

УДК 004.942

## БЛОЧНЫЙ ПОДХОД ДЛЯ РАЗРЕШЕНИЯ КОЛЛИЗИЙ ВИРТУАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ

**Е. В. Страшнов, П. Ю. Тимохин**

*Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт  
системных исследований Российской академии наук  
strashnov\_evg@mail.ru, webpismo@yahoo.de*

В работе рассмотрена задача моделирования разрешения коллизий трехмерных объектов в системах виртуального окружения. Предлагается блочный подход, в котором объекты разрешаются попарно с одновременной обработкой для них ограничений контакта или удара. Это приводит к формулировке задачи Linear Complementarity Problem (LCP) – задачи с линейными дополнениями относительно неизвестных значений импульсов (удара или контактных сил). Решение задачи LCP осуществляется аналитическим путем перебора всевозможных вариантов, возникающих в зависимости от количества точек контакта, полученных на стадии определения коллизий виртуальных объектов. С применением предлагаемого подхода разрешение коллизий всей системы объектов основано на ранее разработанном итерационном методе последовательных импульсов. Итерации этого метода осуществляются для каждой пары объектов системы до тех пор, пока не будет выполнен хотя бы один из критериев сходимости, обеспечивающий необходимую точность и реальное время моделирования. Апробация предложенных в статье методов и алгоритмов была проведена в подсистеме динамики имитационно-тренажерного комплекса, разработанного в ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, и показала их применимость в системах виртуального окружения.

*Ключевые слова:* виртуальные объекты, разрешение коллизий, задача LCP, метод последовательных импульсов, системы виртуального окружения.

## BLOCK APPROACH FOR COLLISION RESPONSE OF VIRTUAL OBJECTS

**E. V. Strashnov, P. Yu. Timokhin**

*System Research Institute, Russian Academy of Sciences  
strashnov\_evg@mail.ru, webpismo@yahoo.de*

The paper considers the problem of collision response simulation of 3D objects in virtual environment systems. To solve this problem, we propose a block solver in which objects are resolved in pairs with simultaneous processing of clipping contact or impact. It leads to formulation of the LCP (Linear Complementarity Problem) with linear complements with respect to unknown values of impulses (impacts or contact forces). The solution of LCP is performed analytically by the search of all possible options, depending on the count of contact points that are received on the collision detection of virtual objects. Using the proposed approach, the collision response of objects system is based on the sequential impulses method developed earlier. Iterations of this method are performed for each pair of system objects until at least one of the convergence criteria is fulfilled, ensuring necessary accuracy and real time simulation. Approbation of the proposed methods and algorithms was carried out in the dynamic subsystem of training complex, developed in SRISA RAS and showed their applicability in virtual environment systems.

*Keywords:* virtual objects, collision response, LCP problem, sequential impulses method, virtual environment systems.

Моделирование коллизий виртуальных объектов является неотъемлемой частью физического движка систем виртуального окружения. Это связано с тем, что в виртуальной среде необходимо обеспечить в реальном времени поведение объектов при их взаимодействии,

наиболее приближенное к реальной среде. Примерами коллизий являются соударение бильярдных шаров, качение колеса по подстилающей поверхности, захват и удержание объекта на трении, различные случаи статического равновесия тел и т. д. Поэтому разработка методов и алгоритмов расчета коллизий виртуальных объектов, исходя из физических законов взаимодействия объектов со средой (контакт, удар, трение и т. д.), является важной и актуальной задачей.

Задача моделирования коллизий виртуальных объектов включает в себя стадию определения коллизий [1–2], где проверяется сам факт пересечения объектов, и в случае их пересечения вычисляются необходимые параметры коллизии, и стадия разрешения коллизий [3–4], в которой рассчитывается реакция на столкновения объектов. Рассматриваем апостериорные алгоритмы определения коллизий, т. е. обработка коллизий происходит по наличию пересечения объектов. Поэтому в качестве параметров коллизии выбирается геометрическая информация о пересечении объектов, которая включает в себя нормаль проникновения, точки контакта и их глубины. При этом предполагается, что алгоритмы определения коллизий работают таким образом, что выбирается не больше четырех точек контакта, образуя максимально большую площадь контакта [5].

Рассмотрим стадию разрешения коллизий виртуальных объектов, где необходимо адекватно реагировать на столкновение объектов с моделированием удара, контакта и трения между ними. Моделирование контакта объектов с вычислением неизвестных контактных сил приводит к так называемой задаче ЛСР [6] (задача с линейными дополнениями), решение которой осуществляется с помощью прямых или итерационных методов. Прямые методы решения ЛСР, такие как методы Данцига [7] и Лемке [8], являются трудоемкими и вычислительно затратными, поэтому непригодны для задач, решаемых в режиме реального времени. Более широкое применение нашли итерационные методы, такие как проекционный метод Гаусса – Зейделя [9] и метод последовательных импульсов [10–11]. Однако эти методы в определенных случаях обладают невысокой сходимостью и дают результаты, которые зависят от порядка вычисления сил или импульсов. Последнюю проблему поясним на примере контакта бокса, имеющего массу  $m$  с плоской поверхностью, где  $P_i$  – точки контакта;  $\mathbf{n}$  – нормаль к поверхности (рис. 1).

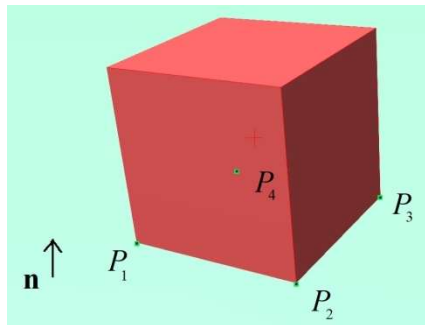


Рис. 1. Контакт бокса с плоскостью

Решая задачу контакта бокса с поверхностью проекционным методом Гаусса – Зейделя, получим следующие значения сил реакции опоры в точках  $P_i$ :

$$F_1 = F_3 = \frac{3}{10}mg, \quad F_2 = F_4 = \frac{1}{5}mg,$$

где  $g$  – ускорение свободного падения.

Эти результаты противоречат теории, согласно которой контактные силы распределяются равномерно для всех точек контакта.

Чтобы преодолеть проблемы итерационных методов решения задачи LCP, реализован блочный подход. Для этого предлагается модифицировать ранее разработанный метод последовательных импульсов [4, 11], предназначенный для моделирования динамики систем тел, с решением задачи LCP для каждой пары объектов. Основная идея состоит в том, что неизвестные значения импульсов контакта или удара для пары объектов определяются одновременно, а переход к следующей паре осуществляется итерационно с изменением скоростей тел. В работе предлагается алгоритм аналитического решения задачи LCP, с помощью которого сначала вычисляются импульсы, моделирующие контакт или удар, а уже затем импульсы, моделирующие все виды трения между телами. Разработанные методы и алгоритмы моделирования коллизий виртуальных объектов с применением блочного подхода были реализованы в виде программных модулей подсистемы динамики имитационно-тренажерного комплекса, созданного в ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН.

### Задача LCP контакта пары виртуальных объектов

Рассмотрим в момент времени  $t$  контакт двух виртуальных объектов, которые представляют собой твердые тела (рис. 2) массой  $m_k$  и инерцией  $\mathbf{I}_k$ , где  $k = 1, 2$ .

Пусть  $\mathbf{v}_k$  – линейные скорости тел,  $\boldsymbol{\omega}_k$  – угловые скорости тел,  $k = 1, 2$ . Центры масс тел расположены в точках  $C_k$ ,  $k = 1, 2$ . Все величины заданы в мировой системе координат.

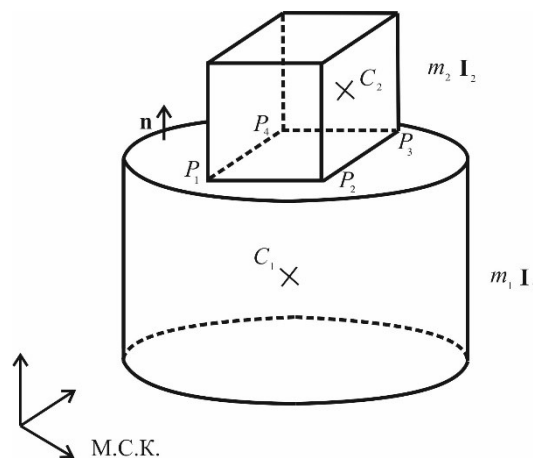


Рис. 2. Контакт двух виртуальных объектов

Выведем математическую модель контакта двух тел. Пусть алгоритм определения коллизий возвращает следующую информацию:  $\mathbf{n}$  – нормаль контакта, направленная от первого объекта во второй,  $P_i$ ,  $i = \overline{1, N}$  – точки контакта. Мы рассматриваем случай контакта объектов, означающий, что относительная скорость тел в точках  $P_i$  мала:

$$|\Delta \mathbf{v}_{P_i} \cdot \mathbf{n}| \leq \varepsilon_c, \quad i = \overline{1, N},$$

где  $\Delta \mathbf{v}_{P_i} = \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{C}_2 \mathbf{P}_i - \mathbf{v}_1 - \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{C}_1 \mathbf{P}_i$  – относительная скорость;

$\varepsilon_c$  – задаваемое значение малости относительной скорости.

Моделирование динамики тел состоит в том, чтобы определить их состояние (координаты и скорости) в момент времени  $t + \Delta t$ , где  $\Delta t$  – шаг моделирования динамики.

На следующем шаге моделирования необходимо обеспечить условие, что объекты не могут проникать друг в друга. Для этого должны быть выполнены следующие ограничения относительно скоростей тел:

$$\Delta \mathbf{v}_{p_i}(t + \Delta t) \cdot \mathbf{n} \geq 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

Это условие представим в следующем виде:

$$(\mathbf{v}_2(t + \Delta t) - \mathbf{v}_1(t + \Delta t)) \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\omega}_2(t + \Delta t) \cdot \mathbf{w}_{2i} - \boldsymbol{\omega}_1(t + \Delta t) \cdot \mathbf{w}_{1i} \geq 0, \quad i = \overline{1, N},$$

где  $\mathbf{w}_{1i} = \mathbf{C}_1 \mathbf{P}_i \times \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{w}_{2i} = \mathbf{C}_2 \mathbf{P}_i \times \mathbf{n}$ .

Объединим эти ограничения для всех точек контакта, записав их в матричном виде:

$$\mathbf{J}\mathbf{V}(t + \Delta t) = \begin{bmatrix} -\mathbf{n}^T & -\mathbf{w}_{11}^T & \mathbf{n}^T & \mathbf{w}_{21}^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\mathbf{n}^T & -\mathbf{w}_{1N}^T & \mathbf{n}^T & \mathbf{w}_{2N}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(t + \Delta t) \\ \boldsymbol{\omega}_1(t + \Delta t) \\ \mathbf{v}_2(t + \Delta t) \\ \boldsymbol{\omega}_2(t + \Delta t) \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{J}$  – матрица Якоби ограничений контакта размерности  $N$  на 12;

$\mathbf{V}$  – объединенный вектор скоростей для двух тел.

Из вычислительной динамики [12] известно, что силы и моменты, обеспечивающие ограничения (1), имеют вид  $\mathbf{f}_c = \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda}$ , где  $\boldsymbol{\lambda}$  – вектор неизвестных множителей Лагранжа.

В случае контакта тел сила  $\mathbf{f}_c$  противодействует проникновению тел друг в друга, поэтому должно быть выполнено условие  $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$ . Перейдем от сил к импульсам, умножив силу  $\mathbf{f}_c$  на  $\Delta t$ . Тогда получим, что  $\mathbf{p}_c = \mathbf{f}_c \Delta t = \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda} \Delta t = \mathbf{J}^T \mathbf{p}$  и должно быть выполнено условие

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\lambda} \Delta t \geq \mathbf{0}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{p}$  – неизвестные значения величин импульсов.

Движение тел подчиняется дифференциальным уравнениям Ньютона – Эйлера, которые для пары тел можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{F},$$

где  $\mathbf{M} = \text{diag} \{m_1 \mathbf{E}_3, \mathbf{I}_1, m_2 \mathbf{E}_3, \mathbf{I}_2\}$  – диагональная матрица масс двух тел размерности 12 на 12;

$\mathbf{F}$  – сумма всех сил и моментов, действующих на рассматриваемую пару тел;

$\mathbf{E}_3$  – единичная матрица размерности 3 на 3.

Воспользуемся схемой Эйлера для интегрирования уравнений движения и перейдем от сил к импульсам. Тогда получим следующие соотношения:

$$\mathbf{V}(t + \Delta t) = \mathbf{V}(t) + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p}_c = \mathbf{V}(t) + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{p}. \quad (3)$$

Подставляя данное выражение в (1), получим матричное неравенство относительно неизвестных величин импульсов  $\mathbf{p}$ :

$$\mathbf{J}\mathbf{V}(t + \Delta t) = \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{b} \geq \mathbf{0}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{A} = \mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}^T$  – симметричная положительно полуопределенная матрица размерности  $N$  на  $N$  с компонентами  $a_{ij} = m_1^{-1} + m_2^{-1} + \mathbf{w}_{1i}^T \mathbf{I}_1^{-1} \mathbf{w}_{1j} + \mathbf{w}_{2i}^T \mathbf{I}_2^{-1} \mathbf{w}_{2j}$ ,  $i, j = \overline{1, N}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{J}\mathbf{V}(t)$ . Для диагональных элементов матрицы  $\mathbf{A}$  верно  $a_{ii} > 0$ , так как матрицы  $\mathbf{I}_k^{-1}$  положительно определенные.

Введем следующее обозначение  $\mathbf{z} = \mathbf{J}\mathbf{V}(t + \Delta t)$ . В силу того, что работа сил реакции связей на любом возможном перемещении равна нулю [13, § 253], можно показать [14], что, переходя от работы к мощности, будут выполнены следующие соотношения:

$$p_i z_i = 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (5)$$

Объединяя (1), (2), (4) и (5), получим задачу LCP (задача с линейными дополнениями) контакта двух тел:

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} \geq \mathbf{0}, \quad p_i z_i = 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (6)$$

В рамках данной задачи требуется определить  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{z}$ , удовлетворяющие условиям (6). Отметим, что в случае вырожденности матрицы  $\mathbf{A}$  система линейных уравнений  $\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$  относительно неизвестных значений  $\mathbf{p}$  может либо не иметь решение, либо иметь бесконечное множество решений. Если система уравнений не имеет решений, то это означает, что решение (6) должно содержать ненулевые  $z_i$ .

### Аналитический метод решения задачи LCP

Одним из методов решения задачи (6) является перебор всевозможных решений. Для размерности задачи  $N$  решением задачи (6) будет один из  $2^N$  возможных вариантов. Далее опишем подробно эти варианты в зависимости от  $N$  и приведем алгоритм их перебора.

При  $N = 1$  задача (6) примет скалярный вид  $z = ap + b$ ,  $p \geq 0$ ,  $z \geq 0$ ,  $pz = 0$ , где  $a > 0$ .

В этом случае возможны два решения. Если  $b \geq 0$ , то решением будет  $p = 0$  и  $z = b$ . В противном случае, решая уравнение  $ap + b = 0$ , получим пару  $p = -b/a > 0$  и  $z = 0$ .

При  $N = 2$  задача (6) может иметь четыре решения. Если  $b_1 \geq 0$  и  $b_2 \geq 0$ , то решением (6) будет  $p_1 = p_2 = 0$ ,  $z_1 = b_1$  и  $z_2 = b_2$ . Если выполнено условие  $b_1 < 0$ , то возможным решением (6) может быть  $p_1 > 0$  и  $p_2 = 0$ . Для существования такого решения должны быть выполнены условия  $z_1 = 0$  и  $z_2 \geq 0$ . Первое условие приводит к уравнению  $z_1 = a_{11}p_1 + a_{12} \cdot 0 + b_1 = 0$ , решением которого будет  $p_1 = -b_1/a_{11} > 0$ , так как  $b_1 < 0$  и  $a_{11} > 0$ . Если неравенство  $z_2 = a_{21}p_1 + a_{22} \cdot 0 + b_2 \geq 0$  относительно полученного  $p_1$  выполнено, то  $p_1 = -b_1/a_{11}$  и  $p_2 = 0$  является решением (6). Если  $b_2 < 0$ , то возможным решением (6) может быть  $p_1 = 0$  и  $p_2 > 0$ . Для существования такого решения должны быть выполнены условия  $z_1 \geq 0$  и  $z_2 = 0$ . Из (6), решая уравнение  $z_2 = a_{21} \cdot 0 + a_{22}p_2 + b_2 = 0$ , получим  $p_2 = -b_2/a_{22} > 0$ . Если неравенство  $z_1 = a_{11} \cdot 0 + a_{12}p_2 + b_1 \geq 0$  относительно полученного  $p_2$  выполнено, то  $p_1 = 0$  и  $p_2 = -b_2/a_{22}$  является решением.

Последний вариант решения  $p_1 > 0$  и  $p_2 > 0$  соответствует  $z_1 = z_2 = 0$ . В этом случае потребуется решать систему линейных уравнений:  $\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  от-

носителем неизвестных  $p_1$  и  $p_2$ . Эта система имеет единственное решение, если определитель матрицы  $\mathbf{A}$  не равен нулю, т. е. для полуопределенной матрицы должно быть выполнено условие  $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$ . Тогда, решая систему, получим  $p_1 = (-a_{22}b_1 + a_{12}b_2) / \det \mathbf{A}$  и  $p_2 = (a_{21}b_1 - a_{11}b_2) / \det \mathbf{A}$ . Вычисленные значения будут решением задачи (6), если будет выполнено  $p_1 \geq 0$  и  $p_2 \geq 0$ .

При произвольном  $N$  задача (6) может иметь один из  $2^N$  возможных решений. Эти решения мы классифицируем с помощью множества  $\mathbf{S} = \{S_k\}$ ,  $k = \overline{1, 2^N}$ , где случаи  $S_k$  упорядочены по возрастанию количества ненулевых  $\mathbf{p}$  так, что  $S_0$  соответствует решению с  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ , а  $S_{2^N}$  – решению с  $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ .

Каждому случаю  $S_k$  сопоставим вектор  $\mathbf{t}$  размерности  $N$  такой, что  $t_i = 1$  при  $p_i > 0$  и  $t_i = 0$  при  $p_i = 0$ , где  $i = \overline{1, N}$ .

Числа  $m$  и  $r$  определяют количество ненулевых и нулевых  $\mathbf{p}$  для случая  $S_k$ , где  $m + r = N$ .

Мы рассматриваем случай  $S_k$ , в котором  $m$  ненулевых и  $r$  нулевых значений  $\mathbf{p}$ . Для этого должно быть выполнено  $\mathbf{z}^m = \mathbf{0}$ , что приводит к системе уравнений относительно неизвестных  $\mathbf{p}^m$ :

$$\mathbf{A}^m \mathbf{p}^m + \mathbf{b}^m = \mathbf{0}, \quad (7)$$

где матрица  $\mathbf{A}^m$  и векторы  $\mathbf{z}^m$ ,  $\mathbf{p}^m$  и  $\mathbf{b}^m$  составлены из (6) по ненулевым значениям вектора  $\mathbf{t}$  для рассматриваемого случая  $S_k$ .

Эта система может иметь одно решение, бесконечное множество решений или не иметь решений. Предлагается сначала искать решение системы с равномерным распределением, т. е.  $p_i^m = p^*$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Рассмотрим первое уравнение системы (7). Для существования решения с

равномерным распределением должно быть выполнено условие  $\sum_{j=1}^m a_{1j}^m \neq 0$ . Тогда из первого

уравнения (7) получим  $p^* = p_i^m = -b_1^m / \sum_{j=1}^m a_{1j}^m$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Если будут выполнены условия

$(\sum_{j=1}^m a_{ij}^m) p^* + b_i^m = 0$ ,  $i = \overline{2, m}$ , то полученные значения  $p^*$  являются решением системы уравнений

(7). В противном случае решаем эту систему методом Гаусса. Так как  $a_{ii}^m > 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ , то систему можно привести к виду  $\mathbf{U}^m \mathbf{p}^m + \mathbf{y}^m = \mathbf{0}$ , где  $\mathbf{U}^m$  – верхнетреугольная матрица.

Если диагональные элементы матрицы  $\mathbf{U}^m$  не равны нулю, то полученная система имеет единственное решение. В противном случае система имеет бесконечное множество решений, либо не имеет решений. Тогда процедура поиска решения будет следующей. Для матрицы  $\mathbf{A}^m$  с рангом равном  $m - 1$  получим, что если  $u_{mm}^m = 0$  и  $y_m^m = 0$ , то в качестве  $p_m^m$  можно

выбрать любое решение, например,  $p_m^m = -b_m^m / \sum_{j=1}^m a_{mj}^m$ . В том случае, если  $u_{mm}^m = 0$  и  $y_m^m \neq 0$ , то

система не имеет решений. Если для найденного решения выполнены условия  $\mathbf{p}^m > \mathbf{0}$  и

$$\mathbf{z}^r = \mathbf{A}^r \mathbf{p}^m + \mathbf{b}^r = \mathbf{0}, \quad (8)$$

где матрица  $\mathbf{A}^r$  и векторы  $\mathbf{z}^r$ ,  $\mathbf{p}^r$  и  $\mathbf{b}^r$  составлены из (6) по нулевым значениям вектора  $\mathbf{t}$  для рассматриваемого случая  $S_k$ , то  $\mathbf{p}^m > \mathbf{0}$  и  $\mathbf{p}^r = \mathbf{0}$  являются решением задачи (6).

Опишем алгоритм перебора возможных вариантов решения задачи (6). Пусть есть некоторый случай  $S_k$  с вектором  $\mathbf{t}$  и числами  $m$  и  $r$ ,  $m + r = N$ . Решая систему уравнений (7) относительно  $\mathbf{p}^m$  и подставляя полученные значения в (8), вычисляем  $\mathbf{z}^r$ . Если окажется, что  $z_j^r < 0$ ,  $j = \overline{1, r}$ , то потенциальным решением для данного  $j$  может быть  $p_j^r > 0$ . Аналогично, если  $p_k^m < 0$ ,  $k = \overline{1, m}$ , то потенциальным решением может быть  $p_k^m = 0$  и  $z_k^m > 0$ . По изменениям вычисляем новый вектор  $\mathbf{t}$ , по которому определяем новый случай  $S_k$  из множества  $\mathbf{S}$ , а предыдущий случай исключается из рассмотрения. Если окажется, что новый случай уже обработан, то выбирается первый  $S_k$  во множестве  $\mathbf{S}$ .

Алгоритм реализации перебора возможных решений для решения задачи LCP вида (6) будет следующим:

1. Инициализация: имеем начальный случай  $S_k$ ,  $k = \overline{1, 2^N}$ , вектор  $\mathbf{t}$  и числа  $m$  и  $r$ .
2. Цикл, пока  $\mathbf{S} \neq \emptyset$ .
  - 2.1.  $\mathbf{S} = \mathbf{S} \setminus S_k$ ,  $\mathbf{t}' = \mathbf{t}$ ,  $m' = m$ ,  $r' = r$ .
  - 2.2. Решаем систему линейных уравнений:  $\mathbf{A}^m \mathbf{p}^m + \mathbf{b}^m = \mathbf{0}$ .
  - 2.3. Если система в п. 2.2 не имеет решений, то выбираем первый  $S_k$  во множестве  $\mathbf{S}$  и вычисляем  $\mathbf{t}$ ,  $m$  и  $r$ . Переходим к п. 2.1.
  - 2.4. Вычисляем  $\mathbf{z}^r = \mathbf{A}^r \mathbf{p}^m + \mathbf{b}^r$ ,  $\mathbf{p}^r = \mathbf{0}$ .
  - 2.5. Цикл по  $j \in \{j : t_j' = 1\}$ .
    - 2.5.1. Если  $p_j^m < 0$ , то  $t_j = 0$ ,  $m = m - 1$ ,  $r = r + 1$ .
  - 2.6. Цикл по  $j \in \{j : t_j' = 0\}$ .
    - 2.6.1. Если  $z_j^r < 0$ , то  $t_j = 1$ ,  $m = m + 1$ ,  $r = r - 1$ .
  - 2.7. Если  $m == m'$  и  $r == r'$ , то решение  $\mathbf{p}$  найдено, завершаем цикл.
  - 2.8. По полученному вектору  $\mathbf{t}$  определяем  $S_k'$ .
  - 2.9. Если  $S_k'$  есть во множестве  $\mathbf{S}$ , то  $S_k = S_k'$ . Переходим к п. 2.1.
  - 2.10. Выбираем первый  $S_k$  во множестве  $\mathbf{S}$ , вычисляем  $\mathbf{t}$ ,  $m$  и  $r$ .

3. Если решение не найдено, то:

$\mathbf{p} =$  **Проекционный метод Гаусса – Зейделя**( $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{p}^0$ ,  $K_{\max}$ ).

Если  $m \geq 2$ , то в п. 2.2 алгоритма требуется решать систему линейных уравнений. Согласно описанной ранее методологии сначала мы пытаемся определить решение с равномерным распределением, а уже затем решаем систему методом Гаусса с приведением ее к верхнему диагональному виду с учетом случая, когда система может иметь бесконечное множество решений. В случае отсутствия решения системы, согласно п. 2.3 алгоритма выбрать первый возможный вариант  $S_k$  из множества  $\mathbf{S}$ . На тот случай, если аналитическое решение задачи (8) не найдено, то в п. 2.10 алгоритма используется проекционный метод Гаусса – Зейделя [9, с. 102] с начальным приближением  $\mathbf{p}^0$  и максимальным количеством итераций  $K_{\max}$ .

### Метод последовательных импульсов

Для разрешения коллизий системы тел с помощью блочного подхода предлагается действовать ранее разработанный метод последовательных импульсов. Идея этого метода состоит в последовательной обработке ограничений относительно скоростей тел и вычислении импульсов, обеспечивающих эти ограничения. При этом соотношение для импульса текущего ограничения формулируется без учета влияния других ограничений, а переход к следующему ограничению осуществляется путем вычисления новых скоростей тел, для которых будет выполнено рассматриваемое ограничение. Следующее ограничение формулируется уже относительно новых скоростей.

Опишем основные положения метода последовательных импульсов с применением блочного подхода для разрешения коллизий тел. Пусть для текущего момента времени  $t$  имеем скорости тел  $\mathbf{V}(t)$  для некоторой пары тел системы. Задача состоит в том, чтобы определить новые скорости тел  $\mathbf{V}(t + \Delta t)$ , удовлетворяющие различным ограничениям. В методе последовательных импульсов мы обрабатываем каждую пару тел последовательно и формируем ограничения относительно промежуточных скоростей  $\mathbf{V}'(t + \Delta t)$ .

Рассмотрим  $s$ -ю итерацию метода последовательных импульсов и пару тел, находящихся в состоянии коллизии. Пусть  $\mathbf{p}^{(s-1)}$  – импульсы в задаче (6), вычисленные на предыдущей итерации. Сформулируем задачу (6) относительно новых импульсов  $\mathbf{p}^{(s)}$ . Для этого скорость ограничения  $\mathbf{J}\mathbf{V}(t + \Delta t)$  представим в следующем виде:

$$\mathbf{z}^{(s)} = \mathbf{J}\mathbf{V}(t + \Delta t) = \mathbf{A}(\mathbf{p}^{(s)} - \mathbf{p}^{(s-1)}) + \mathbf{J}\mathbf{V}'(t + \Delta t) = \mathbf{A}\mathbf{p}^{(s)} + \mathbf{J}\mathbf{V}'(t + \Delta t) - \mathbf{A}\mathbf{p}^{(s-1)}.$$

Тогда задача (6) примет вид:

$$\mathbf{z}^{(s)} = \mathbf{A}\mathbf{p}^{(s)} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{p}^{(s)} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{z}^{(s)} \geq \mathbf{0}, \quad p_i^{(s)} z_i^{(s)} = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad (9)$$

где  $\mathbf{b} = \mathbf{J}\mathbf{V}'(t + \Delta t) - \mathbf{A}\mathbf{p}^{(s-1)}$ .

Метод последовательных импульсов с применением блочного подхода состоит в следующем. Последовательно обрабатывая пары тел на  $s$ -й итерации мы решаем аналитически задачу (9). Для этого применяется описанный ранее алгоритм перебора с начальным случаем  $S_k$ , сформированный по предыдущему решению  $\mathbf{p}^{(s-1)}$ . После нахождения  $\mathbf{p}^{(s)}$  вычисляем  $\Delta\mathbf{p}^{(s)} = \mathbf{p}^{(s)} - \mathbf{p}^{(s-1)}$  и, согласно (3), определяем новые скорости следующим образом:

$$\mathbf{V}(t + \Delta t) = \mathbf{V}'(t + \Delta t) + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T \Delta\mathbf{p}^{(s)}.$$

Вычисленные скорости  $\mathbf{V}(t + \Delta t)$  и импульсы  $\mathbf{p}^{(s)}$  используются для учета трений скольжения, вращения и качения [4], которые далее обрабатываются последовательно. По общепринятой методике удар и контакт моделируются единым образом с добавлением в вектор  $\mathbf{b}$  составляющей удара  $-k_{vos} \cdot \mathbf{J}\mathbf{V}(t)$ , где  $k_{vos}$  – коэффициент восстановления при ударе.

После обработки текущей пары тел переходим к следующей, делая замену  $\mathbf{V}'(t + \Delta t) = \mathbf{V}(t + \Delta t)$ . Критериями окончания итерации метода последовательных импульсов является точность полученного решения  $\|\Delta\mathbf{p}^{(s)}\| \leq \varepsilon$  и превышение времени расчета  $t > t_{\max}$ , необходимое для обеспечения режима реального времени. Полученные решения  $\mathbf{p}^{(s)}$  контакта тел используются в качестве начального приближения для следующего шага моделирования.

### Результаты моделирования

Предложенные методы и алгоритмы разрешения коллизий виртуальных объектов с

применением блочного подхода были реализованы в имитационно-тренажерном комплексе, разработанном в ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН и предназначенном для моделирования виртуальных роботов. В рамках этого комплекса определение коллизий осуществляется с помощью аппроксимирующих контейнеров различного типа (боксов, сфер, цилиндров, капсул и т. д.), окружающих геометрию объектов. В случае пересечения объектов алгоритмы проверки возможных пар объектов реализованы таким образом, что возвращают параметры коллизий, включающие нормаль, точки и их глубины. С помощью специальных алгоритмов построения контактного многообразия количество возвращаемых точек сокращается до четырех.

Апробация предложенных в статье алгоритмов и методов была проведена на нескольких тестовых сценах, включающих статическое равновесие множества тел. Первая сцена представляет собой рассмотренный ранее пример (см. рис. 1) равновесия бокса на плоской поверхности. В этом случае контактная площадка содержит четыре точки. Решая задачу (9) для этого примера с помощью метода последовательных импульсов, получаем:  $p_i = \frac{1}{4} mg \Delta t$ ,  $i = \overline{1,4}$ . Вычисленные значения импульсов согласуются с теорией, состоящей в том, что сила реакции опоры при равновесии тела распределяется равномерно.

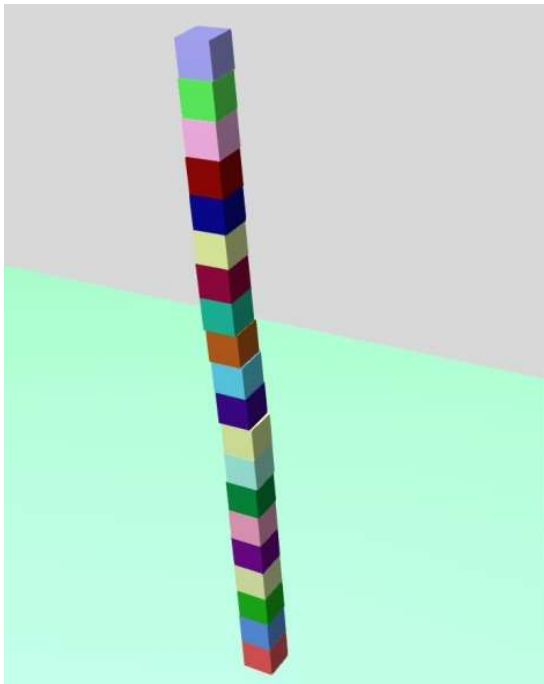


Рис. 3. Без применения блочного подхода

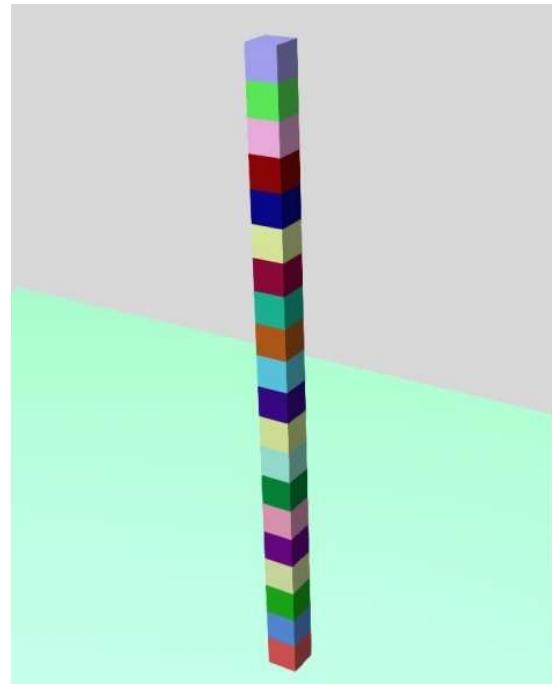


Рис. 4. С применением блочного подхода

Вторая тестовая сцена содержит 20 боксов, расположенных друг на друге. Для моделирования было взято 5 итераций метода последовательных импульсов. На этой сцене было выполнено сравнение двух подходов: без применения блочного подхода (рис. 3) и с применением (рис. 4). Без применения блочного подхода стопка боксов стремится отклониться от вертикального положения, в то время как блочный подход не обладает этой проблемой. Полученные результаты показывают, что блочный подход позволяет получить за малое количество итераций более точное решение в отличие от последовательной обработки.

В качестве третьей сцены была рассмотрена стенка из 120 боксов, выстроенная в виде пирамиды (рис. 5). Моделирование с применением блочного подхода позволяет обеспечить сходимость метода последовательных импульсов так, что обеспечивается равновесие стенки. Это имеет преимущество по сравнению с другими подходами, в которых из-за нехватки итераций возникают эффекты «дрожания» и «пошатывания» стенки.

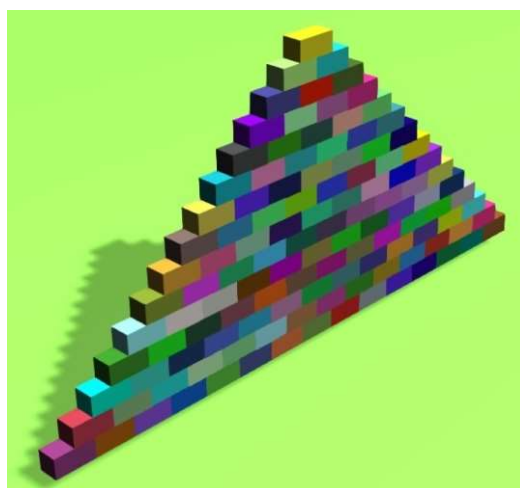


Рис. 5. Пирамида из 120 боксов

В последней виртуальной сцене был рассмотрен робот-кентавр (антропоморфный робот, установленный на подвижную платформу), находящийся внутри ангара (рис. 6). В этой сцене были протестированы захват и удержание коробки с помощью рук робота-кентавра. Полученные результаты показывают, что с применением блочного подхода удается реализовать операции захвата больших предметов.



Рис. 6. Захват коробки роботом-кентавром

Результаты апробации показали, что предложенные методы и подходы для разрешения коллизий объектов позволяют в режиме реального времени моделировать с необходимым качеством сложные динамические ситуации с равновесием покоящихся друг на друге тел.

**Заключение.** Предложенные в статье методы и алгоритмы для разрешения коллизий виртуальных объектов с применением блочного подхода устраняют недостатки итерационных методов. Локализация задачи контакта двух тел, с одной стороны, улучшает сходимость методов, а с другой стороны, повышает качество моделирования в сложных динамических ситуациях. В дальнейшем ожидается, что предложенные в данной работе подходы позволят реализовать захват мелких и сложной формы предметов с помощью пальцев антропоморфного робота.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-07-00137.

### Литература

1. Ericson C. Real-time collision detection. CRC Press, 2004. 594 p.
2. Coutinho M. G. Guide to dynamic simulations of rigid bodies and particle systems. London : Springer, 2013. 399 p.
3. Kavan L. Rigid body collision response. Faculty of mathematics and physics Charles University of Prague, 2003.
4. Трушин А. М. Обработка коллизий виртуальных объектов с помощью метода последовательных импульсов // Тр. НИИСИ РАН. 2014. Т. 4. № 2. С. 95–105.
5. Moravanszky A., Terdiman P. Fast contact reduction for dynamics simulation // Game Programming Gems. Charles River Media. 2004. № 4. P. 253–263.
6. Murty K. G. Linear complementarity, linear and nonlinear programming. Berlin, Germany : Helderman-Verlag, 1988.
7. Baraff D. Fast contact force computation for nonpenetrating rigid bodies // Proceedings of SIGGRAPH, 1994.
8. Cline M. Rigid body simulation with contact and constraints : Master's thesis. University of British Columbia. July, 2002.
9. Stepien J. Physics-based animation of articulated rigid body systems for virtual environments. Gliwice, 2013.
10. Catto E. Iterative dynamics with temporal coherence // Game Developer Conference, 2005. P. 1–24.
11. Михайлюк М. В., Страшнов Е. В. Моделирование системы связанных тел методом последовательных импульсов // Тр. НИИСИ РАН. 2014. Т. 4. № 2. С. 52–60.
12. Shabana A. A. Computational Dynamics. Third ed. John Wiley & Sons Inc, 2010.
13. Валле-Пуссен Ш.-Ж. Лекции по теоретической механике ; в 2 т. М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948–1949.
14. Михайлюк М. В., Страшнов Е. В. Моделирование ограничений на относительное движение шарнирно связанных тел // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16. № 10. С. 678–685.