

УДК 531.742-344.082.6:519.87

О МОДЕЛИРОВАНИИ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ В СЛОИСТОМ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ МАГНИТНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ТРУБЕ

В. А. Галкин, А. О. Дубовик

Сургутский государственный университет, val-gal@yandex.ru, alldubovik@gmail.com

В данной работе исследуется класс точных решений уравнений магнитной гидродинамики (МГД), соответствующий слоистому течению вязкой несжимаемой жидкости, протекающей в магнитном поле, параллельном оси цилиндра. Имеет место теорема о равносильности решения уравнений теплопроводности для компонента вектора скорости жидкости и напряженности магнитного поля и решения системы уравнений МГД для слоистого течения жидкости. Исследуется эффект тепловыделения в результате внутреннего трения и джоулева нагрева в течении вязкой несжимаемой жидкости.

Ключевые слова: слоистое течение, магнитная гидродинамика, тепловыделение.

ABOUT HEAT GENERATION MODELING IN LAYERED FLOW OF VISCOUS MAGNETIC INCOMPRESSIBLE FLUID IN ROTATING PIPE

V. A. Galkin, A. O. Dubovik

Surgut State University, val-gal@yandex.ru, alldubovik@gmail.com

The article studies the classification of accurate solutions of the magnetohydrodynamics (MHD) equations corresponding to the layered flow of a viscous incompressible fluid in a magnetic field parallel to the axis of the cylinder. There is a theorem on the equivalence of solution of the heat equation for the fluid velocity vector component and the magnetic field strength and the solution of the MHD equations system for layered fluid flow. The effect of heat generation as a result of internal friction and Joule heating in viscous incompressible fluid flow is investigated.

Keywords: layered flow, magnetohydrodynamics, heat generation.

Модель слоистого течения жидкости используется для описания течения вязких жидкостей, например, нефти, в зазорах и малых полостях [1]. Задача моделирования тепловыделения в течении вязкой несжимаемой жидкости интересна прежде всего в связи с исследованием нетрадиционных способов увеличения нефтедобычи. Явление тепловыделения в результате внутреннего трения может оказывать серьезное влияние на режимы эксплуатации нефтяных и газовых пластов [2]. Связь модели сплошной среды с задачами фильтрации жидкости в пористой среде рассматривается в [3].

В стационарном случае слоистое течение жидкости описано в [1, 4]. Изучению адвекции и конвекции слоистого течения жидкости в рамках приближения Буссинеска посвящена работа [5]. Исследованию слоистого течения вязкой магнитной жидкости в цилиндре посвящена работа [6]. Данная работа может быть рассмотрена как ее продолжение. Здесь дополнительно представлен результат исследования тепловыделения в случае слоистого течения жидкости.

В цилиндрической системе координат $\{\rho, \varphi, z\} \in D$ и $t > 0$ система уравнений МГД несжимаемой жидкости имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial H_p}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) H_p = (\mathbf{H} \cdot \nabla) v_p + \mu_m \left(\Delta H_p - \frac{H_p}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial H_\phi}{\partial \phi} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial H_\phi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) H_\phi + \frac{v_\phi H_p}{\rho} = (\mathbf{H} \cdot \nabla) v_\phi + \frac{v_p H_\phi}{\rho} + \mu_m \left(\Delta H_\phi - \frac{H_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial H_p}{\partial \phi} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) H_z = (\mathbf{H} \cdot \nabla) v_z + \mu_m \Delta H_z, \quad (4)$$

$$\frac{\partial v_p}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_p - \frac{v_\phi^2}{\rho} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \left(P + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi\rho_0} (\mathbf{H} \cdot \nabla) H_p - \frac{H_\phi^2}{4\pi\rho_0\rho} + \mu \left(\Delta v_p - \frac{v_p}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right), \quad (5)$$

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_\phi + \frac{v_\phi v_p}{\rho} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \left(P + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi\rho_0} (\mathbf{H} \cdot \nabla) H_\phi + \frac{H_\phi H_p}{4\pi\rho_0\rho} + \mu \left(\Delta v_\phi - \frac{v_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial v_p}{\partial \phi} \right), \quad (6)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_z = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \left(P + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi\rho_0} (\mathbf{H} \cdot \nabla) H_z + \mu \Delta v_z, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \rho_0 c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T \right) = \varepsilon \Delta T + \eta \left\{ 2 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_p}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_p}{\partial \rho} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_p}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_p}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{\rho} \right)^2 \right\} + \frac{\mu_m}{4\pi} (\text{rot } \mathbf{H})^2, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\mathbf{H} \equiv \{H_p, H_\phi, H_z\}$ – вектор напряженности магнитного поля;

$\mathbf{v} \equiv \{v_p, v_\phi, v_z\}$ – вектор скорости жидкости;

t – время, μ_m – магнитная вязкость жидкости;

ρ_0 – плотность жидкости;

P – давление;

μ – кинематическая вязкость;

c_p – теплоемкость при постоянном давлении;

ε – теплопроводность;

η – динамическая вязкость;

T – температура жидкости;

$\chi = \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_p}$ – коэффициент температуропроводности, используемый ниже.

Операторы div , $(\mathbf{v} \cdot \nabla)$, Δ , $(\text{rot } \cdot)^2$ определяются следующими выражениями:

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho F_p)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}, \quad (\mathbf{v} \cdot \nabla) f = v_p \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{v_\phi}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\Delta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

$$(\text{rot } \mathbf{H})^2 = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_p}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_p}{\partial \phi} \right)^2.$$

В качестве граничных условий для гидродинамических параметров и напряженности магнитного поля будут рассматриваться условия Дирихле. Для поля температуры – условие теплонепроницаемости стенок.

В бесконечном цилиндре $\{\rho, \varphi, z\}$, $\rho \in [0; R]$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $z \in [-\infty; +\infty]$ рассматривается слоистое течение вязкой несжимаемой жидкости. В таком случае вектор скорости жидкости имеет вид $\mathbf{v} \equiv \{0, v_\varphi(\rho, t), v_z(\rho, t)\}$, $t > 0$. Полагаем магнитное поле параллельным оси цилиндра $\mathbf{H} \equiv \{0, 0, H_z(\rho, t)\}$, $P \equiv p(\rho, t)$. В [6] рассмотрена следующая теорема:

Теорема. Решение системы уравнений МГД в бесконечном цилиндре для слоистого течения жидкости, при предположении $H_z \equiv H_z(\rho, t)$ и $P \equiv P(\rho, t)$, сводится к решению уравнений теплопроводности для компонент вектора скорости v_φ , v_z и компоненты вектора напряженности магнитного поля H_z .

При подстановке вектора скорости, соответствующего слоистому течению жидкости, система уравнений МГД (1)–(8) примет вид

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \mu_m \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \right), \quad (9)$$

$$\frac{v_\varphi^2}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{1}{4\pi\rho_0} H_z \frac{\partial H_z}{\partial \rho}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \mu \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial v_\varphi}{\partial \rho} \right) \right) - \mu \frac{v_\varphi}{\rho^2}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \mu \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial v_z}{\partial \rho} \right) \right), \quad (12)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{v_\varphi}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \chi \Delta T + \frac{\mu_m}{4\pi\rho_0 c_p} \left(\frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{\mu}{c_p} \left\{ \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \rho} - \frac{v_\varphi}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial \rho} \right)^2 \right\}. \quad (13)$$

В [6] были рассмотрены следующие граничные и начальные условия

$$H_z|_{\rho=R} = H_R \sin 2\pi t, \quad H_z(\rho, 0) = H_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2} \right), \quad (14)$$

$$v_\varphi|_{\rho=R} = R e^{-t}, \quad v_\varphi(\rho, 0) = \rho, \quad v_z|_{\rho=R} = v_{z,R} \equiv \text{const}, \quad v_z(\rho, 0) = v_{z,R} \frac{\rho^2}{R^2}. \quad (15)$$

Для поля температуры $T(\rho, \varphi, z, t)$ начальные и граничные условия полагаются однородными

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial D} = 0, \quad T|_{t=0} = 0, \quad (16)$$

где $\mathbf{n}$ – вектор нормали к поверхности цилиндра ∂D .

Аналитическое решение уравнений (9)–(12) с граничными и начальными условиями (14), (15) для слоистого течения жидкости имеет вид [6]

$$H_z(\rho, t) = H_R \sin 2\pi t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\gamma_n \frac{\rho}{R}\right)}{J_1(\gamma_n)} \left[8 \frac{H_0}{\gamma_n^3} e^{-t\mu_m \left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2} - \frac{H_R}{\gamma_n} \left\{ \frac{2R^2}{\gamma_n^2} + \sin 2\pi t + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\mu_m}{\pi} \cos 2\pi t - \frac{\mu_m}{\pi} e^{-t\mu_m \left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2} \right\} \right] / \left[\left(\frac{R^2}{\gamma_n^2} + \frac{\mu_m^2}{4\pi^2} \frac{\gamma_n^2}{R^2} \right) \right], \quad \text{где } J_0(\gamma_n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (17)$$

$$P(\rho, t) = \rho_0 \int_0^{\rho} \frac{v_\phi^2}{\rho} d\rho - \frac{1}{8\pi} H_z^2(\rho, t) + \theta(t),$$

где $\theta(t)$ – произвольная функция времени,

$$v_\phi(\rho, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\gamma_n \frac{\rho}{R}\right)}{J_2(\gamma_n)} \left(\frac{e^{-t} - e^{-\mu \left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2}}{\mu \left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^3 - \frac{\gamma_n}{R}} \right) + \rho e^{-t}, \quad \text{где } J_1(\gamma_n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (18)$$

$$v_z(\rho, t) = v_{z,R} \left[1 - 8 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t \mu \left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2} \frac{J_0\left(\gamma_n \frac{\rho}{R}\right)}{\gamma_n^3 J_1(\gamma_n)} \right], \quad \text{где } J_0(\gamma_n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (19)$$

где $J_0(\rho)$, $J_1(\rho)$, $J_2(\rho)$ – функции Бесселя нулевого, первого и второго порядка соответственно.

Остановимся более подробно на решении уравнения (13) в цилиндре $\rho \in [0; R]$, $\phi \in [0; 2\pi]$, $z \in [0; l]$. Число узловых точек по координатам $\{\rho, \phi, z\}$ было выбрано $102 \times 100 \times 102$, шаг по времени равняется 10^{-4} . Задачи (13), (16) решались методом контрольного объема. Аппроксимация конвективно-диффузионного члена, входящего в уравнение (13), была выполнена по экспоненциальной схеме, адаптированной для цилиндрической системы координат. Для декартовых координат эта схема для метода контрольных объемов описана в [7]. СЛАУ решалась методом сопряженных градиентов, реализованным в сторонней библиотеке LIS (Library of iterative solvers), находящейся в свободном доступе по адресу www.ssisc.org. Отметим, что данная библиотека поддерживает использование технологий параллельных вычислений OpenMP и MPI. В данной работе алгоритм был адаптирован под применения только OpenMP.

Сначала были проведены тестовые расчеты для оценки точности вычисления по экспоненциальной схеме, аппроксимирующей конвективно-диффузионный член уравнения (13). Для этого было рассмотрено вспомогательное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial \phi} + \frac{l}{\pi} \frac{\partial T}{\partial z} = \Delta T + J_1\left(\gamma_1 \frac{\rho}{R}\right) \left(e^{-t \left(\left(\frac{\gamma_1}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \right)} - 1 \right) & \left[\cos\left(\pi \frac{z}{l}\right) (\cos \phi - \sin \phi) - \right. \\ & \left. - \sin\left(\pi \frac{z}{l}\right) (\cos \phi + \sin \phi) - \left(\left(\frac{\gamma_1}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \right) J_1\left(\gamma_1 \frac{\rho}{R}\right) \cos\left(\pi \frac{z}{l}\right) (\cos \phi - \sin \phi) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Аналитическое решение задачи (20), (16) имеет вид

$$J_1\left(\gamma_1 \frac{\rho}{R}\right) \left(e^{-t \left(\left(\frac{\gamma_1}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \right)} - 1 \right) \cos\left(\pi \frac{z}{l}\right) (\cos \phi + \sin \phi), \quad (21)$$

где $J_1'(\gamma_1) = 0$. Отметим, что данное решение получено на основе решения уравнения теплопроводности, рассматриваемого в цилиндре с условиями Неймана на границе, методом разделения переменных.

На рис. 1 представлен результат численного решения уравнения (20) с начальными и граничными условиями (16), при этом $R=5$, $z \in [0; 5]$. Рис. 1а иллюстрирует поле температуры при $t=1$ на поверхности цилиндра. Рис. 1б иллюстрирует поле температуры при $t=1$ в сечении плоскости, образованной осью Oz и биссектрисой угла XOY . Погрешность вычисле-

ния в сравнении с аналитическим решением (21) оценивалась максимальная абсолютная величиной δ_{abs} и средней относительной δ_{rel}

$$\delta_{abs} = \max \{ |T_{calc} - T_{an}| \}, \quad \delta_{rel} = \frac{1}{V} \int_D \frac{|T_{an} - T_{calc}|}{|T_{an}| + 10^{-14}} \cdot 100 \%,$$

где T_{an} – аналитическое значение температуры, T_{calc} – вычисленное значение температуры, максимум ищется по всем расчетным точкам, V – объем цилиндра D . По итогам расчетов получено

$$\delta_{abs} = 9 \cdot 10^{-4}, \quad \delta_{rel} = 0,6 \%$$

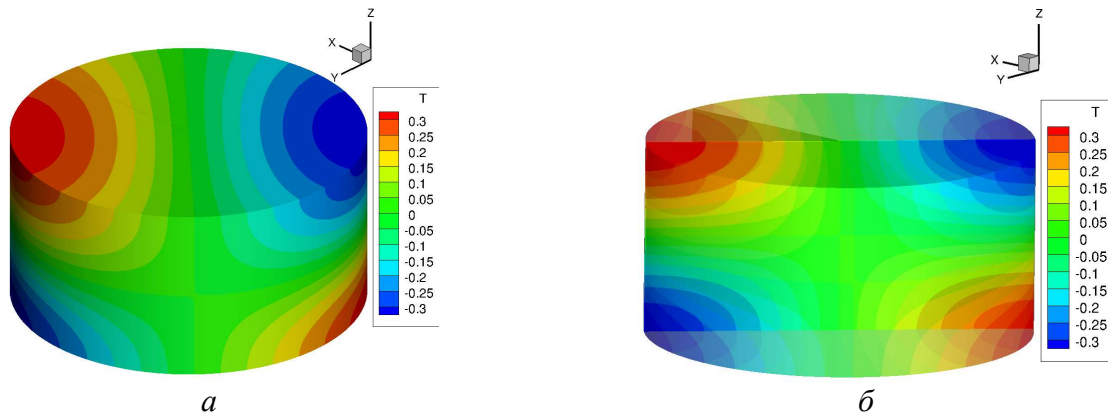


Рис. 1. Результат тестового расчета поля температуры:

a – при $t = 1$ на поверхности цилиндра;

б – при $t = 1$ в сечении плоскости, образованной осью Oz и биссектрисой угла XOY

Далее перейдем к результатам расчетов поля температур, определяемого уравнением (13) и условиями (16), для слоистого течения жидкости. При численном решении все параметры жидкости полагались равными единице.

Расчетные значения компонент вектора скорости v_φ , v_z и компоненты H_z вектора напряженности магнитного поля представлены в [6] и соответствуют выражениям (17)–(19). Производные по переменной ρ для этих компонент, определяющие источниковый член уравнения (13), рассчитывались по центрально-разностной схеме, а затем полученная функция интерполировалась в недостающих точках методом полиномов Эрмита [8]. На рис. 2 представлены результаты расчетов поля температур, соответствующие слоистому течению жидкости в цилиндре. Рис. 2*a* иллюстрирует поле температуры на поверхности цилиндра, рис. 2*б* – в сечении плоскостью XOZ .

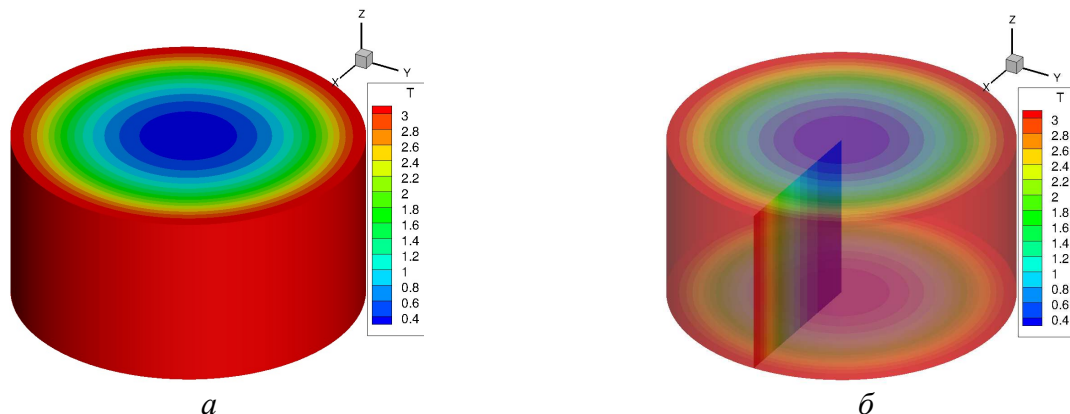


Рис. 2. Результат расчета поля температуры соответствующего слоистому течению жидкости:

a – при $t = 1$ на поверхности цилиндра; *б* – при $t = 1$ в сечении плоскостью XOZ

Рассмотрена задача моделирования тепловыделения в результате вязкого трения и джоулева подогрева в жидкости. Решение данного класса задач связано с разработкой параллельного программного обеспечения для моделирования пласта и управляющих воздействий на структуру течения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 16-29-15105, 15-41-00013-урал-а).

Литература

1. Емцев Б. Т. Техническая гидромеханика. М. : Машиностроение, 1987. 440 с.
2. Бетелин В. Б., Галкин В. А. Задачи управления параметрами несжимаемой жидкости при изменении во времени геометрии течения // ДАН. М. : Изд-во Академиздатцентр ; Наука, 2015. Т. 463. № 2. С. 149–151.
3. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М. : Наука. 1984. 352 с.
4. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика. Т. 1. М. : Наука, 1991. 600 с.
5. Аристов С. Н., Просвирыков Е. Ю. О слоистых течениях свободной конвекции // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9. № 4. С. 651–657.
6. Галкин В. А., Дубовик А. О. О моделировании слоистого течения вязкой магнитной несжимаемой жидкости во вращающейся трубе // Вестн. кибернетики. 2017. № 2 (26). С. 58–65.
7. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М. : Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
8. Калиткин Н. Н. Численные методы. М. : Наука, 1978. 512 с.