

УДК 519.1:004.421.5:004.7

## РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЕПЕНЕЙ В ГРАФАХ С ЛИНЕЙНЫМ ПРАВИЛОМ ПРЕДПОЧТИТЕЛЬНОГО СВЯЗЫВАНИЯ И В ГРАФАХ ДЖЕКсона – РОДЖЕРСА

**В. Н. Задорожный<sup>1</sup>, Е. Б. Юдин<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Омский государственный технический университет, [zwn2015@yandex.ru](mailto:zwn2015@yandex.ru)

<sup>2</sup> Институт математики им. С. Л. Соболева,  
Сибирское отделение РАН, г. Новосибирск, [udinev@asoiu.com](mailto:udinev@asoiu.com)

Рассматриваются два класса растущих случайных графов – графы предпочтительного связывания с линейной весовой функцией и гибридные графы Джексона – Роджерса. Выведены точные формулы финальных распределений степеней связности вершин и финальных двумерных распределений степеней связности дуг/ребер рассматриваемых графов. Доказано, что каждому гибриднему графу соответствует определенный граф предпочтительного связывания с линейной весовой функцией, имеющий точно такие же, как у этого гибридного графа распределения степеней связности вершин и степеней связности дуг/ребер. Доказывается и более сильное утверждение, что всякий гибридный граф эквивалентен определенному графу с линейной весовой функцией. Выведена формула, позволяющая калибровать линейную весовую функцию для выращивания графов с требуемым асимптотически степенным распределением степеней вершин. Достоверность полученных результатов подтверждена численными проверками и имитационным моделированием. Практическая ценность результатов демонстрируется примером эффективной калибровки графа сети автономных систем Интернет.

*Ключевые слова:* теория сетей, растущие сети, графы предпочтительного связывания, графы Джексона – Роджерса, распределения степеней связности вершин и дуг/ребер.

## DEGREES DISTRIBUTIONS IN LINEAR PREFERENTIAL ATTACHMENT GRAPHS AND JACKSON – ROGERS GRAPHS

**V. N. Zadorozhnyi<sup>1</sup>, E. B. Yudin<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Omsk State Technical University, [zwn2015@yandex.ru](mailto:zwn2015@yandex.ru)

<sup>2</sup> Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk,  
[udinev@asoiu.com](mailto:udinev@asoiu.com)

The paper considers two classes of growing random graphs. The first class is the preferential attachment graphs with a linear weight function, and the second class is the hybrid Jackson – Rogers graphs. Exact formulas for the final vertex degree distributions and final edge/arc endpoints of two-dimensional distributions are derived. It is proved that each hybrid graph corresponds with the definite linear preferential attachment graph by vertex degree distribution and edge/arc endpoints distribution. A stronger assertion is also proved that every hybrid graph is equivalent to a definite graph with a linear weight function. A formula that allows the calibration of a linear function for growing graphs with the required asymptotic power-law vertex degree distribution is deduced. The reliability of the results is confirmed by numerical calculations and simulation modeling. The practical value of the results is demonstrated by successful graph calibration of the network model by autonomous Internet systems.

*Keywords:* network theory, growing networks, preferential attachment graphs, Jackson – Rogers graphs, degrees distribution of connectivity of vertices and arcs/edges.

Графы предпочтительного связывания широко распространились в качестве математических моделей больших сетей после публикации статьи [1], в которой предложен растущий граф, получивший впоследствии название графа Барабаши – Альберт (граф БА). Граф БА, яв-

ляясь адекватной моделью многих растущих сетей, позволил объяснить, каким образом возникают такие их структурные свойства, как асимптотически-степенное *распределение степени связности* (РСС) узлов, устойчивость сетей к случайным удалениям узлов и связей, небольшая величина диаметра у сетей, содержащих сотни миллионов узлов (правило шести рукопожатий), и т. д. [2].

В настоящей статье рассматриваются растущие графы класса  $L$  – это графы с линейной весовой функцией, которая записывается в виде  $f(k) = k + s$ , где смещение  $s$  – константа, либо в виде  $f(k) = s = 1$ , и графы класса  $DR$  – графы Джексона – Роджерса, т. е. графы [3–4].

Графы класса  $L$  выращиваются из небольшого графа-затравки путем добавления приращений – новых вершин с заданным числом  $m$  исходящих из них дуг. Свободный конец каждой дуги приращения связывается с  $i$ -й вершиной графа с вероятностью  $p_i$ , которая пропорциональна весу  $f(k_i)$  этой вершины, определяемому через ее степень связности  $k_i$ :

$$p_i = \frac{f(k_i)}{\sum_{j=1}^N f(k_j)} = \frac{k_i + s}{\sum_{j=1}^N (k_j + s)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где  $k = k_i$  и  $N$  – текущее число вершин в графе.

Из первого равенства в (1) видно, что все весовые функции  $f_c(\cdot) = cf(\cdot)$ , отличающиеся от функции  $f(\cdot)$  лишь мультипликативным коэффициентом  $c > 0$ , эквивалентны – они не изменяют вероятностей связывания  $p_i$ . Отсюда следует, что «особая» весовая функция  $f(k) = 1$  графов класса  $L$  есть типичная весовая функция  $f(k) = k + s$ , которая эквивалентна весовой функции  $f_c(k) = f_{1/s}(k) = k/s + 1$ , получаемой в пределе при  $s \rightarrow \infty$ . Таким образом, всякий граф класса  $L$  задается двумя параметрами – степенью  $m$  приращения и смещением  $s$ . Граф БА определяется весовой функцией  $f(k) = k$ , т. е. является таким графом класса  $L$ , у которого весовая функция имеет нулевое смещение. В общем случае смещение  $s$  может принимать и отрицательные значения.

Всякий граф класса  $DR$  также задается двумя параметрами – степенью  $m$  приращения и вероятностью  $a$ , определяющей «долю» весовой функции  $f_1(k) = 1$  в ее «смеси» с весовой функцией  $f_2(k) = k$ . При связывании с графом по правилу (1) каждая дуга очередного приращения использует с вероятностью  $a$  весовую функцию  $f_1(k) = 1$ , с вероятностью  $(1 - a)$  – весовую функцию  $f_2(k) = k$ .

Целью исследования является обнаружение в классах  $L$  и  $DR$  таких графов, у которых финальные (получаемые при  $N \rightarrow \infty$ ) распределения  $Q_k$  степени  $k$  связности вершин имеют степенную асимптотику, т. е. у которых  $Q_k \sim ck^{-\alpha}$  при  $k \rightarrow \infty$  (обозначение  $c$  неопределенного числового коэффициента, используемое нами в разных контекстах, имеет разный смысл). При этом показатель  $\alpha$  должен лежать в промежутке  $2 < \alpha \leq 3$ , как и во многих реальных растущих сетях, например, в Интернет. Под вероятностью  $Q_k$  степени  $k$  здесь понимается вероятность того, что случайно (равновероятно) выбранная в бесконечном графе вершина будет иметь степень связности  $k$ . Средняя степень вершин рассматриваемых растущих графов, как вытекает из их построения, составляет величину  $\langle k \rangle = 2m$  – это число концов ребер, приходящихся на одну вершину графа.

Гибридные графы Джексона – Роджерса интересны тем, что при  $a \rightarrow 1$ , как это вытекает из алгоритма их построения, они сходятся к известному графу с геометрическим РСС  $Q_k$ , при  $a \rightarrow 0$  – к графу БА, т. е. к графу с асимптотически-степенным РСС  $Q_k \sim ck^{-3}$ . Выбирая

значение параметра  $a$  гибридного графа между 0 и 1, можно получать графы с «промежуточными» видами РСС вершин [3–4].

### Финальные РСС вершин в DR- и L-графах

Применим к гибриднему графу Джексона – Роджерса с параметром  $a$  метод вывода точных рекуррентных соотношений, описанный в [5], адаптируя его к особенностям алгоритма выращивания гибридного графа. А именно разобьем множество вершин гибридного графа на слои (подмножества)  $A_k$  так, чтобы каждый слой  $A_k$  состоял из вершин со степенью  $k$ . При добавлении к графу очередного приращения новая дуга присоединяется к вершине  $i$ , имеющей степень  $k$ , с вероятностью

$$p_i = p(k) = a \frac{f_1(k)}{\sum_{j=1}^N f_1(k_j)} + (1-a) \frac{f_2(k)}{\sum_{j=1}^N f_2(k_j)} \sim a \frac{f_1(k)}{\langle f_1 \rangle N} + (1-a) \frac{f_2(k)}{\langle f_2 \rangle N}, \quad (2)$$

где  $\langle f_1 \rangle$  – среднее значение веса  $f_1$  вершин;

$\langle f_2 \rangle$  – среднее значение веса  $f_2$ .

С ростом  $N$  среднее число вершин, выбираемых приращением с  $m$  дугами в слое  $A_k$ , сходится с относительной погрешностью нуль к величине:

$$\Delta_k^- = mp(k) |A_k| = mp(k) Q_k N = am \frac{f_1(k)}{\langle f_1 \rangle} Q_k + (1-a)m \frac{f_2(k)}{\langle f_2 \rangle} Q_k.$$

Все выбранные в слое  $A_k$  вершины уходят в следующий слой  $A_{k+1}$ , поскольку присоединение к ним новых дуг увеличивает их степень связности на единицу. Вероятностью присоединения к одной вершине  $i$  более одной дуги приращения пренебрегаем, поскольку она является бесконечно малой, порядка  $o(p_i) = o(N^{-1})$ . За счет ухода выбранных в слое  $A_k$  вершин среднее число вершин в этом слое уменьшается на  $\Delta_k^-$ . Аналогично определяем среднее число вершин, выбираемых приращением в слое  $A_{k-1}$ , которое составляет:

$$\Delta_k^+ = mp(k-1) Q_{k-1} N = am \frac{f_1(k-1)}{\langle f_1 \rangle} Q_{k-1} + (1-a)m \frac{f_2(k-1)}{\langle f_2 \rangle} Q_{k-1}.$$

Эти вершины переходят в слой  $A_k$ , за счет чего среднее число вершин в нем возрастает.

При  $t \rightarrow \infty$  ( $N \rightarrow \infty$ ) вероятности  $Q_k = |A_k| / N = N_k / N$ , будучи стационарными вероятностями, после добавления приращения не изменяются, т. е. выполняются следующие два равенства (уравнения баланса):

$$\frac{N_k}{N} = \frac{N_k - \Delta_k^- + \Delta_k^+}{N+1}, \quad k \geq m+1,$$

$$\frac{N_m}{N} = \frac{N_m - \Delta_m^- + 1}{N+1}, \quad k = m.$$

Последнее уравнение – уравнение для слоя  $A_m$  – отличается от предыдущего вследствие того, что в слой  $A_m$  вершины из предыдущего слоя  $A_{m-1}$  не приходят (слоя  $A_{m-1}$  нет), но в то же время, в слой  $A_m$  попадает сама вершина приращения графа.

Подставим в первое уравнение баланса полученные выше выражения для  $\Delta_k^-$  и  $\Delta_k^+$ :

$$\frac{N_k}{N} = \frac{1}{N+1} \left[ N_k - \left( am \frac{f_1(k)}{\langle f_1 \rangle} Q_k + (1-a)m \frac{f_2(k)}{\langle f_2 \rangle} Q_k \right) + \right. \\ \left. + am \frac{f_1(k-1)}{\langle f_1 \rangle} Q_{k-1} + (1-a)m \frac{f_2(k-1)}{\langle f_2 \rangle} Q_{k-1} \right].$$

Умножая обе части полученного уравнения на  $N(N+1)$ , приводя подобные члены и вновь деля обе части на  $N$ , переписываем его с учетом того, что  $N_k / N = Q_k$ , в виде:

$$Q_k = am \frac{f_1(k-1)}{\langle f_1 \rangle} Q_{k-1} + (1-a)m \frac{f_2(k-1)}{\langle f_2 \rangle} Q_{k-1} - am \frac{f_1(k)}{\langle f_1 \rangle} Q_k - (1-a)m \frac{f_2(k)}{\langle f_2 \rangle} Q_k,$$

и, выражая в нем  $Q_k$  через  $Q_{k-1}$ , получаем рекуррентную формулу:

$$Q_k = \frac{am \frac{f_1(k-1)}{\langle f_1 \rangle} + (1-a)m \frac{f_2(k-1)}{\langle f_2 \rangle}}{1 + am \frac{f_1(k)}{\langle f_1 \rangle} + (1-a)m \frac{f_2(k)}{\langle f_2 \rangle}} Q_{k-1}, \quad k \geq m+1. \quad (3)$$

Аналогично из уравнения баланса для слоя  $A_m$  находим:

$$Q_m = \frac{1}{1 + am \frac{f_1(m)}{\langle f_1 \rangle} + (1-a)m \frac{f_2(m)}{\langle f_2 \rangle}}. \quad (4)$$

Формулы (3), (4) справедливы не только для гибридных графов Джексона – Роджерса, так как вывод этих формул не привязан к виду смешиваемых весовых функций. Для графов класса  $DR$ , подставляя выражения используемых в них весовых функций  $f_1(k) = 1$ ,  $f_2(k) = k$  и их средних значений  $\langle f_1 \rangle = \langle 1 \rangle = 1$ ,  $\langle f_2 \rangle = \langle k \rangle = 2m$ , получаем следующие рекуррентные формулы, точно определяющие РСС  $Q_k$ :

$$Q_m = \frac{2}{2 + am + m}, \quad (5)$$

$$Q_k = \frac{2am + (1-a)(k-1)}{2 + 2am + (1-a)k} Q_{k-1}, \quad k \geq m+1. \quad (6)$$

Формулы (5), (6) подтверждаются имитационным моделированием (непосредственным выращиванием  $DR$ -графов) и сравнением получаемых РСС вершин с РСС, рассчитанным по формулам (5), (6).

Рассмотрим теперь графы класса  $L$ . Применяя к ним выведенные в [6] общие для графов предпочтительного связывания рекуррентные формулы:

$$Q_m = \frac{\langle f \rangle}{\langle f \rangle + mf(m)}, \quad (7)$$

$$Q_k = \frac{mf(k-1)}{\langle f \rangle + mf(k)} Q_{k-1}, \quad k \geq m+1, \quad (8)$$

т. е. подставляя в эти формулы весовую функцию  $f(k) = k + s$  и средний вес  $\langle f \rangle = \langle k + s \rangle = \langle k \rangle + s = 2m + s$ , получаем:

$$Q_m = \frac{2m + s}{2m + s + m(m + s)}, \quad (9)$$

$$Q_k = \frac{m(k - 1 + s)}{2m + s + m(k + s)} Q_{k-1}, \quad k \geq m + 1. \quad (10)$$

Для линейной функции  $f(k) = 1$  формулы (7), (8) принимают вид:

$$Q_m = \frac{1}{1 + m}, \quad (11)$$

$$Q_k = \frac{m}{1 + m} Q_{k-1}, \quad k \geq m + 1, \quad (12)$$

т. е. определяют убывающую геометрическую прогрессию с начальным членом  $1/(1 + m)$  и знаменателем  $m/(1 + m)$ . Формулы (11), (12) получаются и из формул (9), (10) при  $s \rightarrow \infty$ .

Теперь можно доказать следующее утверждение, связывающее два рассматриваемых класса случайных графов.

**Теорема 1.** Всякий гибридный граф класса  $DR$  эквивалентен по финальному РСС вершин определенному графу класса  $L$ .

**Доказательство.** Граф класса  $DR$  и его РСС вершин однозначно определяются значениями параметров  $m$  и  $a$ . В соответствие любому выбранному  $DR$ -графу с параметром  $a < 1$  поставим  $L$ -граф с тем же  $m$  и с параметром:

$$s = \frac{2am}{1 - a}. \quad (13)$$

Подставляя эти  $m$  и  $s$  в формулы (9), (10) и упрощая их, получаем формулы, совпадающие, соответственно, с формулами (5), (6). Следовательно, РСС вершин  $L$ -графа с такими  $m$ ,  $s$  совпадает с РСС вершин выбранного  $DR$ -графа. Гибриднему графу с параметром  $a = 1$  поставим в соответствие  $L$ -граф с весовой функцией  $f_1(k) = 1$ . В этом случае РСС вершин  $L$ -графа (11), (12) также совпадает с РСС (5), (6) вершин выбранного гибридного графа, у которого  $a = 1$ . Теорема доказана.

Обратное неверно, так как никакие  $DR$ -графы не соответствуют  $L$ -графам с параметром  $s < 0$ . Поэтому для поиска графов с асимптотически-степенными РСС вершин в классах  $DR$  и  $L$  необходимо и достаточно рассмотреть графы класса  $L$ .

### Точные формулы для РСС дуг и РСС ребер в $DR$ -графах

Степенью связности дуги графа назовем упорядоченную пару чисел  $(l, k)$ , где  $l$  – степень связности вершины, из которой дуга исходит,  $k$  – степень связности вершины, в которую дуга заходит. Вероятность  $Q_{l,k}$  определим как вероятность того, что случайно (равновероятно) выбранная дуга бесконечного графа будет иметь степень  $(l, k)$ . Совокупность всех  $Q_{l,k}$  ( $l \geq 1, k \geq 1$ ) – финальное двумерное РСС дуг  $DR$ -графа можно найти методом составления и решения уравнений баланса для степеней дуг графов с *нелинейным правилом предпочтитель-*

ного связывания (НППС) [5]. Вероятность  $p(k)$  связывания дуги приращения с вершиной, имеющей степень  $k$ , следует при этом определять по формуле полной вероятности (2). Это влечет за собой и изменение формулы для вероятности  $P_k$  связывания дуги приращения со слоем  $A_k$  в DR-графах  $P_k = [a + k(1 - a)/(2m)]Q_k$ . Опуская в связи с ограниченным объемом статьи рутинные выкладки, приведем получаемое в итоге РСС дуг DR-графа, заданного параметрами  $m, a$ :

$$Q_{l,k} = \begin{cases} 0 & \text{при } l < m \text{ или } k \leq m, \\ \frac{[2am + (1 - a)(k - 1)] \cdot [Q_{k-1} + mQ_{m,k-1}]}{2m + (3a + 1)m^2 + m(1 - a)k} & \text{при } l = m, k \geq m + 1, \\ \frac{[2am + (1 - a)(k - 1)]Q_{l,k-1} + [2am + (1 - a)(l - 1)]Q_{l-1,k}}{2 + 4am + (1 - a)(k + l)} & \text{при } l \geq m + 1, k \geq m + 1. \end{cases} \quad (14)$$

Расчет матрицы  $\mathbf{Q} = \|Q_{l,k}\|$  начинается с заполнения нулями строк с номерами  $l < m$  (если такие имеются) и столбцов с номерами  $k \leq m$  в соответствии с первой строкой решения (14). Затем по второй строке решения (14) рассчитывается строка  $l = m$  матрицы, начиная с  $(m + 1)$ -го ее элемента, слева направо, и по формуле третьей строки решения (14) рассчитываются последующие строки матрицы, также с  $(m + 1)$ -го их элемента.

Решение (14) проверено и подтверждено имитационным моделированием. Нетрудно проверить решение (14) и на частных случаях, когда  $a = 0$  или  $a = 1$ . В этих случаях гибридный DR-граф вырождается в обычные графы предпочтительного связывания: при  $a = 1$  – в граф с весовой функцией  $f_1(k) = 1$ , при  $a = 0$  – в граф с весовой функцией  $f_2(k) = k$ . Нетрудно убедиться, что в этих случаях решение (14) совпадает с решением, найденным в [5] для графов с НППС:

$$Q_{l,k} = \begin{cases} 0, & l < m \text{ или } k \leq m, \\ \frac{f_m Q_m}{\langle f \rangle + m(f_m + f_{m+1})}, & l = m, k = m + 1, \\ \frac{f_{k-1}(Q_{k-1} + mQ_{m,k-1})}{\langle f \rangle + m(f_m + f_k)}, & l = m, k \geq m + 2, \\ \frac{f_{l-1}Q_{l-1,k} + f_{k-1}Q_{l,k-1}}{\langle f \rangle / m + f_l + f_k}, & l \geq m + 1, k \geq m + 1, \end{cases} \quad (15)$$

где функция  $f(k)$  целочисленной переменной  $k$  обозначается через  $f_k$ .

Если все дуги в ориентированном графе заменить ребрами, то получается неориентированный граф. Матрица  $\Theta$  степеней ребер этого графа (РСС ребер) получается в результате следующего преобразования матрицы  $\mathbf{Q}$  степеней дуг:

$$\Theta = (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T) / 2. \quad (16)$$

Здесь символ  $T$  обозначает операцию транспонирования матрицы  $\mathbf{Q}$ . Вероятность  $\Theta_{l,k}$  (элемент матрицы  $\Theta$ ) – это вероятность того, что случайно выбранное ребро бесконечного графа, проходимое в случайном направлении, ведет из вершины со степенью  $l$  в вершину со

степенью  $k$ . Матрица  $\Theta$  симметрична относительно главной диагонали.

### Точные формулы для РСС дуг и РСС ребер в $L$ -графах

Точные формулы для РСС дуг в графах с линейным правилом предпочтительного связывания выводятся как частный случай общей формулы РСС (15) путем подстановки линейной весовой  $f(k) = k + s$  и, соответственно, среднего веса вершин  $\langle f \rangle = 2m + s$ :

$$Q_{l,k} = \begin{cases} 0, & l < m \text{ или } k \leq m, \\ \frac{(m+s)Q_m}{2m+s+m(2m+2s+1)}, & l = m, k = m+1, \\ \frac{(k-1+s)(Q_{k-1} + mQ_{m,k-1})}{2m+s+m(m+2s+k)}, & l = m, k \geq m+2, \\ \frac{(l-1+s)Q_{l-1,k} + (k-1+s)Q_{l,k-1}}{(2m+s)/m+l+2s+k}, & l \geq m+1, k \geq m+1. \end{cases} \quad (17)$$

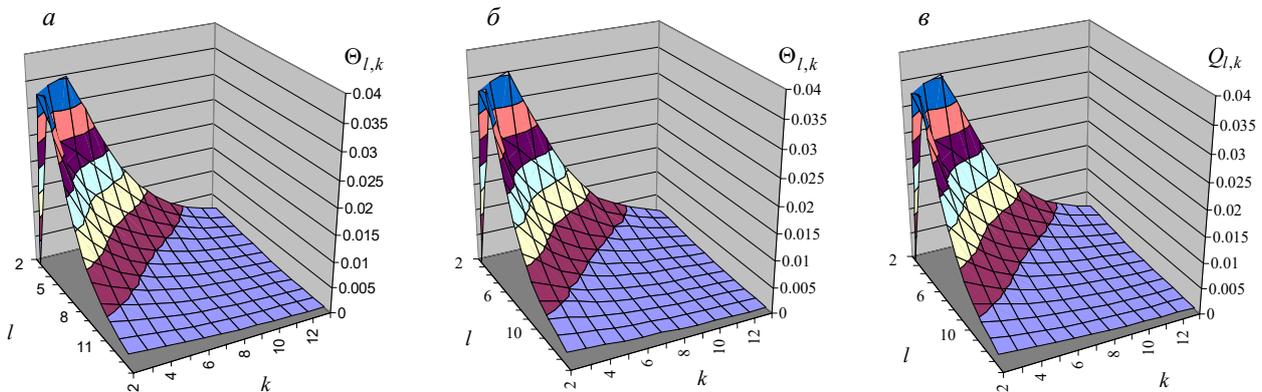
**Теорема 2.** Всякий гибридный граф класса  $DR$ , эквивалентный по финальному РСС вершин определенному графу класса  $L$ , эквивалентен этому графу и по финальным РСС дуг / ребер.

**Доказательство.** Согласно теореме 1 всякий  $DR$ -граф с параметрами  $m, a$  эквивалентен по РСС  $Q_k$  вершин  $L$ -графу с тем же  $m$  и с параметром:

$$s = \frac{2am}{1-a}. \quad (18)$$

Остается проверить, что эти  $DR$ - и  $L$ -графы эквивалентны также по РСС дуг  $Q_{l,k}$  и РСС ребер  $\Theta_{l,k}$ . С учетом формулы (16) достаточно выполнить проверку эквивалентности этих графов по РСС дуг. Для этого в общую формулу РСС дуг  $L$ -графа (17) подставим значение  $s$  (18). Тогда после эквивалентных преобразований формула (17) сводится к (14). Следовательно, сравниваемые  $DR$ - и  $L$ -графы эквивалентны по РСС  $Q_{l,k}$  дуг. Теорема доказана.

На рис. 1 представлены примеры РСС ребер двух эквивалентных  $DR$ - и  $L$ -графов.



**Рис. 1. Примеры РСС ребер двух эквивалентных  $DR$ - и  $L$ -графов:**  
 $a$  – РСС (16), (14)  $\Theta_{l,k}$  ребер в графе Джексона – Роджерса с параметрами  $m = 2, a = 0,75$ ;  
 $б$  – РСС ребер этого же графа, рассчитанное путем его имитационного моделирования;  
 $в$  – РСС эквивалентного  $L$ -графа с параметрами  $m = 2, s = 2am/(1 - a) = 12$

Графики на рис. 1 наглядно подтверждают правильность формул, полученных для РСС ребер (следовательно, для используемых ими формул РСС вершин и РСС дуг)  $DR$ - и  $L$ -графов, а также справедливость доказанных в статье теорем.

### Теорема об эквивалентности

Точное совпадение распределений степеней вершин и степеней дуг/ребер  $DR$ -графов с одной стороны, и соответствующих  $L$ -графов – с другой, приводит к предположению о полной эквивалентности сравниваемых графов. И это предположение подтверждается, его справедливость доказывает следующая теорема.

**Теорема 3.** Всякий  $DR$ -граф эквивалентен определенному  $L$ -графу.

**Доказательство.** Пусть  $DR$ -граф задан параметрами  $m$  (число дуг в приращении графа) и  $a$  (вероятность использования при выборе вершины весовой функции  $f_1(k) = 1$ ), и пусть  $L$ -граф имеет тот же параметр  $m$  и весовую функцию  $f(k) = k + s$ , где  $s = 2am/(1-a)$ . Тогда правило (2) выбора новой дугой  $DR$ -графа любой вершины  $i$  для связывания эквивалентно правилу (1) выбора этой же вершины новой дугой  $L$ -графа.

Действительно, вычисляя вероятность  $p_i$  для указанного  $L$ -графа по правилу (1), получаем:

$$\begin{aligned}
 p_i &= \frac{k + s}{\sum_{j=1}^N (k_j + s)} = \frac{k + \frac{2am}{1-a}}{\sum_{j=1}^N \left( k_j + \frac{2am}{1-a} \right)} = \frac{k(1-a) + 2am}{\sum_{j=1}^N k_j(1-a) + \sum_{j=1}^N 2am} = \frac{k(1-a) + 2am}{(1-a)\sum_{j=1}^N k_j + 2amN} \\
 &= \frac{k(1-a) + 2am}{(1-a)2R + 2amN} = \frac{k(1-a) + 2am}{2(1-a)mN + 2amN} = \frac{k(1-a) + 2am}{2mN},
 \end{aligned} \tag{19}$$

где  $R = mN$  – число ребер в графе.

В выкладке (19) мы для простоты полагаем, что число ребер в используемой затравке графа в  $m$  раз больше числа вершин в ней (как и в каждом приращении графа).

Упрощая теперь правило (2) выбора вершины в  $DR$ -графе, находим, что

$$\begin{aligned}
 p_i &= a \frac{f_1(k)}{\sum_{j=1}^N f_1(k_j)} + (1-a) \frac{f_2(k)}{\sum_{j=1}^N f_2(k_j)} = a \frac{1}{\sum_{j=1}^N 1} + (1-a) \frac{k}{\sum_{j=1}^N k_j} = a \frac{1}{N} + (1-a) \frac{k}{2R} = \\
 &= a \frac{1}{N} + (1-a) \frac{k}{2mN} = \frac{2am + k(1-a)}{2mN}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Следовательно, правила выращивания сравниваемых графов эквивалентны (вероятности (19) и (20) связывания с любой вершиной  $i$  совпадают). Теорема доказана.

Таким образом,  $DR$ -графы не являются новым классом графов – множество  $DR$ -графов совпадает с подмножеством  $L$ -графов, определяемым условием  $s \geq 0$ . Любой  $DR$ -граф эквивалентен соответствующему ему  $L$ -графу по всем вероятностным и вероятностно-временным характеристикам, в частности, по характеристикам переходного процесса. Разумеется, характеристики переходных процессов эквивалентны при одинаковых затравках, из которых выращиваются сопоставляемые  $DR$ - и  $L$ -графы.

### Вывод для РСС $Q_k$ в классе $L$ приближения в замкнутом виде

Найдем для  $L$ -графов явные выражения РСС  $Q_k$ , позволяющие осуществлять анализ асимптотики этих РСС.

В случае линейной весовой функции  $f(k) = 1$  из рекурсии (11), (12) вытекает точная явная формула РСС – формула общего члена определяемой равенствами (11), (12) геометрической прогрессии:

$$Q_k = \frac{1}{1+m} \left( \frac{m}{1+m} \right)^{k-m}, \quad k \geq m. \quad (21)$$

В случае линейной весовой функции  $f(k) = k + s$  также нетрудно получить точную явную формулу, поскольку соответствующее рекуррентное уравнение (9), (10) линейно относительно искомой функции  $Q_k = Q(k)$ . Решая уравнение (9), (10), получаем следующее явное (представленное в замкнутом виде) точное выражение:

$$Q_k = \frac{(2m+s)\Gamma(m+s+2+s/m)\Gamma(k+s)}{m\Gamma(m+s)\Gamma(k+s+3+s/m)}. \quad (22)$$

При  $s \rightarrow \infty$  (22) сходится к (12). Решение (22) уравнения (9), (10) несложно доказываться методом математической индукции с помощью известного тождества  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ . Однако, несмотря на явный вид полученной формулы (22), она неудобна для анализа асимптотик РСС  $Q_k$  при различных  $s$ .

Поэтому перейдем к выводу для РСС  $Q_k$  приближенной явной формулы методом среднего поля [1, 3–4]. При этом добавляемые в граф вершины будем нумеровать моментами  $i$  их поступления. Число  $N$  вершин в графе всегда будет равно текущему времени  $t$  поступления очередного приращения. С учетом этого выполним следующие предписываемые методом среднего поля шаги, имеющие достаточно простую вероятностную интерпретацию.

**Шаг 1.** Исходя из (1) запишем дифференциальное уравнение для изменения во времени средней степени  $k_i$  вершины  $i$  за счет присоединения новых приращений:

$$\frac{dk_i}{dt} = \frac{mf(k_i)}{\langle f \rangle t} = \frac{m(k_i + s)}{\langle f \rangle t}.$$

Поскольку здесь  $\langle f \rangle = \langle k + s \rangle = 2m + s$ , то

$$\frac{dk_i}{dt} = \frac{m(k_i + s)}{(2m + s)t}.$$

Решая это уравнение с разделяющимися переменными с учетом начального условия  $k_i(i) = m$ , получаем:

$$k_i = (m + s) \left( \frac{t}{i} \right)^{\frac{m}{2m+s}}. \quad (23)$$

**Шаг 2.** Используя (23), находим номер  $i = l$  такой вершины, степень которой равна  $k$

$$\frac{l}{t} = \left( \frac{k}{m + s} \right)^{-\frac{2m+s}{m}}.$$

**Шаг 3.** Отсюда получаем оценку  $\hat{F}(k)$  функции  $F(k)$  распределения (ф. р.) степени  $k$  вершины, случайно выбираемой в графе

$$\hat{F}(k) = \frac{t-l}{t} = 1 - \left( \frac{k}{m+s} \right)^{-\frac{2m+s}{m}}. \quad (24)$$

**Шаг 4.** Оценку для РСС вершин находим как производную от ф. р. (24)

$$\hat{Q}_k = \frac{2m+s}{m} (m+s)^{\frac{2m+s}{m}} k^{-\frac{3m+s}{m}}, \quad (25)$$

где  $\hat{Q}_k$  – приближенная (асимптотически точная) оценка вероятности  $Q_k$ .

### Анализ асимптотических свойств РСС $Q_k$ в $L$ -графах

Полученная оценка (25) показывает, что РСС вершин  $L$ -графа при любых  $s$  является асимптотически степенным. Это упрощает выполнение анализа, так как его можно свести к просмотру  $s$ , кратных  $m$ , и последующей логической интерполяции получаемых результатов на промежуточные значения  $s$ . Рассмотрим, как изменяется асимптотика РСС  $Q_k$  при изменении параметра  $s$ :

1. При  $s = 0$  из (25) находим, что  $\hat{Q}_k = 2m^2 k^{-3}$ . Это значение  $s$  превращает весовую функцию  $f(k) = k + s$  в весовую функцию графа БА и оценку (25) – в правильную оценку асимптотики  $Q_k \sim ck^{-3}$  графа БА. Таким образом, значение  $s = 0$  определяет одну из интересующих нас степенных асимптотик  $Q_k \sim ck^{-\alpha}$ , у которых  $2 < \alpha \leq 3$ .

2. При  $s = m, 2m, 3m, \dots$ , согласно (25), реализуется степенная асимптотика  $Q_k \sim ck^{-\alpha}$  с параметром  $\alpha = 4, 5, 6, \dots$ . Таким образом, в полубесконечном диапазоне  $s \geq 0$  лишь одно значение – значение  $s = 0$  – обеспечивает степенную асимптотику  $L$ -графа с принадлежащим диапазону  $2 < \alpha \leq 3$ , значением  $\alpha$  (значением  $\alpha = 3$ ).

Заметим, что соотношение (13) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между точками диапазона  $s \geq 0$  и точками диапазона  $0 \leq a < 1$ . Отсюда следует, что в классе  $DR$  лишь один граф удовлетворяет нашему критерию – это граф БА, реализуемый при  $a = 0$ .

3. Оставшийся диапазон  $s < 0$  ограничен условием реализуемости правила (1):

$$f(k) = k + s > 0, \quad k \geq m.$$

Для реализуемости этого условия на любом шаге выращивания графа необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство  $m + s > 0$ , т. е.  $s \geq -m$ .

При  $s = -0$ , как мы видели выше в п. 1, имеет место асимптотика  $Q_k \sim ck^{-3}$ . В точке  $s = -m + \varepsilon$ , если  $\varepsilon \rightarrow +0$ , то, согласно (25), в асимптотике  $Q_k \sim ck^{-\alpha}$  показатель  $\alpha \rightarrow 2$ . Очевидно, значения параметра  $s$  в промежутке  $-m < s \leq 0$  приводят к значениям  $\alpha$  в промежутке  $-m < s \leq 0$ .

Итак, цель исследования достигнута. Искомый класс графов с асимптотикой  $Q_k \sim ck^{-\alpha}$ , где  $2 < \alpha \leq 3$ , это  $L$ -графы с весовой функцией  $f(k) = k + s$ , где  $-m < s \leq 0$ . Если требуется реализовать  $\alpha$  в промежутке  $2 < \alpha \leq 3$ , то по вытекающей из (25) формуле:

$$s = (\alpha - 3)m \quad (26)$$

сразу определяется нужный параметр  $s$  соответствующего  $L$ -графа.

*Примечание 1.* При моделировании реальных сетей значение  $m$  часто бывает не целым.

Графы, моделирующие такие сети, выращиваются путем использования стохастического приращения: новые вершины, добавляемые к графу, содержат случайное число  $x$  дуг со средним значением  $\langle x \rangle = m$ . Это не сказывается на справедливости формул (25), (26), поскольку асимптотика РСС вершин однозначно определяется весовой функцией и средним числом  $m$  дуг у приращения.

Итоги выполненного анализа графов классов  $GR$  и  $L$  подводятся в табл. 1.

Таблица 1

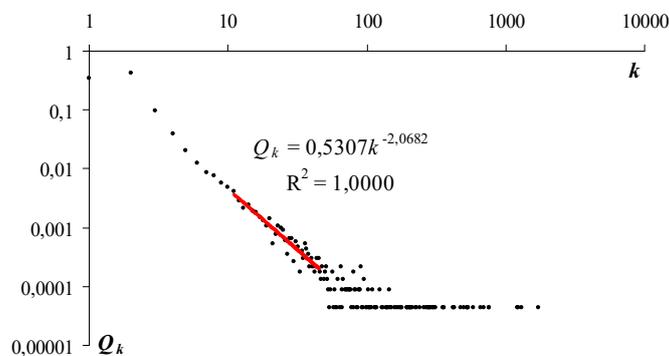
**Асимптотики РСС  $Q_k$  в DR- и L-графах**

Асимптотика РСС $Q_k$ при $k \rightarrow \infty$	Значения параметра $s$ весовой функции L-графа	Значения параметра $a$ DR-графа
1. $Q_k \sim ck^{-\alpha}$ , $2 < \alpha < 3$	2. $-m < s < 0$	3. отсутствуют
4. $Q_k \sim ck^{-3}$ , $\alpha = 3$	5. $s = 0$	6. $a = 0$
7. $Q_k \sim ck^{-\alpha}$ , $\alpha > 3$	8. $s > 0$	9. $0 < a < 1$
10. экспоненциальная	11. $s \rightarrow \infty$ : $f(k)=1$	12. $a = 1$

*Примечание 2.* Значение  $\alpha = 2$  в степенной асимптотике графов и сетей предпочтительного связывания недостижимо ни при каких весовых функциях, поскольку асимптотика  $Q_k \sim ck^{-2}$  приводит к бесконечной средней степени связности  $\langle k \rangle = \int_0^{\infty} kQ_k dk = \infty$ , которая невозможна, так как в графах (сетях) предпочтительного связывания по построению  $\langle k \rangle = 2m$ .

### Пример применения

Степенная асимптотика  $Q_k \sim ck^{-\alpha}$  при  $2 < \alpha \leq 3$  характерна, например, для сетей, входящих в состав Интернет. В работе [6] приводится пример решения задачи калибровки графа, моделирующего сеть автономных систем Интернет по статистическим данным об этой сети. Сеть состоит из  $N = 22\,963$  узлов и  $E = 48\,436$  ребер. Статистические данные содержат информацию о распределении степеней узлов сети. Всего таблица статистических данных содержит 1 713 строк, состоящих из двух чисел  $k, n_k$ , где  $k$  – степень узла ( $k = 1, \dots, 1713$ ),  $n_k$  – число узлов со степенью  $k$ . Эмпирическое РСС  $Q_k$  получаем, добавляя в таблицу третий столбец, содержащий числа  $Q_k = n_k/N$  (график этого распределения показан на рис. 2 маркерами).



**Рис. 2. Распределение  $Q_k$  в сети автономных систем Интернет**

Значение параметра  $m$  сети равно  $E/N = 2,1093$ . Чтобы найти эмпирическое значение

показателя  $\alpha$ , строится линия степенного тренда  $Q_k \sim ck^{-\alpha}$  (красная сплошная линия на рис. 2), для которой  $c$  и  $\alpha$  определяются методом наименьших квадратов (МНК). При этом начальная часть используемого эмпирического РСС исключается, поскольку требуется определить асимптотическую характеристику. Эмпирические вероятности  $Q_k$  больших значений  $k$  тоже не используются, так как в растущей сети еще мало узлов с такими степенями, и эмпирические вероятности таких степеней ненадежны (рис. 2). В результате применения МНК получаем эмпирическую асимптотику  $Q_k \sim ck^{-\alpha}$ , в которой  $\alpha = 2,0682$ . По формуле (26) вычисляем  $s = -1,9655$ . Следовательно, нужная асимптотика реализуется в моделирующем сеть графе с весовой функцией  $f(k) = k - 1,9655$  (при среднем числе дуг в приращении  $m = 2,1093$ ). Определением этой весовой функции, обеспечивающей требуемую асимптотику распределения  $Q_k$ , мы теперь легко решили основную задачу калибровки.

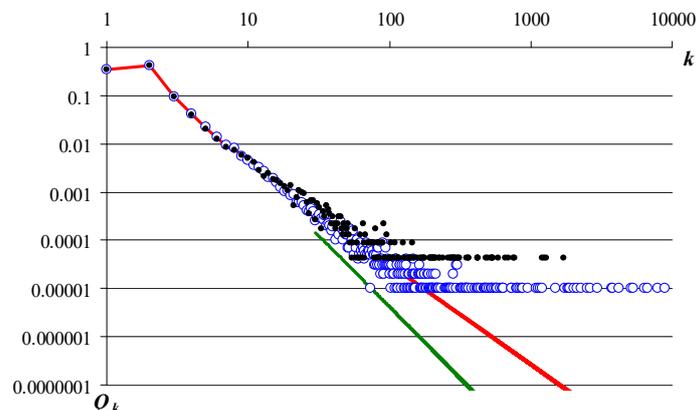
Кроме этого, методами, изложенными в работах [5–7], за счет определения подходящего стохастического приращения (когда число исходящих дуг приращения является не детерминированной, а случайной величиной) мы, как и раньше, решаем задачу реализации специфической начальной части последовательности  $Q_k$ . В результате модель сети АС теперь определяется как граф предпочтительного связывания, весовая функция которого при  $k \geq 11$  задается формулой  $f(k) = k - 1,9655$ , а при  $k = 1, \dots, 10$  принимает значения 0, 0, 0, 1,38802, 2,40613, 5,28966, 6,67, 6,71098, 7,79545, 8,10619 соответственно. Стохастическое приращение определяется как вершина со случайным числом  $x$  дуг, которое может принимать значения  $x = 1, \dots, 6$  с вероятностями 0,34145, 0,42246, 0,09664, 0,09433, 0,01504, 0,03008 соответственно (при этом, разумеется, среднее значение  $x$  равно  $m = 2,1093$ ).

На рис. 3 показан результат проверки выполненной калибровки путем непосредственного выращивания графа с описанными выше калиброванными весовой функцией  $f(k)$  и распределением числа  $x$  дуг в стохастических приращениях графа. Рекуррентные формулы для точного расчета РСС вершин растущего графа со стохастическим приращением выведены в [6]:

$$Q_g = \frac{r_g \langle f \rangle}{\langle f \rangle + mf(g)}, \quad (27)$$

$$Q_k = \frac{r_k \langle f \rangle + mf(k-1)Q_{k-1}}{\langle f \rangle + mf(k)}, \quad k \geq g+1, \quad (28)$$

где  $g = k_{\min}$ ;  $r_g, r_{g+1}, \dots, r_h$  – вероятности того, что число  $x$  дуг приращения равно  $g, g+1, \dots, h$  соответственно (в нашем случае  $g = 1, h = 6$ ).



**Рис. 3.** Распределение  $Q_k$  степеней вершин в графе из 100 тысяч вершин, выращенном в имитационной модели (синие круглые маркеры) на фоне распределения, рассчитанного по точным формулам (27)–(28) (красная верхняя сплошная линия). Черные точки – распределение  $Q_k$  в моделируемой сети автономных систем. Зеленая нижняя сплошная линия показывает угол наклона графика РСС  $Q_k$ , реализуемого при традиционном использовании весовой функции  $f(k) = k$ , реализующей асимптотику  $Q_k \sim ck^{-3}$ . За счет изменения коэффициента  $c$  зеленую линию можно поднять выше, но нельзя изменить ее угол наклона

Рис. 3 наглядно демонстрирует, что правильный выбор весовой функции позволяет адекватно воспроизводить в графовых моделях асимптотику РСС узлов моделируемых сетей. Благодаря этому принципиально повышается качество решения задач моделирования. В частности, обеспечивается адекватное прогнозирование обусловленных ростом сетей изменений в сетевых процессах.

Заметим, что реализованное в рассмотренном примере РСС, имеющее значительно более тяжелый хвост, чем РСС графа БА, обуславливает более интенсивный рост степеней вершин и более значительную долю «центров влияния» – вершин с очень высокими степенями связности. Это отличие заметно даже при визуальном восприятии выращиваемых графов, если их изображать в масштабе, обеспечивающем наличие на одном рисунке нескольких тысяч вершин.

**Заключение.** Выполнено исследование растущих случайных графов класса  $DR$  (гибридных графов Джексона – Роджерса), генерируемых с использованием смеси двух весовых функций  $f_1(k) = 1$  и  $f_2(k) = k$ , и случайных графов класса  $L$ , выращиваемых с использованием линейной весовой функции  $f(k) = k + s$  или  $f(k) = 1$ .

В ходе исследования доказано, что у каждого гибридного графа класса  $DR$  имеется двойник – граф класса  $L$  с точно такими же финальными распределениями степеней вершин, степеней дуг и степеней ребер. Доказано и более сильное утверждение, что всякий  $DR$ -граф эквивалентен своему  $L$ -двойнику. Приведена формула, по которой определяется соответствующий  $L$ -граф – двойник  $DR$ -графа. Найдены асимптотики распределений  $Q_k$  для всех значений параметров весовых функций в обоих классах графов.

Установлено, что графы с асимптотикой  $Q_k \sim ck^{-\alpha}$ , где  $\alpha \in (2, 3]$ , широко распространенной в реальных быстро растущих сетях, реализуются линейной весовой функцией  $f(k) = k + s$  со смещением  $s$ , лежащим в диапазоне  $-m < s \leq 0$ , где  $m$  – число дуг в приращении графа. Приведенный в статье пример применения полученных теоретических результатов подтверждает их правильность и практическую значимость.

Полученные результаты могут использоваться при построении графовых моделей реальных растущих сетей (таких, как сети сотрудничества ученых [8], социальные сети [9], сети передачи данных [10] и др.). Эти результаты можно применять при исследовании сетей и сетевых процессов как аналитическими [11–13], так и имитационными [14–15] методами. Это позволит существенно повысить адекватность и эффективность разрабатываемых методов взаимодействия с реальными сетями и методов управления сетевыми процессами.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-60023 мол\_a\_дк.

### Литература

1. Barabasi A. L., Albert R. Emergence of scaling in random networks // Science. 1999. V. 286. P. 509–512.
2. Barabasi A. L. Scale-free networks: A decade and beyond // Science. 2009. V. 325. P. 412–413.
3. Jackson M. O., Rogers B. W. Meeting Strangers and Friends of Friends: How Random are Social Networks? Forthcoming // American Economic Review, 2006.

4. Jackson M. O. *Social and Economic Networks: Models and Analysis*. Stanford University ; Santa Fe Institute: CIFAR, 2010.
5. Zadorozhnyi V. N., Yudin E. B. Growing network: models following nonlinear preferential attachment rule // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2015. V. 428. P. 111–132.
6. Задорожный В. Н. Случайные графы с нелинейным правилом предпочтительного связывания // *Проблемы управления*. 2010. № 6. С. 2–11.
7. Zadorozhnyi V. N., Yudin E. B., Yudina M. N. Analytical and numerical methods of calibration for preferential attachment random graphs // *International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON) 2017*. Astana, Kazakhstan. 2017. P. 1–6.
8. Fortunato S., Bergstrom C. T., Börner K., Evans J. A., Helbing D., Milojević S, Petersen A. M., Radicchi F., Sinatra R., Uzzi B. , Vespignani A., Waltman L., Wang D. , Barabási A-L. *Science of Science* // *Science*. 2018. V. 359. P. 6379.
9. Deville P., Song C., Eagle N., Blondel V. D., Barabasi A-L., Wang D. *Scaling Identity Connects Human Mobility and Social Interactions* // *PNAS*. 2016. V. 113. № 26. P. 7047–7052.
10. Lo C., Cheng J., Leskovec J. *Understanding Online Collection Growth Over Time: A Case Study of Pinterest* // *ACM International Conference on World Wide Web (WWW)*, 2017.
11. Karrer B., Newman M. E. J. *Competing epidemics on complex networks* // *Phys Rev*. 2011. № 84.
12. Boccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., Hwang D-U. *Complex networks: Structure and dynamics* // *Physics Reports*. 2006. № 424. P. 175–308.
13. Zan Y. *DSIR double-rumors spreading model in complex networks* // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2018. V. 110. P. 191–202.
14. Witten G., Poulter G. *Simulations of infectious diseases on networks* // *Computers in Biology and Medicine*. 2007. V. 37. № 2. P. 195–205.
15. Aksyonov K., Bykov E., Aksyonova O., Nevolina A., Goncharova N. *Architecture of the Multi-agent Resource Conversion Processes Extended with Agent Coalitions* : *IEEE International Symposium on Robotics and Intelligent Sensors, IRIS 2016*. Hosei University, Tokyo, Japan, December 17–20, 2016, Code 134518 // *Procedia Computer Science*. 2017. V. 105. P. 221–226.