

УДК 519.218:519.872

УСКОРЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПОТЕРЬ В ФРАКТАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ОЧЕРЕДЯМИ

В. Н. Задорожный, Т. Р. Захаренкова

*Омский государственный технический университет
zwn2015@yandex.ru, ZakharenkovaTatiana@gmail.com*

Разработан эффективный метод расчета вероятностей потерь в системах с очередями, выполнен анализ точности метода и достигаемого по сравнению с непосредственным моделированием ускорения. Метод используется для анализа систем со степенными распределениями, распространенных в качестве моделей сетевых устройств современных компьютерных сетей. Установлен вид зависимости в этих системах вероятности потерь от размера буфера. Исследуется влияние на эту зависимость, оказываемое тяжестью хвостов степенных распределений и числом каналов в системах. На практике полученные результаты могут использоваться для решения инженерных задач анализа и проектирования современных компьютерных сетей, функционирующих в условиях фрактального трафика.

Ключевые слова: системы с очередями, фрактальный трафик, регенеративное моделирование, ускоренные методы Монте-Карло.

RAPID METHOD FOR CALCULATION OF LOSS PROBABILITIES IN FRACTAL QUEUEING SYSTEMS

V. N. Zadorozhnyi, T. R. Zakharenkova

*Omsk State Technical University
zwn2015@yandex.ru, ZakharenkovaTatiana@gmail.com*

An effective method for loss probabilities calculation in queueing systems is developed. An analysis of accuracy and acceleration achieved in comparison with direct simulation is made. The method is used to analyze the queueing systems with power-series distributions which are widely used as models of network devices of modern computer networks. A dependence of loss probability on a buffer capacity in considered systems is established. The influence on this dependence by the heaviness of tails of power-series distributions and by the channel number is investigated. The obtained results can be used for solving engineering problems of analysis and design of modern computer networks operating under the fractal traffic.

Keywords: queueing systems, fractal traffic, regenerative modeling, rapid Monte Carlo methods.

Для описания и анализа фрактального (самоподобного) трафика применяются такие математические понятия, как самоподобный случайный процесс, *долговременная зависимость* (ДВЗ), *распределения с тяжелыми хвостами* (РТХ) [1–2]. При проектировании сетевых устройств на системном уровне подходящими математическими моделями являются системы с очередями [3–4]. Стоит отметить, что есть разные определения самоподобного трафика, часто связанные с геометрическими свойствами траекторий, описывающих количество прибытий на разных временных масштабах [1]. В этой работе внимание фокусируется на точечных процессах, и понятие самоподобия связывается с масштабной инвариантностью и степенными законами [5]. Исходя из этого, далее фрактальными системами с очередями будем называть такие системы класса $GI/GI/n/m$ [3], в которых интервалы τ_i поступления заявок и/или длительности x_i их обслуживания описываются асимптотически степенными распределениями –

подклассом РТХ. Часто используются такие распределения, которые характеризуются конечным *математическим ожиданием* (м. о.) и бесконечной дисперсией. Популярно, например, распределение Парето, задаваемое *функцией распределения* (ф.р.) $F(t) = 1 - (K/t)^\alpha$ на интервале $t \geq K$ (и $F(t) = 0$ при $t \leq K$). Здесь $K > 0$ – масштабный коэффициент, $\alpha > 0$ – параметр формы. При $1 < \alpha \leq 2$ получаем конечное м. о. и бесконечную дисперсию.

Коэффициент ρ загрузки рассматриваемых систем GI/GI/n/m меньше единицы: $\rho = \bar{x}/(n\bar{t}) < 1$, где $\bar{x}$ – это м.о. *случайной величины* (с. в.) x , т. е. среднее время обслуживания, $\bar{t}$ – среднее время между приходами заявок, n – число каналов в системе.

Типичными представителями фрактальных систем с очередями являются системы Pa/M/n/m, M/Pa/n/m и Pa/Pa/n/m. Здесь символом Pa обозначено распределение Парето (символ M, как обычно, соответствует показательному распределению). Размер m буфера будем считать конечным. Актуальной задачей расчета фрактальной системы является определение вероятности P потери заявки (вероятности отказа). Заявка теряется, если в момент ее поступления буфер заполнен, т. е. для заявки нет места в очереди. Для проектирования узлов современных компьютерных сетей актуальна также задача определения такого m , при котором вероятность P будет не больше заданной.

В общем случае решение поставленных задач аналитическими методами крайне затруднительно, поэтому они решаются, как правило, с помощью *имитационного моделирования* (ИМ).

Однако особенности рассматриваемых здесь фрактальных систем приводят при моделировании к ряду серьезных проблем, без учета и решения которых результаты моделирования будут содержать грубые или принципиальные ошибки. К числу таких проблем относятся:

1. Проблема смещения моментов (математических ожиданий) РТХ, реализуемых обычными методами, принятыми в моделировании, которая исследуется и решается, например, в [6–7]. В [7] она решается путем разработки специального вида *генератора стандартных псевдослучайных чисел* (ГСПЧ).

2. Проблема ДВЗ, которая состоит в том, что ДВЗ приводят к снижению скорости сходимости оценок с ростом числа N реализаций исследуемой с. в. (например, длины очереди). Доверительный интервал оценки средней длины очереди становится пропорционален не $N^{-1/2}$, как это бывает при моделировании обычных систем, а, например, величине $N^{-1/13}$ [8]. В рассматриваемых фрактальных системах ДВЗ возникают, например, между числами прибытий на последовательных интервалах времени равной длины при паретовском входящем потоке, а также между наблюдаемыми значениями длины очереди. Одним из путей решения этой проблемы является использование большого числа так называемых параллельных прогонов.

3. Проблема длительных переходных процессов, которая состоит в том, что их длительность при моделировании фрактальных систем на порядки больше, чем при моделировании обычных систем. Это затрудняет расчет стационарных характеристик фрактальных систем.

Одним из путей одновременного решения проблемы ДВЗ и проблемы длительных переходных процессов является использование регенеративного моделирования [9–11].

Основной идеей регенеративного моделирования является разбиение сбора статистической информации о моделируемом процессе на части, соответствующие *периодам регенерации* (ПР) этого процесса. В системах с очередями ПР начинается в момент прихода заявки в пустую систему и заканчивается в следующий момент прихода заявки в пустую систему. ПР начинается *периодом непрерывной занятости* (ПНЗ) системы, после которого следует период простоя, т. е. период, в течение которого пустая система ожидает поступления очередной заявки. Когда такая заявка поступает, текущий ПР заканчивается и начинается следующий ПР.

Процессы, происходящие в пределах какого-либо ПР, не зависят от процессов, происходящих в пределах любого другого ПР. Поэтому, например, разбиение суммарного числа отказов N_i , накапливаемого для расчета вероятности отказа P , на слагаемые, соответствующие

отдельным ПР, делает N_i суммой независимых одинаково распределенных величин. Тем самым решается проблема ДВЗ (исчезает любая зависимость) и процесс с самого начала становится стационарным (исчезает переходный процесс).

Вместе с регенеративным моделированием в разрабатываемом далее ускоренном методе используется расчет не самих независимых слагаемых величины N_i , а их оценок, которые позволяют за один прогон модели рассчитывать вероятность отказа сразу для выбранного диапазона размеров m буфера. Это позволяет эффективно решать задачу определения размера m по заданной вероятности потерь P . Кроме того, это используется далее для исследования зависимости $P(m)$ в различных видах фрактальных систем.

1. Ускоренный метод расчета вероятности отказа

Предлагаемый метод основан на асимптотическом соотношении, найденном и обоснованном в [12] профессором О. И. Кутузовым. При малых P число отказов N_i , которые произойдут за время данного i -го ПНЗ системы с *бесконечным буфером* (ББ), если его заменить *конечным буфером* (КБ) объема m , можно определять, не моделируя систему с КБ, по формуле

$$N_i \sim \max \{Q_{\max} - m, 0\}, \quad (1)$$

где $Q_{\max}$ – максимальная длина очереди, достигаемая на этом ПНЗ при бесконечном буфере. Формула является приближенной, но ее относительная погрешность сходится к нулю с уменьшением вероятности P . Уже при значениях P порядка 0,01 относительная погрешность формулы (1) лежит в пределах 1–3 %. Теперь заметим, что эта формула позволяет по одному прогону модели с ББ рассчитать общее число отказов сразу для многих значений m и получить соответствующие оценки для $P = P(m)$. Для этого достаточно, используя найденную при моделировании последовательность $Q_{\max}$, подставить в (1) соответствующие значения m . Использование этой идеи позволяет на один-три порядка сократить затраты машинного времени на анализ зависимости $P(m)$.

Основанный на этой идее ускоренный метод расчета вероятностей отказа реализован в виде программы Metod_AIM. Программа Metod_AIM в результате одного прогона модели с ББ формирует массив значений $Q_{\max}$, полученных во всех пройденных ПНЗ, и массив значений P , рассчитанных по формуле (1) для всего заданного диапазона значений m .

В программе используется ГСПЧ, разработанный в [7] и обеспечивающий несмещенность моментов реализуемых РТХ. Для обеспечения достаточно большой длины периода этот ГСПЧ использует генератор «Вихрь Мерсенна» (период повторения последовательности псевдослучайных чисел получается равным приблизительно 10^{6000}).

Результаты выполнения программы Metod_AIM (массивы) можно импортировать в Excel, чтобы выполнять дополнительные расчеты, строить различного вида диаграммы, находить уравнения регрессии («линии тренда») и т. д.

2. Проверка точности ускоренного метода

Широко известной (традиционной) оценкой для P , получаемой путем моделирования системы с ББ, является вероятность q_m того, что длина очереди (в системе с ББ) превысит m . При проверке точности разработанного ускоренного метода выполнялось также сравнение точности оценки (1) с точностью традиционной оценки.

С целью проверки точности целесообразно сравнить решение, получаемое с помощью программы Metod_AIM, с точно известным решением. Поэтому для проверки точности решалась задача расчета вероятности потерь в системе М/М/н/м – единственной системе в классе

GI/GI/n/m, для которой известно точное решение. На рис. 1 показаны результаты расчета зависимости $P(m)$ в системе M/M/1/m с коэффициентом загрузки $\rho = 0,8$.

Точное решение определено расчетом P по известной для систем M/M/1/m формуле

$$P = \rho^{m+1} \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}. \quad (2)$$

Точное решение изображено на рис. 1 кривой 1. Кривая 2 – это решение, полученное программой Metod_AIM. Решение, полученное применением традиционной оценки (кривая 3), рассчитано без моделирования системы с ББ. Вероятность q_m того, что длина l очереди будет больше, чем m , найдена как сумма известных вероятностей состояний системы M/M/1/m:

$$q_m = P(l > m) = \sum_{k=m+1}^{\infty} p_k = \sum_{k=m+1}^{\infty} (1-\rho)\rho^k = \rho^{m+1}, \quad (3)$$

где p_k – вероятность того, что в системе находится k заявок.

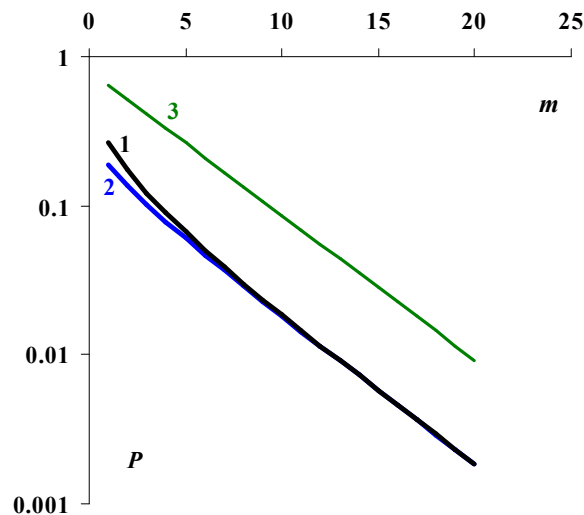


Рис. 1. Результаты проверки точности ускоренного метода:

кривая 1 – точная зависимость $P(m)$ в системе M/M/1/m с коэффициентом загрузки 0,8;

кривая 2 – зависимость, полученная выполнением программы Metod_AIM;

кривая 3 – зависимость, полученная применением традиционной оценки

Аналогично выглядят результаты расчета зависимости $P(m)$ в системах M/M/2/m и M/M/3/m с коэффициентом загрузки 0,8. Результаты расчета системы M/M/3/m представлены на рис. 2.

Для расчета вероятности P в системах M/M/n/m при $n > 1$ использовалась известная формула:

$$P = \rho^{m+n} \frac{n^n}{n!} \pi_0, \quad (4)$$

$$\text{где } \pi_0 = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^j}{j!} + \frac{(n\rho)^n}{n!} \cdot \frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho} \right]^{-1}.$$

Вероятности p_k состояний в соответствующих системах с ББ, в которых используется традиционная оценка (т. е. в системах М/М/н/∞) определялись по формулам [3]:

$$p_k = \begin{cases} p_0 \frac{(n\rho)^k}{k!}, & k \leq n, \\ p_0 \frac{\rho^k n^n}{n!}, & k \geq n, \end{cases} \quad (5)$$

где $p_0 = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^j}{j!} + \frac{(n\rho)^n}{n!} \cdot \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1}$.

Соответственно, для расчета традиционной оценки q_m при $m \geq n$ получаем формулу:

$$q_m = P(l > m) = \sum_{k=m+1}^{\infty} p_k = \sum_{k=m+1}^{\infty} p_0 \frac{n^n}{n!} \rho^k = p_0 \frac{n^n}{n!} \frac{\rho^{m+1}}{1-\rho}. \quad (6)$$

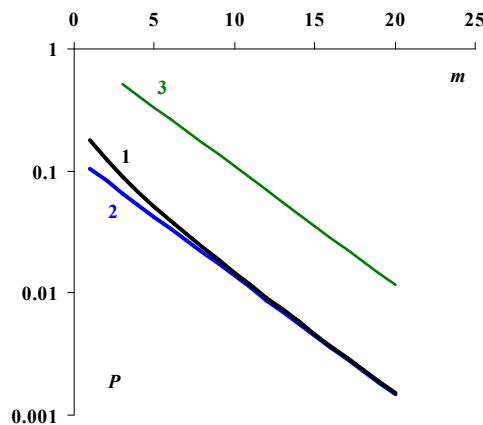


Рис. 2. Результаты расчета разными методами системы М/М/3/м с $\rho = 0,8$ (обознач. см. на рис. 1)

Выполненная проверка позволяет сделать вывод, что, во-первых, точность разработанного ускоренного метода является достаточной, во-вторых, применение оценки (1) вместо традиционной оценки является обоснованным. Эта проверка позволяет также составить представление о том, как быстро с убыванием P относительная погрешность расчета P этим методом сходится к нулю.

Далее естественно воспользоваться разработанным методом для исследования фрактальных систем, для расчета P в которых аналитические выражения отсутствуют, а расчет зависимостей $P(m)$ непосредственным моделированием слишком трудоемок.

3. Расчет фрактальных систем М/Рa/н/м

Рассмотрим результаты расчета одноканальной системы М/Рa/1/м, параметры которой определены следующим образом: $\bar{\tau} = 10$, $K = 1$, $\alpha = 1.25$. В этой системе среднее значение распределенного по закону Парето времени обслуживания конечно: $\bar{x} = K\alpha / (\alpha - 1) = 5$, дисперсия времени обслуживания бесконечна и коэффициент загрузки системы $\rho = \bar{x} / \bar{\tau} = 0.5$. Для размера m буфера выбран диапазон от 1 до 100. Пятикратный прогон программы Metod_AIM по

500 000 ПНЗ дает 5 траекторий – оценок зависимости $P(m)$ (рис. 3), м. о. которых является интересующей нас точной зависимостью. При этом, говоря «точная зависимость», мы учитываем, что ее точность ограничена той небольшой погрешностью оценки (1), которой при малых P мы пренебрегаем.

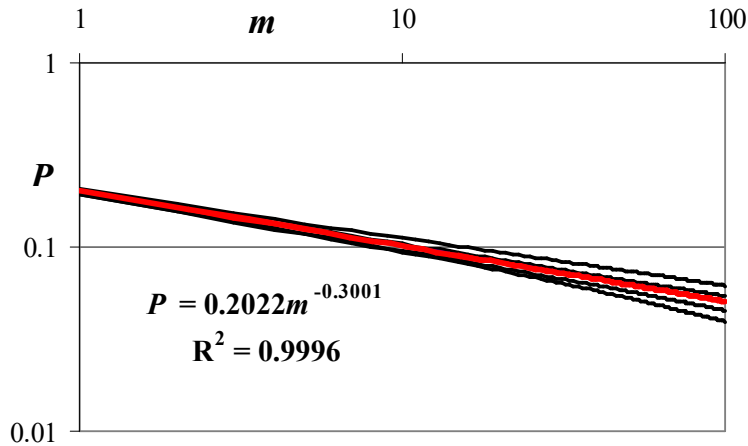


Рис. 3. Пять траекторий, полученных при пятикратном прогоне программы Metod_AIM, усредненная оценка для $P(m)$ (по центру) и уравнение регрессии с коэффициентом его достоверности R^2

Показанное на рис. 3 уравнение регрессии можно использовать для решения задачи определения m , обеспечивающего требуемую вероятность потерь P . Имея уравнение $P = 0,2022m^{-0.3001}$, мы получаем, решая его относительно m , выражение:

$$m = \left(\frac{P}{0,2002} \right)^{-\frac{1}{0,3001}} = 4,995P^{-3.332}, \quad (7)$$

которое можно использовать для оценки размера m буфера, обеспечивающего заданную вероятность потерь P , не прибегая к моделированию. Например, задавая $P = 10^{-6}$, мы получаем из (7), что для обеспечения такой P требуется буфер размера $m \approx 5 \cdot 10^{17}$. Разумеется, буфер подобного размера технически нереализуем, а если бы и был реализуем, то задержки заявок в таком буфере были бы безумно велики. Заметим, что при пуассоновском входящем потоке с той же интенсивностью, как следует из (2), достаточен буфер размера $m = 18$.

Этот пример показывает, что в общем случае при фрактальном трафике стратегия обеспечения малой вероятности потерь путем увеличения размера буфера может быть бесперспективной. Фрактальную систему, в которой обратная зависимость $m(P)$, подобно зависимости (7), делает стратегию увеличения буфера технически бесперспективной, далее будем называть жесткой системой. Чем медленнее убывает вероятность P с ростом m , тем система жестче. Высокая жесткость рассмотренной системы $M/Pa/1/m$ обусловлена близостью ее параметра α к нижней границе диапазона $1 < \alpha \leq 2$. Параметр α определяется трафиком, поэтому его называют также параметром трафика.

В отношении предлагаемого ускоренного метода заметим, что возможность построения надежных уравнений регрессии, основанных на большом числе точек траекторий, и их использования для оценки зависимостей $P(m)$ при малых порядках $P = 10^{-6}$ вероятностях решает в рамках рассматриваемой задачи классическую для моделирования проблему оценки малых вероятностей.

Перейдем теперь к системам $M/Pa/n/m$ при $n > 1$.

На рис. 4 показаны шесть траекторий $P(m)$, полученных для системы М/Ра/3/ m , и уравнение регрессии. По-прежнему хорошей аппроксимацией зависимости $P(m)$ является степенное уравнение. Увеличение числа каналов в системе привело к увеличению абсолютной величины показателя степени, уравнение регрессии приняло вид $P = 0,0309m^{-0.5651}$, и решением задачи о буфере стал его размер $m(P) = m(10^{-6}) \approx 8,8 \cdot 10^7$. Размер буфера уменьшился на десять порядков.

Рассчитанная на рис. 4 система М/Ра/3/ m сопоставима с исследованной выше одноканальной системой М/Ра/1/ m . Здесь $\bar{\tau} = 10$, $K = 3$, $\alpha = 1,25$, т. е. параметр формы распределения Парето не изменился. Произошло лишь масштабное преобразование времени обслуживания, и среднее значение этого времени стало равным $\bar{x} = K\alpha/(\alpha - 1) = 15$. Благодаря этому коэффициент загрузки $\rho = (\bar{x} / \bar{\tau}) / n$ остался равным 0,5.

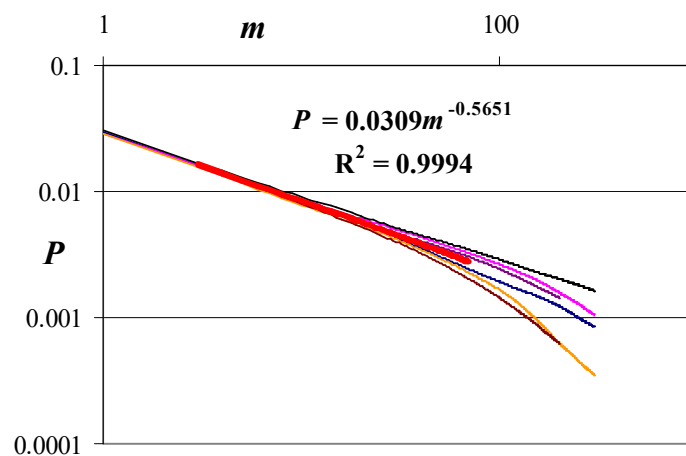


Рис. 4. Траектории $P(m)$ и уравнение регрессии для системы М/Ра/3/ m

Таким образом, выполненный с помощью разработанного ускоренного метода приближенный анализ моделей М/Ра/ n / m приводит к следующему заключению: в условиях жесткого фрактального трафика, когда его параметр α близок к единице (на практике он ограничивается снизу значением $\alpha = 1,2$), стратегия обеспечения малой вероятности потерь за счет увеличения только объема буфера одноканальной системы становится бесперспективной. Более реалистичной она становится в сочетании со стратегией увеличения числа каналов в системе.

4. Влияние параметра формы α

Для оценки влияния параметра α на ресурсы, необходимые для обеспечения низкой вероятности потерь, его значение 1,25 можно заменить менее жестким значением 1,75. При этом для сохранения коэффициента загрузки $\rho = 0,5$ в системе М/Ра/1/ m значение масштабного коэффициента $K = 1$ следует заменить значением $K = 15/7$ и, соответственно, в системе М/Ра/3/ m значение $K = 3$ – значением $K = 45/7$. В результате прогона программы Metod_AIM для этих систем получаются следующие результаты, существенно отличающиеся от предыдущих.

Теперь чтобы обеспечить в системе М/Ра/1/ m вероятность потерь, равную 10^{-6} , требуется буфер размера $m \approx 700\,000$. Это в определенных условиях может быть вполне приемлемым для сетевых устройств решением.

В системе М/Ра/3/ m для решения той же задачи теперь требуется буфер размера $m \approx 400$.

Сравнивая полученные решения с предыдущими, нетрудно заметить, что у многока-

нальной системы характеристика $t(P)$ значительно менее чувствительна к изменениям параметра α , чем у одноканальной системы.

5. Другие фрактальные системы

Чтобы лучше понимать степень общности тех или иных результатов, имеет смысл проверять их на различных фрактальных системах, которые могут рассматриваться как различные модели проектируемых сетевых устройств.

С помощью разработанного ускоренного метода можно увидеть, например, что в системах $Pa/Pa/n/m$ с ростом n подходящая степенная аппроксимация зависимости $P(m)$ быстро переходит в более подходящую экспоненциальную (в отличие от систем $M/Pa/n/m$). В качестве иллюстрации на рис. 5 показан усредненный результат пятикратного прогона программы Metod_AIM для системы $Pa/Pa/5/m$, заданной следующими параметрами:

$K_1 = 10/3$, $\alpha_1 = 1.5$ (параметры с.в. τ);

$K_2 = 75/7$, $\alpha_2 = 1.75$ (параметры с.в. x).

В этой системе $\bar{\tau} = 10$, $\bar{x} = 25$, $\rho = 0,5$.

На рис. 5 логарифмический масштаб используется только по оси ординат. Прямолинейный вид графика (асимптотически прямолинейный) в такой системе координат свидетельствует об экспоненциальном (асимптотически экспоненциальном) виде изображаемой графиком зависимости.

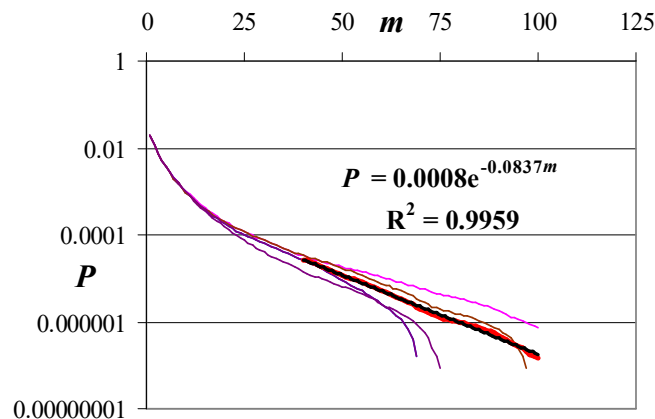


Рис. 5. Асимптотически-экспоненциальная зависимость $P(m)$ в системе $Pa/Pa/5/m$

А в системах $Pa/M/n/m$ характеристика $P(m)$ похожа на экспоненциальную функцию при любом $n \geq 1$. На рис. 6 представлены результаты пяти прогонов программы Metod_AIM для системы $Pa/M/1/m$, сопоставимой с предыдущими системами по загрузке и параметру формы.

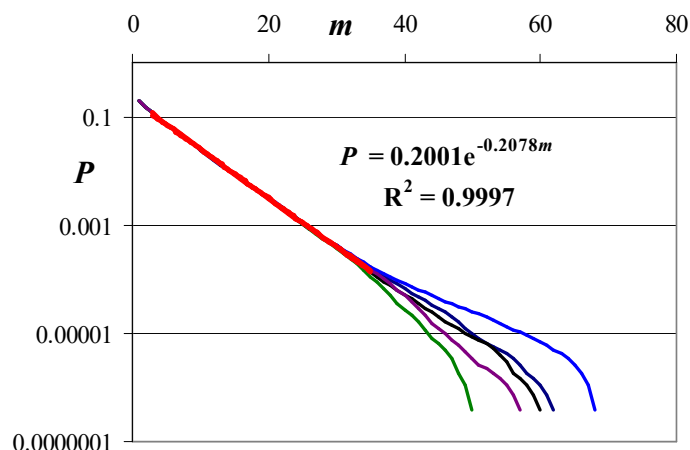


Рис. 6. Экспоненциальная зависимость $P(m)$ в системе $\text{Pa}/\text{M}/1/m$

Параметры системы имеют следующие значения: $K = 2$, $\alpha = 1,25$, $\bar{x} = 5$. В этой системе $\bar{\tau} = 10$, $\rho = 0,5$.

6. Предварительная оценка точности и коэффициента ускорения метода при моделировании фрактальных систем

Оценку точности разработанного метода, выполненную в разд. 2 на примере экспоненциальных систем, нельзя механически распространять на фрактальные системы, в формирование характеристик которых вносят вклад последовательности случайных величин с бесконечными дисперсиями. Для фрактальных систем необходимо выполнить дополнительную проверку точности ускоренного метода. Используем для такой проверки систему $\text{M}/\text{Pa}/1/m$, рассмотренную в разд. 3 – наиболее жесткую из рассчитанных в статье систем. На рис. 7 красная прямая линия (расположенная между двумя другими сплошными линиями) является графиком усредненной траектории $P(m)$ для указанной системы. Этот график визуальнo совпадает с линией тренда, уравнение которой также представлено на рисунке (эти данные имеются и на рис. 3). На получение сотни точек этой траектории ускоренным методом потребовалось 20 мин времени персонального компьютера. Усреднялись 5 траекторий, полученных по 500 000 ПНЗ. Для предварительной оценки точности и коэффициента ускорения разработанного метода выполнено непосредственное моделирование системы при $m \in \{1, 25, 50, 75, 100\}$. Для каждого из этих m выполнено по пять прогонов длиной в 500 000 ПНЗ. Полученные при каждом из перечисленных m значения P отмечены на рис. 7 пятью маркерами разной формы.

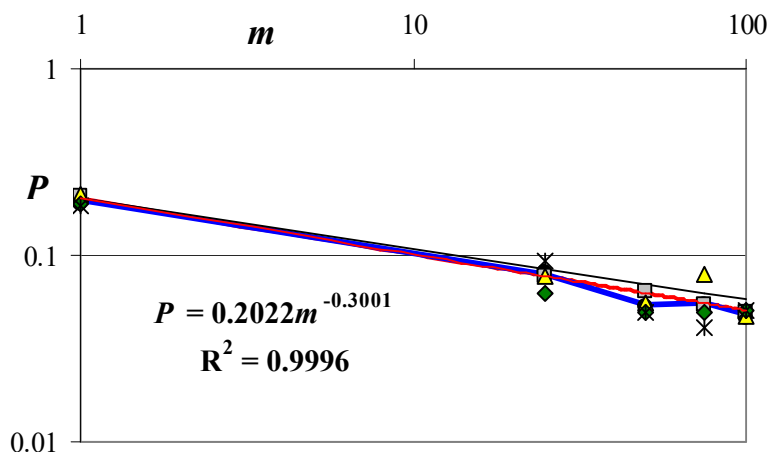


Рис. 7. Сравнение результатов расчета системы $\text{M}/\text{Pa}/1/m$, полученных ускоренным методом и непосредственным ИМ

Расположение маркеров на рисунке подтверждает правильность траектории, найденной ускоренным методом. Синяя «провисающая вниз» линия на графике проведена через усредненные для каждого m результаты непосредственного ИМ.

На каждый результат-маркер затрачено 6 с компьютерного времени, на одну точку усредненной траектории – 30 с. На 100 точек усредненной траектории потребовалось бы 3 000 с, т. е. 50 мин. Это незначительно – в два с половиной раза, превышает время, потраченное ускоренным методом. Однако как видно из рис. 7, при непосредственном ИМ системы будет при этом получена траектория с большими стохастическими возмущениями. При сопоставимых затратах времени ускоренный метод демонстрирует значительно более высокую точность.

Верхняя сплошная тонкая линия на рис. 7 проведена через три точки $P(m)$, рассчитанные при $m = 1$, $m = 75$ и $m = 100$ путем непосредственного ИМ с длиной прогона 50 млн ПНЗ. В каждой точке усреднялись результаты пяти таких длинных прогонов. Эти усредненные результаты уже могут конкурировать по точности с результатами ускоренного метода. Время компьютера, затраченное на одну усредненную точку, составляет 50 мин. На 100 точек требуется 5 000 мин, т. е. в 250 раз больше, чем при использовании ускоренного метода. Таким образом, выполненная предварительная оценка разработанного метода позволяет рассчитывать, что при моделировании фрактальных систем метод позволяет достичь заданной точности результатов на два-три порядка быстрее, чем непосредственное ИМ.

Заключение. Авторами разработан и обоснован ускоренный метод для расчета вероятности P потери заявок в системах с очередями. Метод можно применять для расчета систем GI/GI/n/m различного вида, в том числе – фрактальных систем, которые широко распространены как модели устройств современных компьютерных сетей, функционирующих в условиях фрактального трафика. Существенной частью приведенного в статье определения фрактальной системы является использование в ее описании степенных распределений с конечными математическими ожиданиями и бесконечными дисперсиями.

Возможности предложенного ускоренного метода протестированы на системах M/M/n/m и использованы для демонстрационного исследования некоторых фрактальных систем, в отношении которых выполнен анализ зависимостей $P(m)$ вероятности потери заявки от размера m буфера.

Установлено, что в системах M/Pa/1/m и Pa/Pa/1/m (где Pa – символ распределения Парето) зависимость $P(m)$ близка к степенной. Выявлено, что с увеличением числа n каналов в системах Pa/Pa/n/m степенная зависимость $P(m)$ переходит в близкую к экспоненциальной. Это позволяет за счет увеличения числа каналов в системах Pa/Pa/n/m кардинально снижать вероятность потерь и ее зависимость от таких нестабильных факторов фрактального трафика, как параметр формы α .

Предварительная оценка точности и коэффициента ускорения, достигаемых разработанным методом при расчете фрактальных систем, показала, что он позволяет достичь заданной точности результатов на два-три порядка быстрее, чем непосредственное имитационное моделирование.

В общем случае получаемые с помощью разработанного метода численные результаты с их содержательным анализом могут быть использованы в практике проектирования сетевых устройств и в других приложениях, критичных к потерям обслуживаемых заявок. Эти результаты дают также исходный материал для исследования характеристики $P(m)$ строгими математическими методами. Разработанный метод может быть использован и для проверки соответствующих аналитических результатов.

Литература

1. Leland W. E., Taqqu M. S., Willinger W., Wilson D.V. On the Self-Similar Nature of Ethernet Traffic // IEEE/ACM transactions on networking. 1994. V. 2. № 1. February. P. 1–15.
2. Crovella M. E., Taqqu M., Bestavros A. Heavy Tailed-Probability distributions in the World Wide Web // A Practical Guide to Heavy Tails: Statistical techniques and Applications, 1998. P. 3–25.
3. Kleinrock L. Queueing Systems. Computer Applications. New York : Wiley Interscience, 1976. V. II. 576 p.
4. Zwart A. P. Queueing Systems with Heavy Tails. Eindhoven University of Technology, 2001. 227 p.
5. Mandelbrot B. The fractal geometry of nature. New York : W. H. Freeman and Co., 1982. 480 p.
6. Zadorozhnyi V. N. Cascade Method of Realization of Heavy-Tailed Distributions // Data Network Modelling, International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON) : conference proceeding, 21–23 May 2015, Omsk State Technical University. Omsk, ; IEEE Inc., 2015. P. 1–4.
7. Zadorozhnyi V. N. Peculiarities and Methods of Fractal Queues Simulation // International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON) : conference proceeding, 12–14 May 2016, Moscow, Russia, 2016. IEEE Inc., 2016. P. 1–5.
8. Zadorozhnyi V. N., Zakharenkova T. R. Methods of Simulation Queueing Systems with Heavy Tails // Communications in Computer and Information Science. 2016. V. 638. P. 382–396.
9. Glynn P. W., Iglehart D. L. Conditions for the applicability of the regenerative method // Management Science. 1993. V. 39. P. 1108–1111.
10. Bratley P., Fox B. L. A guide to simulation. New York : Springer-Verlag, 1987.
11. Morozov E. Weak regeneration in modeling of queueing processes // Queueing Systems. 2004. № 46. P. 295–315.
12. Кутузов О. И., Задорожный В. Н., Олзоева С. И. Имитационное моделирование сетей массового обслуживания. Улан-Удэ : Изд-во ВСГТУ, 2001. 228 с.