm y)^{\lambda-1} dy, \quad |\arg(\pm y)| = \frac{\pi}{2}. \quad (4)$$

Преобразование (4) сводится к преобразованию Меллина [1]:

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x)(x)^{\lambda-1} dx.$$

Пользуясь формулой обращения:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(\lambda)(x)^{-\lambda} d\lambda,$$

можно установить формулу обратного преобразования для (4) [8]:

$$f(y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{\sin \pi \hat{\lambda}} \left[F_+(\hat{\lambda})(-y)^{-\hat{\lambda}} + F_-(\hat{\lambda})y^{-\hat{\lambda}} \right] d\hat{\lambda}, \quad (5)$$

где $a \neq 0, \pm 1, \pm 2$,

Однако убедиться в справедливости (5) проще следующим образом. Умножим обе части равенства (5) на $(\pm y)^{\lambda-1}$ и проинтегрируем по всей мнимой оси $(-i\infty, +i\infty)$.

При $\operatorname{Re}(\lambda - \hat{\lambda}) > 0$ можно менять интегрирование по $\hat{\lambda}$ и по y на $(-i, +i)$, при $\operatorname{Re}(\lambda - \hat{\lambda}) < 0$ можно менять интегрирование по $\hat{\lambda}$ и по y на $(-i\infty, -i) \cup (+i, +i\infty)$. После перестановки порядка интегрирования, воспользовавшись формулой Коши комплексного анализа, получим тождество.

Найдем выражение операторов представления $T_R(g)$ в пространстве пар $F(\lambda)$. Обозначим пару, соответствующую функции $T_R(g)f(y)$, через $Q_R(g)F \equiv (Q_R(g)F_+, Q_R(g)F_-)$. Тогда будем иметь:

$$Q_R(g)F_{\pm}(\lambda) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} T_R(g)f(y)(\pm y)^{\lambda-1} dy. \quad (6)$$

Для элементов группы $MH(2)$ вида $g(0, 0, \varphi)$ отсюда получаем:

$$Q_R(g)F(\lambda) = \exp\{\lambda\varphi\} F(\lambda).$$

Для элементов группы $MH(2)$ вида $g(p, q, 0)$:

$$T_R(g)f(y) = \exp \left\{ R \left(-\frac{1}{2} \left(y + \frac{1}{y} \right) p + \frac{1}{2} \left(y - \frac{1}{y} \right) q \right) \right\} f(y).$$

Подставляя в (6) и пользуясь формулой (5), получим:

$$\begin{aligned} Q_R(g)F_{\pm}(\lambda) = & -\frac{1}{4\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp \left\{ R \left(-\frac{1}{2} \left(y + \frac{1}{y} \right) p + \frac{1}{2} \left(y - \frac{1}{y} \right) q \right) \right\} (\pm y)^{\lambda-1} dy \times \\ & \times \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{\sin \pi \hat{\lambda}} \left[F_+(\hat{\lambda})(-y)^{-\hat{\lambda}} + F_-(\hat{\lambda})y^{-\hat{\lambda}} \right] d\hat{\lambda}. \end{aligned} \quad (7)$$

При вещественном $R \neq 0$, $0 < \operatorname{Re}(\lambda - \hat{\lambda}) < 1$ и $p \neq q$ возможна перестановка порядка интегрирования, и операторы (7) переходят в операторы вида:

$$Q_R(g)F_{\pm}(\lambda) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} K_{\pm\mp}(\lambda, \hat{\lambda}; R; g) F_+(\hat{\lambda}) d\hat{\lambda} + \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} K_{\pm\mp}(\lambda, \hat{\lambda}; R; g) F_-(\hat{\lambda}) d\hat{\lambda}, \quad (8)$$

где положено,

$$K_{\pm\mp}(\lambda, \hat{\lambda}; R; g) = -\frac{1}{4\pi \sin \pi \hat{\lambda}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp \left\{ R \left(-\frac{1}{2} \left(y + \frac{1}{y} \right) p + \frac{1}{2} \left(y - \frac{1}{y} \right) q \right) \right\} (\pm y)^{\lambda-1} (\mp y)^{-\hat{\lambda}} dy.$$

Таким образом, операторы (8) являются интегральными операторами в пространстве пар функций $F(\lambda) = (F_+, F_-)$:

$$Q_R(g)F(\lambda) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} K(\lambda, \hat{\lambda}, R, g) F(\hat{\lambda}) d\hat{\lambda}$$

с ядрами-матрицами

$$K(\lambda, \hat{\lambda}; R; g) = \begin{pmatrix} K_{+-} & K_{++} \\ K_{--} & K_{-+} \end{pmatrix}.$$

4. При $p = 0$, $Rq \neq 0$

$$K_{\pm\mp} = -\frac{1}{4\pi \sin \pi \hat{\lambda}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp \left\{ \frac{Rq}{2} \left(y - \frac{1}{y} \right) \right\} (\pm y)^{\lambda-1} (\mp y)^{-\hat{\lambda}} dy.$$

Интеграл выражается через функции Ганкеля [1]:

$$\begin{aligned} K_{\pm\mp} = & \frac{1}{4 \sin \pi \hat{\lambda}} \left(\exp \left\{ i \frac{\pi}{2} \left(\pm(\lambda-1) \mp(-\hat{\lambda}) \right) + i \frac{\pi}{2} \nu \right\} H_v^{(1)}(Rq) - \right. \\ & \left. - \exp \left\{ i \frac{\pi}{2} \left(\mp(\lambda-1) \pm(-\hat{\lambda}) \right) - i \frac{\pi}{2} \nu \right\} H_v^{(2)}(Rq) \right), \end{aligned}$$

где $\nu = \lambda - \hat{\lambda}$.

Наибольший интерес при этом вызывает появление функций Бесселя:

$$J_{-v}(Rq) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp\left\{\frac{Rq}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right\} t^{v-1} dt, \quad Rq > 0, \quad J_{-v} = \frac{1}{2}\left(H_{-v}^{(1)} + H_{-v}^{(2)}\right).$$

В таком случае,

$$\begin{aligned} K_{++} &= \frac{1}{2i \sin \pi \hat{\lambda}} J_{-v}(Rq), \quad K_{--} = \frac{i}{2 \sin \pi \hat{\lambda}} J_v(Rq), \\ K_{+-} &= \frac{1}{4i \sin \pi \hat{\lambda}} \left(\exp\{i\pi \hat{\lambda}\} H_v^{(1)}(Rq) + \exp\{-i\pi \hat{\lambda}\} H_v^{(2)}(Rq) \right), \\ K_{-+} &= \frac{i}{4 \sin \pi \hat{\lambda}} \left(\exp\{-i\pi \hat{\lambda}\} H_v^{(1)}(Rq) + \exp\{i\pi \hat{\lambda}\} H_v^{(2)}(Rq) \right) = \\ &= \frac{i}{4 \sin \pi \hat{\lambda}} \left(\exp\{-i\pi \hat{\lambda}\} H_{-v}^{(1)}(Rq) + \exp\{i\pi \hat{\lambda}\} H_{-v}^{(2)}(Rq) \right). \end{aligned}$$

При $q = 0, R\rho > 0$

$$K_{\pm\mp} = -\frac{1}{4\pi \sin \pi \hat{\lambda}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp\left\{-\frac{R\rho}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)\right\} (\pm y)^{\lambda-1} (\mp y)^{-\hat{\lambda}} dy,$$

стягивая контур интегрирования к положительной части вещественной оси, получим выражение ядра через функцию Макдональда, которая имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} K_v(z) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-z \operatorname{ch} t \pm vt\} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \exp\left\{-\frac{z}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right\} t^{\pm v-1} dt, \\ K &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sin \pi v}{\sin \pi \hat{\lambda}} & \frac{\sin \pi \lambda}{\sin \pi \hat{\lambda}} \end{pmatrix} \frac{1}{\pi i} K_v(R\rho). \end{aligned}$$

При $R\rho = -Rq > 0$ получим выражение ядра через Γ -функцию Эйлера:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^{\infty} \exp\{-t\} t^{z-1} dt \\ K_{\pm\mp} &= -\frac{1}{4\pi \sin \pi \hat{\lambda}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp\{-R\rho y\} (\pm y)^{\lambda-1} (\mp y)^{-\hat{\lambda}} dy. \end{aligned}$$

Как и в предыдущем случае получим:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sin \pi v}{\sin \pi \hat{\lambda}} & \frac{\sin \pi \lambda}{\sin \pi \hat{\lambda}} \end{pmatrix} \frac{(R\rho)^{-v}}{2\pi i} \Gamma(v).$$

5. В силу мультипликативного свойства:

$$Q_R(g_1)Q_R(g_2) = Q_R(g_1g_2)$$

имеет место соотношение:

$$K(\lambda, \hat{\lambda}; R; g_1 g_2) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} K(\lambda, \lambda'; R; g_1) K(\lambda', \hat{\lambda}; R; g_2) d\lambda'. \quad (9)$$

Выбор различных элементов g_1 и g_2 группы $MH(2)$ приводит к различным соотношениям для функций Бесселя, Ганкеля, Макдональда, Неймана, Г-функций и В-функций Эйлера. Число получаемых соотношений сопоставимо с приведенными в справочниках Г. Бейтмена и А. Эрдейи [9–10].

В качестве примера приведем лишь некоторые из получаемых соотношений. Из равенства для элементов группы

$$g(p, -p, 0) g(0, q, 0) = g(p, -p+q, 0) = g(0, 0, \varphi) g(0, r, 0) g(0, 0, -\varphi),$$

где $p > 0$, $q > 2p$, $-p+q = r \operatorname{ch} \varphi$, $p = r \operatorname{sh} \varphi$, $r^2 = q(-2p+q)$, $\exp\{2\varphi\} = \frac{q}{-2p+q}$, поскольку гиперболическому вращению на угол φ соответствует оператор умножения на $\exp\{\lambda\varphi\}$, получим после подстановки значения ядер в (9):

$$\exp\{(\lambda - \hat{\lambda})\varphi\} K_{++}(\lambda, \hat{\lambda}; R; g(0, r, 0)) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{(Rp)^{-(\lambda-\lambda')}}{2\pi i} \Gamma(\lambda-\lambda') \frac{1}{2i \sin \pi \hat{\lambda}} J_{-(\lambda'-\hat{\lambda})}(Rq) d\lambda',$$

или, делая замену $\nu = \lambda - \hat{\lambda}$ и $\mu = \lambda' - \hat{\lambda}$, получим:

$$\left(\frac{q}{q-2p}\right)^{\frac{\nu}{2}} J_{-\nu}(Rr) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} (Rp)^{\mu-\nu} \Gamma(\nu-\mu) J_{-\mu}(Rq) d\mu.$$

Из равенства для элементов группы

$$g(p, 0, 0) g(0, 0, \varphi) g(0, q, 0) = g(p+q \operatorname{sh} \varphi, q \operatorname{ch} \varphi, \varphi) = g(0, 0, \theta) g(0, r, 0) g(0, 0, \varphi-\theta),$$

где $q > 0$, $p+q \operatorname{sh} \varphi = r \operatorname{sh} \theta$, $q \operatorname{ch} \varphi = r \operatorname{ch} \theta$, $r^2 = q^2 - p^2 - 2pq \operatorname{sh} \varphi$, $\operatorname{th} \theta = \frac{p+q \operatorname{sh} \varphi}{q \operatorname{ch} \varphi}$, получим функциональные соотношения для функций Бесселя и Макдональда:

$$\exp\{\nu\theta\} J_{-\nu}(Rr) = \frac{1}{\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} K_{\nu-\mu}(Rp) J_{-\mu}(Rq) \exp\{\mu\theta\} d\mu.$$

Соотношения несколько иного толка, такие как дифференциальные уравнения, рекуррентные равенства и т. п., получаются, если рассматривать алгебру Ли и соответствующие инфинитезимальные операторы.

В частности, равенство для операторов

$$Q_R(g) \cdot Q_R(g^{-1}) = I,$$

приводит к взаимно обратным интегральным преобразованиям.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 18-47-860005 p_a.

Литература

1. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представления групп. М.: Наука, 1991. 576 с.

2. Vilenkin N. Ja., Klimuk A. U. Representation Theory and Special Functions: Recent Advances. Kluwer Acad. Publ, 1995. 511 p.
3. Vilenkin N. Ja., Klimuk A. U. Representation Theory and Special Functions. V. 1. Kluwer Acad. Publ, 1991. 610 p.
4. Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С. Гипергеометрические функции над произвольным полем // УМН. 2004. Т. 59. № 5 (359). С. 29–100.
5. Baricz A. Generalized Bessel functions of the first kind. Springer, 2010. 227 p.
6. Bohra N., Ravichandran V. On confluent hypergeometric functions and generalized Bessel functions // Analysis. Math. 2017. V. 43. Is. 4. P. 533–545.
7. Aomoto K., Kita M. Theory of hypergeometric functions. Springer, 2011. P. 335.
8. Дубовик О. А. Представление группы конформных движений евклидова пространства и функции Лежандра на разрезе // Сиб. матем. журн. 1980. № 4. С. 45–49.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М. : Наука, 1973. 296 с.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М. : Наука, 1969. 344 с.