УДК 519.713

НЕПРЕДСТАВИМОСТЬ ОРДИНАЛЬНОГО ЧИСЛА ω В ЦИФРОВОМ ВИДЕ

Г. Е. Деев
Обнинский институт атомной энергетики
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», georgdeo@mail.ru

Показано, что ординальное число ω непредставимо в цифровом виде, следовательно, цифровые устройства не могут вести вычисления с числом ω. Без ограничения общности изложение ведется в четверичной системе счисления.

Ключевые слова: автомат сдвига, числоид, обобщенная разрядная сетка.

UNREPRESENTABILITY OF ORDINAL NUMBER ω IN DIGITALIZED FORM

G. E. Deev
Obninsk Nuclear Energy Institute, National Research Nuclear University MEPhI, georgdeo@mail.ru

The article shows that the ordinal number ω is unrepresentable in digitalized form. Therefore digital devices are unable to perform calculations with ω. The representation is implemented in the quaternary numeral system without loss of generality.

Keywords: shift automata, chisloid, generalized bit grid.

1. Разрядная сетка Gr^0. Все цифровые объекты, с которыми ведутся вычисления, первоначально задаются на бесконечной разрядной сетке Gr^0, модель которой такова: Gr^0: $\ldots\underset{2}{\underline{x}}\,\underset{1}{\underline{x}}\,\underset{0}{\underline{x}}$. Места (разряды) сетки изображаются черточками и отнумерованы натуральными числами. На все места ставятся цифры x той системы счисления, в которой ведутся вычисления. Объект, получающийся в результате такой простановки, называется *числоидом*. Обычно номера мест в числоидах пишутся в виде индексов при x: $\overline{x} = \ldots x_r \ldots x_1 x_0$; кратко числоид всегда изображается буквой с черточкой наверху. Множество числоидов есть множество всех цифровых объектов на сетке Gr^0. Это множество обозначается через N. Числоиды представляют все действительные числа. Некоторые числоиды представляют натуральные числа. Все такие числоиды имеют вид $\overline{x} = \ldots 000 x_r \ldots x_1 x_0$. Бесконечное число нулей, сплошным массивом до бесконечности заполняющее разрядную сетку Gr^0, обозначается символом $\overleftarrow{0}$, что изображается равенством: $\overleftarrow{0} = \ldots 000$. Поэтому числоиды, представляющие натуральные числа, могут быть записаны также в виде $\overline{x} = \overleftarrow{0} x_r \ldots x_1 x_0$. Например, числоид $\overleftarrow{0}322$ представляет натуральное число 322. Множество натуральных чисел на сетке Gr^0 обозначается через N_0. Если числоид вместо $\overleftarrow{0}$ содержит иной набор знаков, то он не представляет натурального числа. В таком случае будем говорить, что он является *ненатуральным числоидом*. Например, числоид $\overleftarrow{1}2$ представляет число $2/3$, так что можно написать $\overleftarrow{1}2 = 2/3$. Это равенство можно понимать как представительское, т. е. обе части равенства с равным правом представляют одно и то же число, которое мы по историческим причинам привыкли изображать как $2/3$. Во всех вычислениях, проводимых вычислительными устройствами, числоид $\overleftarrow{1}2$ дает в итоге те же результаты, что и дробь $2/3$. Примерами ненатуральных числоидов, кроме приведенного $\overleftarrow{1}2$, являются:

$\bar{x} = \overleftarrow{2}x_r...x_1x_0 = ...222x_r...x_1x_0$, $\bar{x} = \overleftarrow{203}x_r...x_1x_0 = ...203203203x_r...x_1x_0$, $\bar{x} = ...x_{r+2}x_{r+1}x_r...x_1x_0$,
причем, в последнем числоиде никогда не встречаются массивы со стрелками типа $\overleftarrow{0}, \overleftarrow{1}, \overleftarrow{2}, \overleftarrow{3}, \overleftarrow{203}...$, которые все понимаются аналогично $\overleftarrow{0} = ...000$.

Наша цель – показать, что ω не совпадает ни с одним из числоидов на сетке Gr^0.

2. Предельный переход на сетке Gr^0. Пусть $\left\{\bar{x}^n\right\}\Big|_{n=0}^{n=\infty}$ – последовательность числоидов, записанных на сетке Gr^0, т.е. $\bar{x}^n = ...x_r^n...x_1^n x_0^n$.

Определение 1. Будем говорить, что в разряде с номером r происходит *разрядное установление цифры*, если существует такое n_r, что при всех $n > n_r$ справедливо: $\underset{n>n_r}{\forall n}\ [x_r^n = x_r]$.

Определение 2. Будем говорить, что последовательность числоидов $\left\{\bar{x}^n\right\}\Big|_{n=0}^{n=\infty}$ сходится к числоиду $\bar{x} = ...x_r...x_1x_0$, если в каждом разряде происходит разрядное установление цифры. Пишем:

$$\lim_{n\to\infty} \bar{x}^n = \bar{x} \tag{1}$$

или

$$\lim_{n\to\infty}\ ...x_r^n...x_1^n x_0^n = ...x_r...x_1x_0. \tag{2}$$

Замечание. Это определение предела позволяет находить как обычные пределы, так и пределы последовательностей, элементы которых принимают сколь угодно большие значения.

Пример. Пусть последовательность имеет вид: $\left\{\bar{x}^n\right\}\Big|_{n=0}^{n=\infty} = \left\{...000\underset{n}{3}...33\right\}\Big|_{n=0}^{n=\infty}$, т. е. она состоит из натуральных чисел, на всех начальных местах которых, вплоть до n-го включительно, стоит цифра 3, а далее – одни нули. Тогда очевидно, что во всех разрядах происходит установление цифры 3, последовательность сходится и имеет предел равный $...3...33 \overset{об}{=} \overleftarrow{3}$.

3. Автомат сдвига и натуральные числа. Первоначально натуральные числа появляются как *количественные идеи*, которым даются *имена* и *обозначения*. В силу пространственно временных ограничений, а также в силу ограниченности памяти, мы не способны давать различные имена всем натуральным числам. Проблема же *присвоения обозначений* натуральным числам разрешима, причем регулярным образом, с помощью автомата сдвига. Приведем табличное задание автомата сдвига [1–3].

Таблица 1

Автомат сдвига *S*

x \ q	$\overleftarrow{0}$	$\overleftarrow{0}1$
$\overleftarrow{0}$	$\overleftarrow{0}, \overleftarrow{0}$	$\overleftarrow{0}, 1$
$\overleftarrow{1}$	$\overleftarrow{0}, \overleftarrow{1}$	$\overleftarrow{0}, 2$
$\overleftarrow{2}$	$\overleftarrow{0}, \overleftarrow{2}$	$\overleftarrow{0}, 3$
$\overleftarrow{3}$	$\overleftarrow{0}, 3$	$\overleftarrow{0}1, \overleftarrow{0}$

Автомат сдвига, отправляясь от нуля, последовательно порождает обозначения для натуральных чисел (далее, говоря о натуральных числах, будем иметь в виду их обозначения):

$$\overleftarrow{0} \xrightarrow{S} \overleftarrow{0}1 \xrightarrow{S} \overleftarrow{0}2 \xrightarrow{S} \overleftarrow{0}3 \xrightarrow{S} \overleftarrow{0}10 \xrightarrow{S} \overleftarrow{0}11 \xrightarrow{S} \overleftarrow{0}12 \xrightarrow{S} ...$$

Видно, что, например, натуральное число $\overleftarrow{0}3$ является третьей степенью (третьей итерацией) оператора *S*, примененного к числу $\overleftarrow{0}$: $\overleftarrow{0}3 = S^3\overleftarrow{0}$. Аналогично, любое натуральное $\overline{n}$ является $\overline{n}$-й степенью оператора *S*, реализуемого автоматом сдвига *S*: $\overline{n} = S^{\overline{n}}\overleftarrow{0}$.

Натуральные числа упорядочиваются процессом порождения. Естественным образом возникает отношение *непосредственного следования,* определяемое и реализуемое автоматом сдвига.

Определение. Натуральное число $\overline{x}'$ непосредственно следует за числом $\overline{x}$, если $\overline{x}' = S\,\overline{x}$ (в таком случае пишем: $\overline{x} \prec \overline{x}'$; таким образом значок $\prec$ – символ непосредственного следования).

Это же определение в символах:

$$[\overline{x} \prec \overline{x}'] \xleftrightarrow{\text{опр}} [\overline{x}' = S\,\overline{x}]. \qquad (3)$$

Из табл. 1, задающей автомат сдвига, видно, что не только натуральные числа, но и любые числоиды могут быть поданы на его вход. Таким образом, понятие непосредственного следования может быть распространено на множество всех числоидов: для любого числоида может быть найден другой числоид, непосредственно следующий за ним. Рассмотрим пример.

Пример 1. Пусть $\overline{x} = \overleftarrow{2}1233$ – ненатуральный числоид, $\overline{q} = \overleftarrow{0}1$. Приводим развертку, протоколирующую процесс вычисления автоматом сдвига *S*:

0		$\infty > t \geq 4$		3		2		1		0	t
		$\overleftarrow{2}$		1		2		3		3	x
		|		|		|		|		|	
$\overleftarrow{0}$	$\leftarrow$	$\overleftarrow{0}$	$\leftarrow$	$\overleftarrow{0}$	$\leftarrow$	$\overleftarrow{0}1$	$\leftarrow$	$\overleftarrow{0}1$	$\leftarrow$	$\overleftarrow{0}1$	q
		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$	
		$\overleftarrow{2}$		1		3		0		0	y
Gr^1		Вычисление на Gr^0									

Запишем результат вычисления на сетке Gr^0: $S\overleftarrow{2}1233\,|\,\overleftarrow{0}1 = \overleftarrow{2}1300$. Читаем: результат действия автомата *S*, поставленного в начальное состояние $\overline{q} = \overleftarrow{0}1$, на ненатуральный числоид $\overline{x} = \overleftarrow{2}1233$ есть снова ненатуральный числоид $\overline{x}' = \overleftarrow{2}1300$. Таким образом, отношение непосредственного следования реализуется также на числоидах, отличных от натуральных: $\overleftarrow{2}1233 \prec \overleftarrow{2}1300$.

Из развертки приведенного примера хорошо видна вычислительная роль состояния, в которое переходит автомат в каждый момент времени. *Состояние, которое формируется в каждый момент времени, определяет тот или иной вариант вычисления, а также величину переноса в следующий разряд*.

Столбец, отмеченный записью $\infty > t \geq 4$, понимается так: если раскрыть содержательный смысл знака $\overleftarrow{2} = ...222$, то во все моменты времени, начиная с момента $t = 4$, на выходе автомата формируется сигнал 2 (строка *y*), в результате чего вся разрядная сетка заполняется двойками. Это заполнение будет происходить во все моменты времени, меньшие бесконечности. Актуализируя этот процесс, получаем, что при $t \geq 4$ вся разрядная сетка выхода будет заполнена двойками, причем каждая двойка будет соответствовать моменту времени $t < \infty$. Тогда сигналу переноса, $\overline{q} = \overleftarrow{0}$, на сетке Gr^0 места не найдется, он будет выведен за пределы сетки Gr^0, перейдет в сетку Gr^1, на которой автомат сдвига продолжит свои вычисления, что изображается разрывом развертки. На сетке Gr^1 он записан в столбце при $t = 0$. Судя по развертке, промежуток времени от $t=4$ до $t=\infty$ воспринимается автоматом сдвига как одно мгновение (ибо всю работу автомата за этот промежуток времени можно изобразить в развертке в виде одного столбца, т. е. так же, как изображается работа автомата для других отдельных моментов времени; в В-технологии реальное вычисление будет также проведено в одно мгновение, точнее, за один такт).

Аналогично обстоит дело в следующем примере. В нем, в отличие от предыдущего примера, для вычислений в следующей разрядной сетке Gr^1 происходит перенос другого состояния автомата, состояния $\overline{q}=\overleftarrow{0}1$.

Пример 2. Пусть $\overline{x}=\overleftarrow{3}$, $\overline{q}=\overleftarrow{0}1$. Протоколируем разверткой процесс вычисления автоматом *S*:

$$\begin{array}{|c|c|c|c}
0 & & \infty>t\geq 0 & t \\ \hline
 & & \overleftarrow{3} & x \\
 & & | & \\
\overleftarrow{0}1 & \leftarrow & \overleftarrow{0}1 & q \\
 & & \downarrow & \\
 & & \overleftarrow{0} & y \\ \hline
Gr^1 & & Gr^0 &
\end{array}$$

Промежуток времени $\infty>t\geq 0$ воспринимается автоматом как одно мгновение: в это «бесконечное мгновение» на выходе формируется сигнал со стрелкой $\overleftarrow{0}$, и в этот же «момент» заканчивается вычисление. Из развертки видно, что вся разрядная сетка Gr^0 заполнена нулями и, следовательно, сигналу переноса $\overline{q}=\overleftarrow{0}1$ в момент $t=\infty$ на сетке Gr^0 нет места, он переходит в следующую разрядную сетку Gr^1, на которой автомат сдвига продолжает свои вычисления, начиная с момента $t=0$, собственного начального момента времени для сетки Gr^1.

Запишем результат вычисления на сетке Gr^0: $S\overleftarrow{3}\,|\,\overleftarrow{0}1=\overleftarrow{0}$. Таким образом, на сетке Gr^0 имеет место отношение непосредственного следования: $\overleftarrow{3}\prec\overleftarrow{0}$. На первый взгляд, оно кажется нелепым (трактуют: бесконечность меньше нуля). Но именно это утверждал Валлис, а вместе с ним и Ньютон. При этом они не раскрывали своей аргументации. А между тем, они, похоже, правы. В самом деле, все знают, что нулю непосредственно предшествует минус единица: $-1\prec\overleftarrow{0}$. Но в мире числоидов $\overleftarrow{3}$ как раз играет роль минус единицы. Действительно, $\overleftarrow{3}+\overleftarrow{0}1=\overleftarrow{0}$, а это определяющее свойство минус единицы. Значит числоидом, представляющим минус единицу на сетке Gr^0, является $\overleftarrow{3}$. Так что мы можем написать: $\overleftarrow{3}=-1$. Все вычислительные устройства, использующие числоид $\overleftarrow{3}$ вместо минус единицы, в результате вычислений в итоге всегда дают правильные результаты.

Но приведенная выше запись результата вычисления автомата сдвига, ограниченная сеткой Gr^0, является неполной, вызывающей со времен Валлиса недоумения и «возражения». Полная запись результата располагается на обобщенной разрядной сетке и имеет вид: $S\overleftarrow{3}\,|\,\overleftarrow{0}1=\ldots\|\underset{Gr^2}{\overleftarrow{0}}\|\underset{Gr^1}{\overleftarrow{0}1}\|\underset{Gr^0}{\overleftarrow{0}}$, откуда ясно видно, что числоидом, непосредственно следующим за $\overleftarrow{3}$, является четверичная гипердесятка. Соблюдается полная аналогия с ростом чисел на разрядной сетке (после последней цифры в четверичной системе счисления, т. е. после тройки, идет четверичная десятка). Наличие этой аналогии лишний раз подтверждает правильность проводимых рассмотрений.

Как видно, излагаемая теория позволяет не только вести вычисления с бесконечно большими числами, но и проводить их за конечное время, в некоторых случаях доходящее до одного такта (пример 2).

Развертка примера 2 хорошо иллюстрирует практическую пользу от введения сигналов со стрелками. Действительно, если бы не было сигналов со стрелками, мы были бы вынуждены вести вычисление до тех пор, пока не прошли бы поразрядно весь регистр, который в теории бесконечен, потратив, понятно, на это уйму времени. Вместо этого, при наличии сигналов со стрелками, мы проводим вычисление за одно мгновение, за один такт, причем, как видно из развертки, независимо от размеров реального регистра. Таким образом, следствием введения сигналов со стрелками является *ускорение процесса вычислений*. Существенно отметить, что в В-технологии сигналы со стрелками физически реализуются [1–3].

4. Отношение следования. Вместе с понятием непосредственного следования существует родственное ему понятие *следования* (просто, следования, без употребления слова «непосредственного»). Представление о нем получаем из простого примера. Запишем три числа, последовательно попарно связанных отношением непосредственного следования: $\overleftarrow{0}21 \prec \overleftarrow{0}22 \prec \overleftarrow{0}23$. Удалим из этой цепочки число $\overleftarrow{0}22$. Образуется фигура $\overleftarrow{0}21 \prec\prec \overleftarrow{0}23$, в которой числа $\overleftarrow{0}21$ и $\overleftarrow{0}23$ связаны, по определению, отношением *следования,* но не отношением *непосредственного следования*. Значок $\prec\prec$, автоматически сформировавшийся в этой фигуре, будем использовать для символьной записи отношения следования. Дадим определение отношения следования.

Определение 1. *Конечным сегментом* называется конечная последовательность числоидов, в которой любые два соседних числоида связаны отношением непосредственного следования:

$$\overrightarrow{\overline{x}_0, \overline{x}_n} \overset{обозн}{=} \overline{x}_0 \prec \overline{x}_1 \prec \overline{x}_2 \prec \ldots \prec \overline{x}_{n-1} \prec \overline{x}_n . \tag{4}$$

Одноэлементным сегментом называется любой числоид: $\overrightarrow{\overline{x}_0, \overline{x}_0} \overset{обозн}{=} \overline{x}_0$

Замечание. Одноэлементные сегменты будем включать в семейство конечных сегментов, чтобы можно было единообразно определять отношение следования, разрешая случаи наподобие того, что имеет место в наводящем примере. По существу же мы будем различать понятия конечного сегмента и одноэлементного сегмента, так как в определении конечного сегмента доминирует понятие непосредственного следования, в то время как оно неприменимо к одноэлементному сегменту, ибо в противном случае это приводило бы к нарушению единственности непосредственно следующего элемента, что недопустимо [4].

В конечном сегменте всегда есть первый и последний элементы. Для одноэлементного сегмента первый и последний элементы совпадают.

Определение 2. Конечный сегмент $\overrightarrow{\overline{x}_1, \overline{x}_{n-1}} = \overline{x}_1 \prec \overline{x}_2 \prec \ldots \prec \overline{x}_{n-1}$, содержащийся в (4), назовем *вставкой.* Аналогично, *одноэлементный сегмент* $\overrightarrow{\overline{x}_1, \overline{x}_1} = \overline{x}_1$, содержащийся в последовательности $\overline{x}_0 \prec \overline{x}_1 \prec \overline{x}_2$, также назовем *вставкой.*

Определение 3. Два числоида $\overline{x}_0$ и $\overline{x}_n$ связаны отношением *следования* (символьная запись: $\overline{x}_0 \prec\prec \overline{x}_n$), если существует вставка $\overrightarrow{\overline{x}_1, \overline{x}_{n-1}}$, приводящая к последовательности непосредственно следующих элементов: $\overline{x}_0 \prec \overrightarrow{\overline{x}_1, \overline{x}_{n-1}} \prec \overline{x}_n = \overline{x}_0 \prec \overline{x}_1 \prec \overline{x}_2 \prec \ldots \prec \overline{x}_{n-1} \prec \overline{x}_n$.

Аналогичное определение дается для одноэлементной вставки.

В символах:

$$\overline{x}_0 \prec\prec \overline{x}_n \xleftrightarrow{опр} \exists\, \overrightarrow{\overline{x}_1, \overline{x}_{n-1}} \left[[\overline{x}_0 \prec \overrightarrow{\overline{x}_1, \overline{x}_{n-1}} \prec \overline{x}_n] \right]. \tag{5}$$

Аналогично,

$$\overline{x}_0 \prec\prec \overline{x}_2 \xleftrightarrow{опр} \exists\, \overrightarrow{\overline{x}_1, \overline{x}_1} \left[[\overline{x}_0 \prec \overrightarrow{\overline{x}_1, \overline{x}_1} \prec \overline{x}_2] \right]. \tag{6}$$

Отношения следования и непосредственного следования различаются по признаку транзитивности: отношение следования транзитивно, а отношение непосредственного следования нет [4, гл. IV].

Автомат сдвига порождает на каждом шаге новое натуральное число. На выполнение каждого последующего шага он затрачивает все больше времени, а для записи порождаемых чисел требуется все больше места. Каждое последующее число дается со все бóльшим трудом. Наступает момент, когда пространственно-временные затраты на порождение чисел оказываются невыполнимыми, т. е. момент непреодолимых пространственно-временных ограничений. Но мы, опираясь на *абстракцию осуществимости*, игнорируем эти препятствия и мысленно разрешаем автомату сдвига дальнейшее построение натуральных чисел. При этом автомат сдвига не способен самостоятельно выйти из процесса порождения натуральных чисел. *Завершить* процесс можно, но не автомату сдвига. Это можем сделать только мы и только мысленно. Пробежав в воображении весь ряд натуральных чисел, мы тем самым выполняем мыслительный акт, называемый *актуализацией бесконечности.* Мы теперь рассматриваем множество натуральных чисел как единый объект (Кантор), и тем самым производим *объективацию* множества натуральных чисел. Отношение порядка структурирует множество натуральных чисел, создает в нем определенную направленность и ведет нас в бесконечность. Кантор завершил движение в бесконечность и спросил: «А что дальше?». Чтобы ответить на этот вопрос, нужно на что-то опереться. Ничего другого, кроме порожденного множества натуральных чисел и отношения порядка, нет. И он ответил: «За упорядоченным множеством натуральных чисел непосредственно следует единственное число». Основой для этого ответа стало отношение порядка и связанная с ним своего рода инерция; тем самым он расширил область действия отношения непосредственного следования и применил его к *множеству*: отношение порядка порождает новый объект, непосредственно следующий за множеством натуральных чисел. Но этот объект числом не является, ибо числа содержатся только во множестве натуральных чисел, а объект находится за пределами множества натуральных чисел. Кроме того, это странный объект, поскольку он определяется как объект, *непосредственно следующий за множеством*. А понятие *непосредственного следования за множеством* не было определено, и потому как им пользоваться неизвестно.

Кантор обошелся без этого определения, однако понятие «*непосредственного следования за множеством*» использовал. По-видимому, он опирался на интуитивное разрешение ситуации. Объект, непосредственно следующий за множеством натуральных чисел, он обозначил символом ω, символом, который наиболее близок символу ∞, введенному Валлисом для бесконечности. По-видимому, предполагалось, что представление об этом объекте сформируется у читателя в результате умственного напряжения после прочтения слов о «его непосредственном следовании за множеством натуральных чисел», а также, что представление о нем будет одним и тем же у всех, прочитавших эту фразу.

Далее мы приведем определение понятия *непосредственного следования за множеством*, которое будет использовано для доказательства непредставимости ω в цифровом виде.

Пока же мы не знаем никаких других чисел, кроме натуральных, для которых определено понятие непосредственного следования (числоиды, для которых, как сказано выше, также определено отношение непосредственного следования, *в отличие от натуральных чисел* не имеют *непосредственной* числовой интерпретации, и потому фраза перед скобкой верна). Поэтому будем опираться на это понятие именно в применении к натуральным числам.

Пусть $\overline{x} = \overline{x}_r = \overleftarrow{0}x_r \ldots x_1 x_0$ – произвольное $(r+1)$-разрядное число и пусть $\overline{x} = \overleftarrow{0}\underset{s}{3}\ldots 33$ (при $r \le s$). Очевидно, эти два числа связаны отношением следования:

$$\overline{x} = \overleftarrow{0}x_r \ldots x_1 x_0 \prec\prec \vec{0}\underset{s}{3}\ldots 33\ . \qquad (6)$$

Более подробно, в конечной последовательности натуральных чисел

$$\overleftarrow{0} \prec \overleftarrow{0}1 \prec \overleftarrow{0}2 \prec \overleftarrow{0}3 \prec \ldots \prec \overleftarrow{0}x_r \ldots x_1 x_0 \prec \ldots \prec \overleftarrow{0}\underset{s}{3}\ldots 33 \qquad (7)$$

число $\overline{x} = \overleftarrow{0}\underset{s}{3}...33$ последнее, все остальные числа (кроме $\overline{x} = \overleftarrow{0}\underset{s}{3}...32$) связаны с ним соотношением (6), они ему предшествуют (что эквивалентно тому, что оно следует за каждым из них). По мере роста параметра s множество натуральных чисел, содержащихся в последовательности (7), расширяется, причем каждое натуральное число обязательно окажется содержащимся в (7) при достаточно большом s. В пределе множество натуральных чисел, содержащихся в (7), поглотит все множество натуральных чисел. Но последний элемент в (7), натуральное число $\overline{x} = \overleftarrow{0}\underset{s}{3}...33$, превращается в числоид $\overleftarrow{3} = ...333...33$, который не является натуральным числом, так как всякое натуральное число имеет вид $\overline{x} = \overleftarrow{0}x_r...x_1x_0$. Этот числоид заполняет тройками все места разрядной сетки.

Перейдем в (6) к пределу при s, стремящемся к бесконечности. Получим:

$$\underset{\overline{x}\in N_0}{\forall}\overline{x}\left[\overline{x} \prec\prec \overleftarrow{3}\right], \tag{8}$$

что означает (по определению), что числоид $\overleftarrow{3}$ *следует за множеством всех натуральных чисел*:

$$N_0 \prec\prec \overleftarrow{3}. \tag{9}$$

(Соотношения (8), (9) – это частный случай распространения отношения следования на предельные элементы. Отношение следования на множестве натуральных чисел обладает свойством связности [4, гл. IV]. Но оно также обладает свойством связности, распространенным на предельные элементы по образцу (8). Вообще же предельная связность имеет место на множестве $\mathcal{N}$ всех числоидов, среди которых «большинство» – предельные элементы: $\underset{\overline{x}_1\in\mathcal{N}}{\forall}\overline{x}_1 \underset{\overline{x}_2\in\mathcal{N}}{\forall}\overline{x}_2\left[\overline{x}_1 \neq \overline{x}_2 \to [[\overline{x}_1 \prec\prec \overline{x}_2]\vee[\overline{x}_2 \prec\prec \overline{x}_1]]\right]$.)

Таким образом, числоид $\overleftarrow{3}$ приобретает некоторые черты ординального числа ω. Не хватает только свойства *непосредственного следования за множеством* и единственности.

Возникает вопрос-искушение: может быть $\overleftarrow{3} = ...333...33$ – это и есть тот единственный объект, который непосредственно следует за множеством натуральных чисел? Оказывается, нет. Дело в том, что, по определению Кантора, такой объект *единственен*. А в описываемой структуре числоидов, объектов, следующих за множеством натуральных чисел, бесконечно много. Действительно, соотношение, подобное соотношению (6), можно составить, например, для другого натурального числа $\overline{x} = \overleftarrow{0}\underset{s}{3}...32$:

$$\overline{x} = \overleftarrow{0}x_r...x_1x_0 \prec\prec \overrightarrow{0}\underset{s}{3}...32, \quad (r < s-1) \ . \tag{10}$$

Переходя к пределу при $s \to \infty$ (при этом ограничения на r, естественно, исчезают), получим:

$$\underset{\overline{x}\in N_0}{\forall}\overline{x}\left[\overline{x} \prec\prec \overleftarrow{3}2\right], \tag{11}$$

что означает, что числоид $\overleftarrow{3}2$ также следует за множеством натуральных чисел:

$$N_0 \prec\prec \overleftarrow{3}2. \tag{12}$$

Аналогично можно показать, что любой числоид, отличный от натурального, следует за множеством натуральных чисел:

$$\underset{\overline{x}\in\mathcal{N}\setminus N_0}{\forall\overline{x}}\left[N_0 \prec\prec \overline{x}\right]. \tag{13}$$

Определение 4. *Непосредственного следования числоида за множеством* запишем вначале в символах для произвольного числоида $\overline{w}$:

$$[M \prec \overline{w}] \overset{опр}{\leftrightarrow} [M \prec\prec \overline{w}] \ \& \quad \not\exists\overline{w}_1\left[[M \prec\prec \overline{w}_1]\&[\overline{w}_1 \prec\prec \overline{w}]\right]. \tag{14}$$

Символьная запись определения (14) говорит о том, что числоид $\overline{w}$ тогда и только тогда *непосредственно следует за множеством M*, $(M \prec \overline{w})$, когда он следует за множеством M, $(M \prec\prec \overline{w})$, и не существует другого числоида $\overline{w}_1$, также следующего за M, $(M \prec\prec \overline{w}_1)$, и в то же время предшествующего ему, $(\overline{w}_1 \prec\prec \overline{w})$.

Опираясь на вышесказанное и на определение 4, приходим к следующим выводам.

Теорема. Каким бы ни был числоид, следующий за множеством натуральных чисел, всегда найдется другой числоид, также следующий за множеством натуральных чисел, и предшествующий ему.

Следствие 1. Среди числоидов нет числоида, непосредственно следующего за множеством натуральных чисел.

Следствие 2. Ни один числоид на сетке Gr^0 не совпадает с ординальным числом **ω.**

Следствие 3. Ординальное число ω непредставимо в цифровом виде на сетке Gr^0.

Последнее понятно, поскольку все цифровые объекты – это числоиды на сетке Gr^0. Отсюда вытекает, что цифровые вычислительные устройства естественным образом, генетически, приспособленные к вычислениям с числоидами, не воспринимают ω на своем входе и потому не могут непосредственно вести с ним вычисления.

Замечание 1. Таким образом, ординальное число ω не может быть отождествлено ни с каким числоидом на сетке Gr^0 и потому непредставимо в цифровом виде. С ним вычислительные устройства не могут непосредственно вести вычисления; если и могут, то только через посредство программных ухищрений. Между тем, числоиды представляют все действительные числа, а все вычислительные устройства, порожденные автоматом сдвига и составляющие основу математики, беспрепятственно ведут свои вычисления на множестве числоидов и гиперчислоидов, сохраняя все привычные свойства математических операций. Этим числоиды и наследующие им гиперчислоиды отличаются от ординального числа ω, которое уже для операции сложения дает нарушение привычного свойства коммутативности: $1+\omega \neq \omega+1$, [5], к тому же осложненное трактовкой операции сложения. В отличие от этого, для гиперчислоидов не возникает никаких осложнений при выполнении математических операций соответствующими устройствами.

Более того, переход от числоидов множества $\vec{\mathcal{N}}$ на сетке Gr^0 к гиперчислоидам на обобщенной сетке происходит с помощью все того же автомата сдвига без каких либо осложнений, как это показано в примере 2. Так же легко автомат сдвига продолжает неограниченное движение в гипербесконечность.

Все вышесказанное позволяет получить представление о структуре множества всех числоидов. Основная роль при порождении множества числоидов принадлежит автомату сдвига, который, отправляясь от нуля, первоначально порождает множество натуральных чисел. Созданное таким образом множество натуральных чисел является *ядром множества числоидов*. Все остальные числоиды получаются из ядра как периферийные объекты, как пределы подпоследовательностей натуральных чисел. Мощность таких подпоследовательностей равна мощности континуума. (Ситуация здесь аналогична ведению понятия обобщенных функций как идеальных объектов по отношению к множеству обычных функций [6]).

Введем понятие *полного предела* $f.\lim\limits_{n\to\infty}\overline{x}_n$ последовательности как множества пределов всех ее подпоследовательностей:

$$f.\lim_{n\to\infty}\overline{x}_n \overset{опр}{=} \left\{\lim_{k\to\infty}\overline{x}_{n_k}\right\}, \tag{15}$$

где $\left\{\overline{x}_{n_k}\right\}\Big|_{k=0}^{k=\infty}$ – любая подпоследовательность последовательности $\left\{\overline{x}_n\right\}\Big|_{n=0}^{n=\infty}$.

Любой ненатуральный числоид является последующим по отношению к множеству всех натуральных чисел (13). Множество всех числоидов образует бесконечный сегмент упорядоченных элементов:

$$\vec{\mathcal{N}} = \overrightarrow{\overleftarrow{0}, \overleftarrow{3}} = \overleftarrow{0} \prec \overleftarrow{0}1 \prec \ldots \prec\prec \overline{x} \prec\prec \ldots \prec \overleftarrow{3}2 \prec \overleftarrow{3}, \qquad (16)$$

где символом $\vec{\mathcal{N}}$ обозначено упорядоченное множество всех числоидов, бесконечный сегмент.

Как следует из сказанного, генезис его таков: на *первом* этапе автоматом сдвига генерируется упорядоченное множество натуральных чисел, являющееся ядром множества всех числоидов, на *втором* этапе создается множество числоидов (генерируется полным предельным переходом).

Это может быть отражено записью:

$$\vec{\mathcal{N}} = f.\lim \underset{\overline{n}=0}{|} \; S^{\overline{n}} \overleftarrow{0} \underset{\overline{n}=\infty}{\rangle}, \qquad (17)$$

где $\overline{n} = S^{\overline{n}} \overleftarrow{0}$ – натуральное число $\overline{n}$, являющееся $\overline{n}$-й итерацией автомата сдвига, примененной к числу $\overleftarrow{0}$; $\underset{\overline{n}=0}{|} \; S^{\overline{n}} \overleftarrow{0} \underset{\overline{n}=\infty}{\rangle}$ – множество натуральных чисел, упорядоченное отношением непосредственного следования; в записи множества используется угловатая скобка, $\rangle$, показывающая направление роста отношения непосредственного следования в записи (7); $f.\lim$ – операция взятия полного предела, примененная к множеству натуральных чисел.

Упорядочение в (16) осуществляется слева направо автоматом сдвига. Обратный автомат сдвига [2], таблица которого приведена ниже, осуществляет в (16) движение справа налево.

Таблица 2

Обратный автомат сдвига S^{-1}

$x \backslash q$	$\overleftarrow{3}$	$\overleftarrow{0}$
$\overleftarrow{0}$	$\overleftarrow{3}, \overleftarrow{3}$	$\overleftarrow{0}, \overleftarrow{0}$
$\overleftarrow{1}$	$\overleftarrow{0}, 0$	$\overleftarrow{0}, \overleftarrow{1}$
$\overleftarrow{2}$	$\overleftarrow{0}, 1$	$\overleftarrow{0}, \overleftarrow{2}$
$\overleftarrow{3}$	$\overleftarrow{0}, 2$	$\overleftarrow{0}, \overleftarrow{3}$

Обратный автомат сдвига для каждого натурального числа находит непосредственно ему предшествующее. Подобно автомату сдвига он определен на множестве всех числоидов и для каждого числоида находит непосредственно ему предшествующий. В структуре (16) он начинает движение от самого последнего элемента $\overleftarrow{3}$ в направлении к самому первому $\overleftarrow{0}$.

Отправляясь от числоида $\overleftarrow{3}$, обратный автомат сдвига порождает множество числоидов, подобное упорядоченному множеству натуральных чисел. Это множество является двойственным ядром по отношению к ядру, которым является множество натуральных чисел. Двойственным ядром является множество числоидов, представляющее множество отрицательных целых чисел. Так, числоид $\overleftarrow{3}1$ представляет число (-3). Действительно, $\overleftarrow{3}1 + \overleftarrow{0}3 = \overleftarrow{0}$ и т. д. Другими словами, всякое вычисление, проводимое автоматом сдвига, имеет зеркально симметричное ему вычисление, проводимое обратным автоматом сдвига.

Аналогично (17) можно написать:

$$\overleftarrow{\mathcal{N}} = f.\lim \underset{\overline{n}=\infty}{\langle} \; S^{\overline{n}} \overleftarrow{3} \underset{\overline{n}=0}{|}, \qquad (19)$$

где $\overleftarrow{\mathcal{N}}$ – множество всех числоидов, упорядоченное отношением непосредственного предшествования, определяемого и реализуемого обратным автоматом сдвига.

Замечание 2. Описание упорядоченного множества $\vec{\mathcal{N}}$ формулой (17), хотя и является полным с точки зрения содержащихся в нем числоидов, но не полным с точки зрения содержащихся в нем упорядоченных структур, учет которых приводит к бесконечному фрактальному описанию $\vec{\mathcal{N}}$. Соответствующую формулу не приводим.

Заключение. Среди всех числоподобных объектов (числоидов и гиперчислоидов) нет ни одного, который можно было бы отождествить с ординальным числом ω**.** И это несмотря на то, что среди числоидов есть объекты, похожие по своим свойствам на ω, в частности, есть объекты, следующие, как и ω, за множествоим натуральных чисел. Поскольку числоиды и гиперчислоиды – это все цифровые объекты, которые могут быть записаны на гиперсетке Gr [7], которую можно представить записью $Gr = ... \| Gr^2 \| Gr^1 \| Gr^0 \| Gr^{-1} \| Gr^{-2} \| ...$, то не существует цифрового представления ординального числа ω. Следовательно, оно не может участвовать напрямую в вычислениях, проводимых вычислительными устройствами: автоматами сдвига, сумматорами, умножителями, делителями …, в то время как с числоидами и гиперчислоидами эти вычислительные устройства ведут свои вычисления без каких либо ограничений. При этом все математические операции естественным образом переносятся на множество числоидов и гиперчислоидов с сохранением всех их свойств. Все это говорит о естественности введения понятий числоидов и гиперчислоидов и использования их для вычислений с бесконечностями. Наличие неархимедовости как обобщенной разрядной сетки, так и гипероси истолкованию результатов вычислений не мешает, а, наоборот, помогает.

Выражаю благодарность заведующему кафедрой прикладной математики Обнинского института атомной энергетики С. В. Ермакову за дискуссию по теме работы.

Литература

1. Деев Г. Е. Абстрактные вычислительные устройства. Т. 2. М. : Энергоатомиздат, 2007. 332 с.
2. Деев Г. Е., Ермаков С. В., Король Н. А., Перегуда А. И., Старков С. О. В-компьютеры, ведущие вычисления в *k*-ичной системе счисления // Супервычисления и математическое моделирование : XVI Междунар. конф. 3–7 октября 2016, г. Саров. URL: http://book.sarov.ru/wp-content/uploads/Supercomputing-16-2016-14.pdf (дата обращения: 01.10.2017).
3. Рассел Б. Введение в математическую философию. Новосибирск : Сиб. ун-е изд-во, 2007. 264 с.
4. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М. ; Л. : ОНТИ, 1937. 306 с.
5. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций. М. : Мир, 1976. 312 с.
6. Деев Г. Е. Вычисления с бесконечностями // Вестн. кибернетики. 2017. № 1 (25). С. 49–57.
7. Долженкова М. Л., Чистяков Г. А. Проектирование архитектур универсальных машин логического вывода // Advanced Science. 2017. № 3. С. 208–215.
8. Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М. : Физматгиз, 1962. 476 с.
9. Шоломов Л. А. Основы теории дискретных логических и вычислительных устройств. СПб. : Лань, 2011. 432 с.
10. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М. : Мир, 1982.