

УДК 531.72:519.87

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫТЕСНЕНИЯ ФЛЮИДА ИЗ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

В. Р. Душин¹, В. Ф. Никитин^{1,2}, Е. И. Скрылева^{1,2}

¹ *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,*

² *Федеральный научный центр*

*Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук,
jennyne@yandex.ru*

В работе рассмотрено численное моделирование двумерного вытеснения жидкости из пористой среды посредством менее вязкой жидкости. Подобная задача имеет особенность – неустойчивость фронта вытеснения. Численный расчет такого течения чувствителен не только к начальным возмущениям параметров, но и к выбору шаблона схемы. В работе показано, что использование схемы типа «крест» для расчета динамики насыщенности вытесняющей жидкости приводит к нефизичному распространению неустойчивости преимущественно вдоль координатных линий сетки. Исправить этот недостаток в двумерных расчетах можно использованием 9-точечного шаблона для расчета конвективной составляющей. В работе также подробно изложена неявная расчетная схема второго порядка точности по пространству с использованием многомерного ограничителя потоков. В качестве тестовой задачи рассмотрено вытеснение нефти водой, подающейся через скважину в горизонтальный нефтеносный пласт; добывающая же скважина при этом может содержать, а может и не содержать трещину гидроразрыва. Показано, что такая трещина интенсифицирует процесс добычи нефти, но в итоге не приводит к итоговому увеличению нефтеотдачи пласта.

Ключевые слова: флюид, пористая среда, математическое моделирование.

COMPUTER SIMULATION OF FLUID EXPULSION FROM POROUS MEDIUM

V. R. Dushin¹, V. F. Nikitin^{1,2}, E. I. Skryleva^{1,2}

¹ *Lomonosov Moscow State University,*

² *System Research Institute, Russian Academy of Sciences, jennyne@yandex.ru*

The paper considers computer simulation of two-dimensional fluid displacement from a porous medium by less viscous liquid. Such problem has a feature – the instability of the displacement front. The numerical calculation of such flow is responsive not only to the initial perturbations of the parameters, but also to the choice of a scheme template. The paper shows that the use of a “cross” type scheme for dynamic analysis of the displacing fluid saturation leads to an unphysical propagation of the instability mainly along the grid coordinate lines. This drawback in two-dimensional calculations can be corrected by using a 9-point template for calculating the convection component. The paper describes in greater detail the implicit computational scheme of the second order accuracy in space using a multidimensional flow limiter. As a test problem, the water-oil displacement fed through a well into a horizontal oil-bearing formation is considered. Whereas the development well may contain or not contain a hydraulic fracturing crack. The paper demonstrates that such crack intensifies the oil extraction process, but on the whole does not lead to an ultimate enhanced oil recovery.

Keywords: fluid, porous medium, mathematical modeling.

Введение. Работа посвящена прежде всего исследованию поведения численной схемы в применении к расчету фильтрации в пористой среде [1–6]. Как правило, в практических расчетах популярна схема «крест»; для двумерных задач эта схема реализуется аппроксимациями частных производных на 5-точечном шаблоне, если только в математической модели нет смешанных производных. Подобная схема может успешно быть использована для расчета устойчивых течений, но в том случае, когда физическая задача неустойчива по начальным условиям [7–9], крестообразный шаблон приводит к росту неустойчивостей преимущественно в направлении лучей этого креста, т. е. вдоль линий координатной сетки. Такое поведение решения может маскироваться тем, что линии сетки часто бывают расположены как раз вдоль основного направления течения, что и приводит к достаточно правдоподобным результатам во многих ранее опубликованных работах. Вместе с тем применение тех же самых моделей в условиях, когда координатные линии располагаются под углом к направлению течения, заданному, например, перепадом давления между входом и выходом, приводит к явно нефизичному поведению решения.

Особенно эта нефизичность заметна при моделировании растекания жидкости, подающейся из скважины малого размера при использовании сетки, не адаптированной к геометрии скважины. Важно при этом, чтобы растекание было физически неустойчивым, т. е. растекающаяся жидкость была менее вязкой по сравнению с жидкостью, первоначально пропитывающей пласт.

Поэтому в качестве тестовой задачи будем использовать задачу о динамике добычи нефти при помощи вытеснения ее водой. При этом добывающая скважина (на выходе) будет иметь или не иметь трещины гидроразрыва. Дополнительной задачей, кроме тестирования численной схемы, будет исследование влияния трещины гидроразрыва на процесс добычи нефти и возможностей увеличения коэффициента извлечения нефти [10–12].

Основные черты математической и численной моделей таковы:

Два несжимаемых флюида в поровом пространстве, тепловые эффекты не учитываются.

Просачивание моделируется законом Дарси, с учетом относительных проницаемостей фаз, без учета капиллярных эффектов на стыке фаз.

Проницаемость и пористость зависят от местоположения. Трещина гидроразрыва моделируется областью повышенной проницаемости и пористости. Кроме того, проницаемость во всей области имеет небольшую случайную «рябь», провоцирующую возникновение неустойчивости вытеснения.

Математическая постановка задачи описывает вытеснение одним флюидом другого за счет перепада давлений между областями входа и выхода. Внешняя граница непроницаема.

Численная модель строится на равномерной квадратной сетке. Переменные разнесены: в центрах ячеек определены давление и насыщенности фаз. На гранях (сторонах) ячеек определены компоненты скорости фильтрации фаз. Все уравнения решаются неявно с использованием итерационных методов.

Численная модель включает в себя моделирование решения уравнения динамики насыщенности. При этом возможны схемы с использованием 5-точечного и 9-точечного шаблонов для моделирования первой частной производной насыщенности по координатам. Тестируются оба варианта.

Математическая модель. Модель включает в себя уравнения баланса (массы и импульса), моделирование относительных проницаемостей и капиллярного давления, постановку расчетной задачи; также в этом разделе приводится перечень параметров (исходных данных).

Уравнения баланса. Уравнения баланса массы фазы k записаны без учета межфазного массообмена:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_k S_k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_k u_{k,j}) = 0, \quad (1)$$

где $\varphi(x)$ – пористость, ρ_k – истинная плотность фазы, s_k – насыщенность фазы, t – время, $u_{k,j}$ – компонента j скорости фильтрации фазы, x_j – компонента координат точки. В уравнениях (1) проводится суммирование по повторяющемуся индексу j . На истинную плотность каждой фазы можно поделить, и параметр ρ_k в дальнейшем исключить. Скелет считаем неподвижным, и пористость выносим за знак производной по времени:

$$\varphi \frac{\partial s_k}{\partial t} + \frac{\partial u_{k,j}}{\partial x_j} = 0. \quad (2)$$

Суммарная скорость фильтрации u_j флюида определяется как сумма скоростей фильтрации:

$$u_j = \sum_k u_{k,j}. \quad (3)$$

Суммирование уравнений (2) с использованием определения (3) приводит к уравнению неразрывности для скорости u_j , поскольку по определению сумма насыщенностей – единица:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \quad (4)$$

Уравнения импульса сводятся к законам Дарси для фаз:

$$u_{k,j} = -\frac{K k_k^r}{\mu_k} \frac{\partial p}{\partial x_j}, \quad (5)$$

где k_k^r – относительная проницаемость фазы k , μ_k – динамическая вязкость, $K(x)$ – абсолютная проницаемость, p – давление в порах.

Введем обозначение для относительных мобильностей и доли относительной мобильности фазы:

$$m_k = \frac{k_k^r}{\mu_k}, \quad f_k = \frac{m_k}{\sum_q m_q}. \quad (6)$$

Пользуясь определениями (6) и уравнениями Дарси (5), можно выразить суммарную скорость фильтрации через градиент давления и сумму относительных мобильностей, а скорости фильтрации фазы – через суммарную скорость фильтрации и долю мобильности фазы:

$$u_j = -K \sum_q m_q \frac{\partial p}{\partial x_j}, \quad u_{k,j} = f_k u_j. \quad (7)$$

Пользуясь выражениями (7), преобразуем уравнение неразрывности (4) для суммарной скорости фильтрации, приведя его к уравнению относительно давления:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(K \sum_q m_q \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = 0. \quad (8)$$

Уравнение динамики насыщенности фазы (2) с учетом обозначений (6) и выражений (7) можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{\partial s_k}{\partial t} + \varphi^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} (f_k u_j) = 0. \quad (9)$$

Результаты этого раздела относятся к совместному течению любого количества фаз, от двух и больше.

Моделирование относительных проницаемостей. Относительные проницаемости k_k^r рассчитываются при помощи модели Брукса – Кори:

$$k_k^r(s_k) = \begin{cases} k_k^0 S_k^{n_k}, & s_k \geq s_k^{res}, \\ 0, & s_k < s_k^{res}, \end{cases} \quad S_k = \frac{s_k - s_k^{res}}{1 - \sum_q s_q^{res}}, \quad (10)$$

где $k_k^0 > 0$ и $n_k > 0$ – параметры модели Брукса – Кори, а приведенная насыщенность фазы S_k ограничивает совместное течение фаз диапазоном, определенным остаточными насыщенностями фаз s_k^{res} :

$$0 \leq s_k^{res} \leq 1, \quad \sum_q s_q^{res} < 1, \quad 0 \leq S_k \leq 1. \quad (11)$$

Следует заметить, что при выполнении (11) моделируется пористая среда, пропитанная всеми флюидами; пропитка среды фазой при $s_k < s_k^{res}$ этой моделью не описывается.

Далее будем везде полагать, что пропитка всеми флюидами имела место, и в этих условиях можно не учитывать нулевую альтернативу (10).

Сводка рабочих уравнений и определяющих соотношений модели. Будем считать, что в системе две фазы. Насыщенность s_k и приведенную насыщенность S_k первой фазы будем писать без индекса, а насыщенность второй – выражать через первую. Точно также поступим с долей относительной мобильности f_k . Введем новые параметры как комбинацию множителя при относительной проницаемости k_k^0 и вязкости μ_k :

$$m_k^0 = \frac{k_k^0}{\mu_k}.$$

Запишем в этих обозначениях выражения для относительных мобильностей при помощи модели Брукса – Кори (10), и определим суммарную абсолютную мобильность m :

$$\begin{cases} S = \frac{s-s_1^{res}}{1-s_1^{res}-s_2^{res}} \\ m = K \cdot [m_1^0 S^{n_1} + m_2^0 (1-S)^{n_2}] \\ f = \left[1 + \frac{m_2^0 (1-S)^{n_2}}{m_1^0 S^{n_1}} \right]^{-1} \end{cases} \quad (12)$$

Давление p получается решением уравнения (8), которое с обозначениями (12) выглядит как:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(m \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = 0. \quad (13)$$

Суммарная скорость фильтрации u_j рассчитывается на основе полученного решением (13) давления:

$$u_j = -m \frac{\partial p}{\partial x_j}. \quad (14)$$

Динамика насыщенности первой фазы рассчитывается на основе уравнения (9), которое после переписывания выглядит как:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \varphi^{-1} \frac{df}{ds} u_j \frac{\partial s}{\partial x_j} = -\varphi^{-1} f(s) \frac{\partial u_j}{\partial x_j}. \quad (15)$$

Выражение (15) удобно для использования в численном решении тем, что поле скорости u_j соленоидально в случае несжимаемости фаз, и правая часть его в силу (4) равна нулю. Производную же df/ds , входящую в левую часть (15), можно выразить явно с использованием уже вычисленного значения f и с учетом (12) следующим образом:

$$\frac{df}{ds} = \frac{f(1-f)}{1-s_1^{res}-s_2^{res}} \cdot \left(\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{1-s} \right). \quad (16)$$

Постановка тестовой задачи. Расчетная область имеет размер $L_x \times L_y$. В точке $(x, y)_{in}$ находится источник, в точке $(x, y)_{out}$ – сток. На источнике задано давление P_{in} , на стоке $P_{out} < P_{in}$. Внешняя граница непроницаема, что вследствие зависимости скорости от давления (14) приводит к условию Неймана для давления на ней. Граничное условие по насыщенности вытесняющей жидкости задано при $(x, y)_{in}$; это $s = s_{in} = 1 - s_2^{res}$; других граничных условий для этого параметра нет вследствие того, что уравнение (15) имеет первый порядок.

В качестве начальных условий задается $s = s_1^{res}$ везде, кроме источника.

Абсолютная проницаемость задается следующим образом. В окрестности выходной скважины может задаваться трещина гидроразрыва, которая моделируется узкой областью повышенной по сравнению с фоновой проницаемости и пористости. Трещина эта прямая, определяется длиной L и углом своего азимута α , а окрестность – небольшим значением радиуса r . Обозначим множество точек, где эти параметры повышены F . Тогда имеем:

$$K(x, y) = \begin{cases} K_f, & (x, y) \in F, \\ K_0, & (x, y) \notin F; \end{cases} \quad \varphi(x, y) = \begin{cases} \varphi_f, & (x, y) \in F, \\ \varphi_0, & (x, y) \notin F. \end{cases} \quad (17)$$

Здесь множество F можно определить как объединение шаров радиуса r с центрами (x_0, y_0) , где

$$x_0 = x_{out} + L \cos(\alpha) s, \quad y_0 = y_{out} + L \sin(\alpha) s, \quad s \in [-1/2; +1/2].$$

Помимо этого, для возбуждения в системе слабой неустойчивости, которая может развиться в сильную при неустойчивой физической задаче вытеснения, и которая вполне соответствовала бы реальным условиям физической задачи, на проницаемость накладывается слабая случайная «рябь», так что окончательно абсолютная проницаемость определяется как

$$\hat{K} = K \exp(\delta \xi),$$

где ξ – случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[-1; +1]$, «разыгрываемая» в каждой ячейке сетки, а δ – достаточно малая величина.

В качестве макропараметров, которые следует определить из решения задачи, основными являются на входе: мгновенный поток первой фазы q_{in} и кумулятивный (накопленный) поток Q_{in} :

$$q_{in,1}(t) = \oint_{\Sigma_{in}} f(s) u_n d\sigma, \quad Q_{in,1}(t) = \int_0^t q_{in}(\tau) d\tau. \quad (18)$$

На выходе обеих фаз, мгновенный и кумулятивный:

$$\begin{aligned} q_{out,1}(t) &= - \oint_{\Sigma_{out}} f(s) u_n d\sigma, \quad Q_{out,1}(t) = \int_0^t q_{out,1}(\tau) d\tau \\ q_{out,2}(t) &= - \oint_{\Sigma_{out}} (1-f) u_n d\sigma, \quad Q_{out,2}(t) = \int_0^t q_{out,2}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (19)$$

где Σ_{in} и Σ_{out} – замкнутые поверхности малого размера, охватывающие точки входа и выхода, соответственно, n – внешняя нормаль к этим поверхностям.

Численная модель. Используется равномерная сетка из прямоугольных ячеек размером h_x, h_y . В центрах ячеек размещаются проницаемость K , пористость φ , насыщенность s . Давление p и все величины, алгебраически связанные с указанными (приведенная насыщенность, мобильности фаз и прочее). На гранях размещаются компоненты скорости u_j , причем компонента вектора вдоль координаты размещается на грани, нормальной к этой координате. Такое размещение переменных называется разнесенным.

Нумерацию ячеек в настоящей работе будем обозначать двухиндексной символикой: первый индекс соответствует направлению вдоль x , второй – вдоль y . Нумерацию граней (сторон) ячеек будем делать двухиндексной относительно центра соответствующей грани, указывая добавку индекса $1/2$ туда, где это необходимо. Некоторые величины в численной модели соответствуют углам ячейки, здесь будет также двухиндексная нумерация. В программной реализации использовалась сплошная нумерация, независимая по ячейкам и граням, так что в работе подобная символика сделана для наглядности.

Дискретизация уравнения для уравнения давления. Для дискретизации уравнения (13) используется схема типа креста, в которой участвует сама ячейка и, может быть, ее соседи через грань, но никакие иные точки. В ячейках, соответствующих входу и выходу, давление задано, а на границе – условие Неймана. Разностная схема второго порядка точности имеет следующий вид в регулярных точках:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_x^2} \left(\frac{m_{i+1,j} + m_{i,j}}{2} (p_{i,j} - p_{i+1,j}) + \frac{m_{i-1,j} + m_{i,j}}{2} (p_{i,j} - p_{i-1,j}) \right) + \\ & + \frac{1}{h_y^2} \left(\frac{m_{i,j+1} + m_{i,j}}{2} (p_{i,j} - p_{i,j+1}) + \frac{m_{i,j-1} + m_{i,j}}{2} (p_{i,j} - p_{i,j-1}) \right) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Отличия схемы в нерегулярных точках от схемы (20) таковы: если какой-либо из индексов при переменной в этом уравнении попадает за предел рабочей области, то слагаемое,

содержащее эту переменную, обнуляется (не используется). Это соответствует граничным условиям Неймана. Кроме того, в точках входа и выхода вместо уравнений (20) используются:

$$p_{i,j} = P_{in}|P_{out}. \quad (21)$$

Дискретизация (20), безусловно, устойчива, если только мобильность среды $m > 0$. Система уравнений обладает сильно разреженной матрицей без диагонального преобладания; за счет того, что мобильность – переменная величина, эта матрица не симметрична. Расчет СЛАУ с этой матрицей целесообразно вести одним из методов сопряженных градиентов, например, Bi-CGStab.

Дискретизация для получения скорости фильтрации. Скорость фильтрации u_j рассчитывается для каждой компоненты на соответствующей грани. Этот расчет должен быть согласован с дискретизацией уравнения для давления (20), так что он выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} u_{x,i+1/2,j} = \frac{m_{i+1,j} + m_{i,j}}{2} \cdot \frac{p_{i,j} - p_{i+1,j}}{h_x} \\ u_{y,i,j+1/2} = \frac{m_{i,j+1} + m_{i,j}}{2} \cdot \frac{p_{i,j} - p_{i,j+1}}{h_y} \end{cases} \quad (22)$$

На гранях, замыкающих рабочую область, скорость явно полагается равной нулю, вместо ее вычисления по формулам (22). Тем самым реализуется условие непротекания и снимается проблема индексов, выходящих за границу рабочей области.

Расчет продвижения насыщенности. Продвижение насыщенности на новый слой по времени делается на основе уравнения (15); перед началом расчета должно быть известно заранее вычисленное значение скорости фильтрации на всех гранях.

Для использования метода расчета, описанного в этой работе, уравнение (15) должно быть дискретизовано так, чтобы оно имело форму:

$$\frac{s_n^+ - s_n^-}{h_t} - \theta \sum_{m \neq n} \lambda_{n,m} (s_m^+ - s_n^+) + \theta \lambda_n^0 s_n^+ = \quad (23)$$

$$= (1 - \theta) \sum_{m \neq n} \lambda_{n,m} (s_m^- - s_n^-) + (1 - \theta) \lambda_n^0 s_n^-,$$

где $0 \leq \theta \leq 1$ – весовой коэффициент, характеризующий неявность численной схемы. Для чисто неявной схемы $\theta = 1$, для явной $\theta = 0$, а для схемы Кранка – Николсона $\theta = 1/2$. Индекс n – это обобщение индекса (i, j) ячейки; на практике суммирование ведется по соседним ячейкам, окружающим центральную. Шаблон суммирования в схеме (23) может содержать как 5 (схема крест), так и 9 ячеек.

Заметим, что основную проблему в приведении уравнения (15) к виду (23) представляет лишь дискретизация первой частной производной насыщенности по координатам. Ее можно сделать на 9-точечном шаблоне равномерной декартовой сетки с использованием весов $\omega_0 \geq 0, \omega_1 \geq 0$ следующим способом:

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial x} \approx \frac{1}{2h_x} (\omega_1 (s_{i+1,j+1} - s_{i-1,j+1}) + \omega_0 (s_{i+1,j} - s_{i-1,j}) + \omega_1 (s_{i+1,j-1} - s_{i-1,j-1})) \\ \frac{\partial s}{\partial y} \approx \frac{1}{2h_y} (\omega_1 (s_{i+1,j+1} - s_{i+1,j-1}) + \omega_0 (s_{i,j+1} - s_{i,j-1}) + \omega_1 (s_{i-1,j+1} - s_{i-1,j-1})) \end{cases} \quad (24)$$

При этом должно выполняться $\omega_0 + 2\omega_1 = 1$. При $\omega_1 = 0$ угловые ячейки из расчета исключаются, и получается схема типа «крест». Выверенная же по диагональным направлениям схема на 9-точечном шаблоне получается при следующих значениях весов:

$$\omega_0 = \frac{3}{4}, \quad \omega_1 = \frac{1}{8}.$$

Значение λ_n^0 равно приближению 2 порядка от дивергенции скорости u_j с противоположным знаком, и за счет этого обнуляется с той точностью, с которой рассчитывается дискретизованное уравнение для давления. Поэтому точность решения последнего имеет критическое значение – иначе можно получить источник или сток массы.

Уравнение (23) с коэффициентами $\lambda_{n,m}$, определенными на основе дискретизации производной (24) приводит к неустойчивой в общем случае схеме независимо от величины

шага по времени. Для его стабилизации следуем процедуре, использующей метод TVD на основе модификации коэффициентов уравнения, с учетом многомерного ограничителя потоков по Кузьмину. На первом этапе модификации рассчитывается минимальная для линейного случая искусственная диффузия между соседними ячейками n, m :

$$\delta_{n,m} = \max\{0, -\lambda_{n,m}, -\lambda_{m,n}\}. \quad (25)$$

Диффузия, определенная (25), всегда не отрицательна и симметрична по своим индексам (коэффициенты λ по индексам не обязательно симметричны). Она обеспечивает свойство TVD с минимальной модификацией схемы в рамках линейной модели, т. е. без использования в своем построении самого решения, а не только коэффициентов схемы. В рамках линейной модели стабилизации численной схемы лучшего добиться нельзя; это схема 1-го порядка по пространству. Улучшения качества численной схемы можно добиться лишь с использованием самого решения, т. е. внося нелинейность: коэффициенты диффузии δ уменьшаются настолько, насколько это возможно для сохранения свойства монотонности схемы, величина уменьшения искусственной диффузии называется антидиффузией.

Этап построения антидиффузии является нелинейным. Вначале строятся коэффициенты ограничителей $R_n^\pm$, соответствующие ячейкам. Для ячейки n вычисляется:

$$\begin{aligned} Q^\pm &= \sum_{m \neq n} \max\{0, \lambda_{n,m}\} \max_{\min} \{s_m - s_n, 0\} \\ P^\pm &= \sum_{m \neq n} \min\{0, \lambda_{n,m}\} \min_{\max} \{s_m - s_n, 0\} \\ R_n^\pm &= \max \left\{ 0, \min \left\{ 1, \frac{Q^\pm}{P^\pm} \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

При этом деления на нуль избегают так, что при нулевых значениях знаменателя в качестве результата для $R_n^\pm$ возвращают нуль. Следует обратить внимание, что в массивах при ячейке промежуточные значения $Q^\pm$ и $P^\pm$ сохранять необязательно.

Затем на основе коэффициентов схемы $\lambda_{n,m}$, ранее полученных коэффициентов диффузии $\delta_{n,m}$ (25) и ограничителей $R_n^\pm$ (26), строятся коэффициенты антидиффузии $\alpha_{k,f}$. Расчет ведется с учетом направления потока между ячейками, которое можно оценить без привлечения явного значения скорости, на основе только лишь разности коэффициентов аппроксимации разностной схемы $\lambda_{n,m} - \lambda_{m,n}$:

$$\alpha_{n,m} = \begin{cases} \begin{cases} \min\{R_n^+ \delta_{n,m}, \lambda_{m,n} + \delta_{m,n}\}, & s_n \geq s_m \\ \min\{R_n^- \delta_{n,m}, \lambda_{m,n} + \delta_{m,n}\}, & s_n < s_m \end{cases}, & \lambda_{n,m} \leq \lambda_{m,n} \\ \begin{cases} \min\{R_m^+ \delta_{n,m}, \lambda_{n,m} + \delta_{n,m}\}, & s_m \geq s_n \\ \min\{R_m^- \delta_{n,m}, \lambda_{n,m} + \delta_{n,m}\}, & s_m < s_n \end{cases}, & \lambda_{n,m} > \lambda_{m,n}. \end{cases} \quad (27)$$

В стабилизированной монотонной схеме, имеющей второй порядок точности по пространству везде, кроме областей сильного градиента решения, вместо коэффициентов схемы $\lambda_{n,m}$ применяются коэффициенты $\lambda_{n,m}^*$, вычисленные на основе поправок δ и α , полученных выражениями (25) и (27) соответственно:

$$\lambda_{n,m}^* = \lambda_{n,m} + \delta_{n,m} - \alpha_{n,m}. \quad (28)$$

Описанная выше численная схема замечательна тем, что не зависит от параметров метрики вычислительного шаблона за исключением коэффициентов аппроксимации λ независимо от того, обеспечивают они монотонность схемы или нет. В том случае, когда они ее обеспечивают сразу, коэффициенты искусственной диффузии и антидиффузии, вычисляемые по вышеприведенным формулам, будут заведомо равны нулю.

Результаты тестовых расчетов по модели. Нами было проведено три тестовых расчета и два их сравнения. В первых двух расчетах ставилась задача расчета динамики вытеснения нефти из пласта с помощью воды, закачиваемой в нагнетающую скважину. При этом добывающая скважина имела готовую трещину гидроразрыва, расположенную под углом к

линии, соединяющей скважины. Разница между постановкой задач заключалась лишь в использовании аппроксимации градиента водонасыщенности схемой на 5-точечном и 9-точечном шаблоне. Целью сравнения было показать, что используемый во многих работах 5-точечный шаблон для расчета динамики водонасыщенности в двумерной задаче приводит к нефизическому распределению насыщенности в условиях неустойчивого вытеснения тогда, когда градиент давления расположен под углом к осям координат. Дополнительная цель расчетов – получить соответствующие результаты для случая наличия трещины гидроразрыва.

Третий расчет проводился на 9-точечном шаблоне с теми же исходными данными, что и первый, за исключением наличия трещины гидроразрыва. Целью сравнения результатов было показать, как наличие или отсутствие подобного способа интенсификации нефтедобычи влияет на ее динамику, в том числе на итоговую выработку скважины.

Исходные данные и граничные условия. Расчеты проводились в размерных переменных, и для расчетов использовались следующие исходные данные:

$N_x = 501,$	$N_y = 301$	Число ячеек в каждом из направлений
$L_x = 500$ м,	$L_y = 300$ м	Размеры рабочей области
$X_{in} = 150$ м,	$Y_{in} = 150$ м	Координаты нагнетающей скважины
$X_{out} = 350$ м,	$Y_{out} = 150$ м	Координаты добывающей скважины
$K_0 = 0.5$ Дарси		Абсолютная проницаемость пласта
$\varphi_0 = 0.2$		Пористость пласта
$\mu_w = 0.001$ Па · с		Вязкость водяной фазы
$\mu_o = 0.1$ Па · с		Вязкость нефтяной фазы
$k_w^0 = 0.2,$	$k_o^0 = 0.2$	Коэффициенты относительных проницаемостей фаз
$n_w^0 = 2$	$n_o^0 = 2$	Степени в формулах для относительных проницаемостей
$s_w^{res} = 0.1,$	$s_o^{res} = 0.1$	Остаточные насыщенности фаз
$P_{in} = 500$ атм		Давление в нагнетающей скважине на уровне пласта
$P_{out} = 5$ атм		в добывающей скважине на уровне пласта
δ		Уровень возмущения проницаемости и пористости, провоцирующий развитие неустойчивости вытеснения

Отметим, что координаты задавались от левого нижнего угла рабочей области, так что линия между нагнетающей и добывающей скважинами располагалась вдоль координаты X . Если в расчетах имелась трещина гидроразрыва, ее параметры задавались следующими:

$L_f = 100$ м	Общая длина трещины, которая располагается по обе стороны от добывающей скважины
$\theta_f = 45^\circ$	Азимут трещины в градусах, направление трещины отсчитывается от положительного направления оси абсцисс против часовой стрелки
$K_f = 50$ Дарси	Абсолютная проницаемость ячеек, приходящихся на трещину
$\varphi_f = 0,4$	Пористость ячеек, приходящихся на трещину

Из этих данных видно, что линия между нагнетающей скважиной и ближайшим к ней концом трещины гидроразрыва расположена под углом к оси абсцисс. Это же будет видно из следующих рисунков.

Сравнение результатов расчетов на 5-точечном и 9-точечном шаблонах. На рис. 1 изображена эволюция приведенной водонасыщенности S в том случае, когда около добывающей скважины имеется трещина гидроразрыва. Слева помещена картина для расчетов на 5-точечном шаблоне, справа – на 9-точечном. Данные приводятся через каждые $5 \cdot 10^6$ с; расчет приводится до момента, когда нагнетаемая вода достигает добывающей скважины.

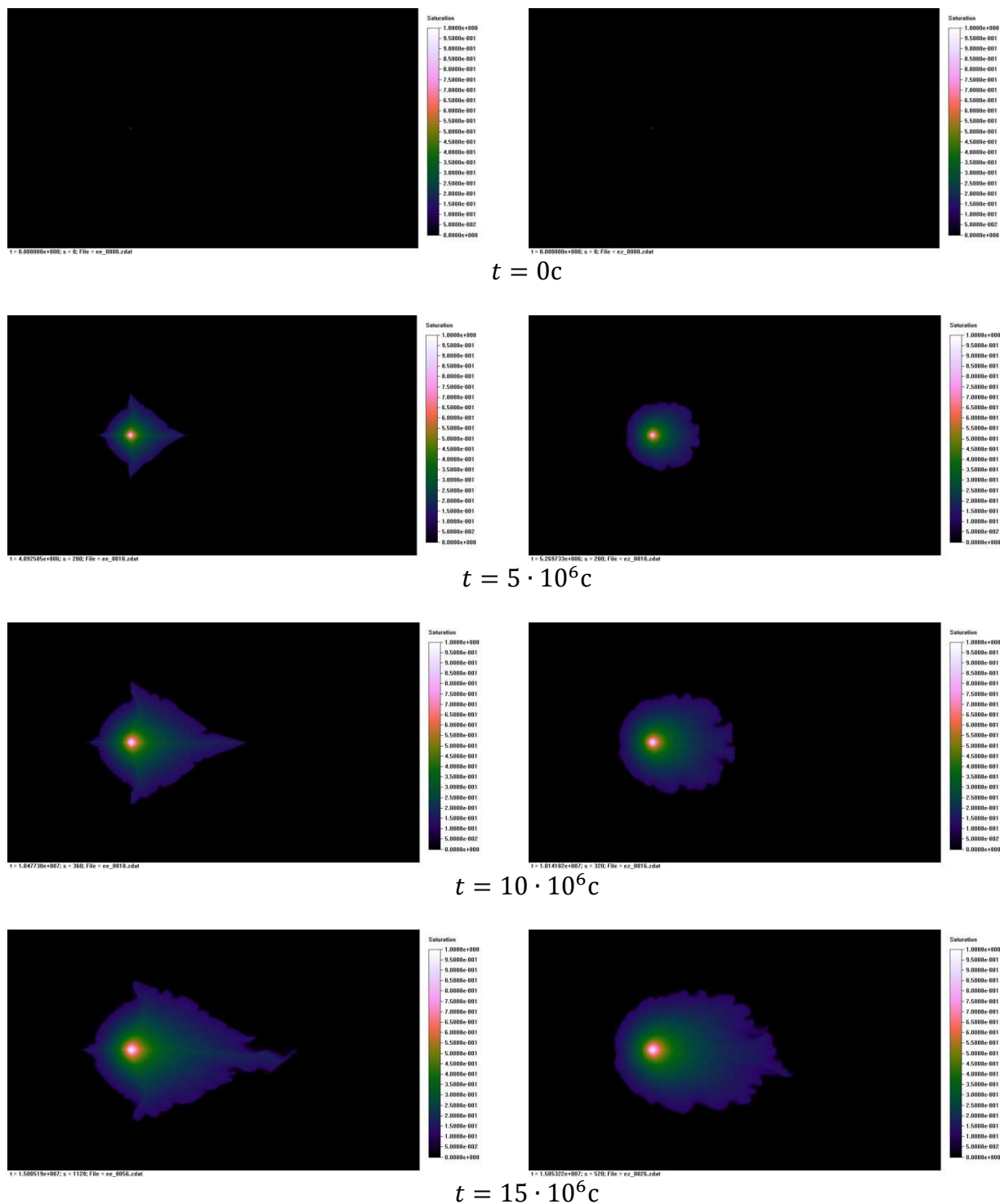


Рис. 1. Распределение приведенной водонасыщенности S с течением времени:
слева расчет на 5-точечном шаблоне, справа – на 9-точечном

Из рис. 1 видно, что в обоих случаях вытеснение неустойчивое: на фронте вытеснения образуются пальцы, по которым распространяется закачиваемая в нагнетающую скважину вода. Но при расчете на 5-точечном шаблоне схемой «крест» приоритетным направлением распространения пальцев является распространение вдоль координатных линий. В случае же 9-точечного шаблона координатные направления не определяют этого приоритета. Видно также, что распространение вытесняющей жидкости вдоль координатных линий для схемы «крест» усиливается даже тогда, когда впереди нет явного центра притяжения наподобие

конца трещины гидроразрыва или самой добывающей скважины, что заметно по форме области проникновения воды влево, вверх и вниз от нагнетающей скважины.

На рис. 2 изображено распределение абсолютной величины суммарной скорости фильтрации обеих фаз (воды и нефти) в эти же моменты времени; слева расчет на 5-точечном, справа – на 9-точечном шаблоне.

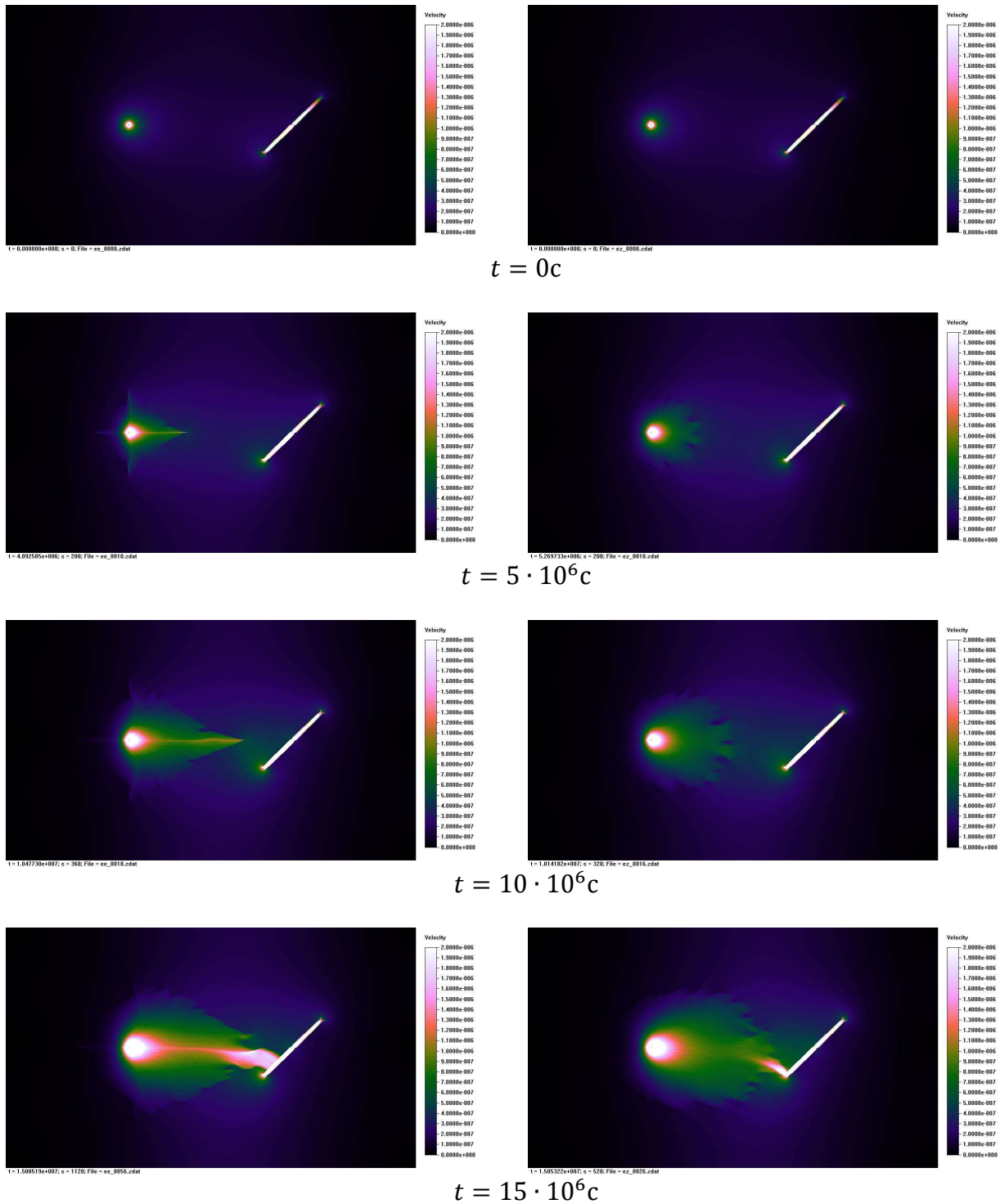
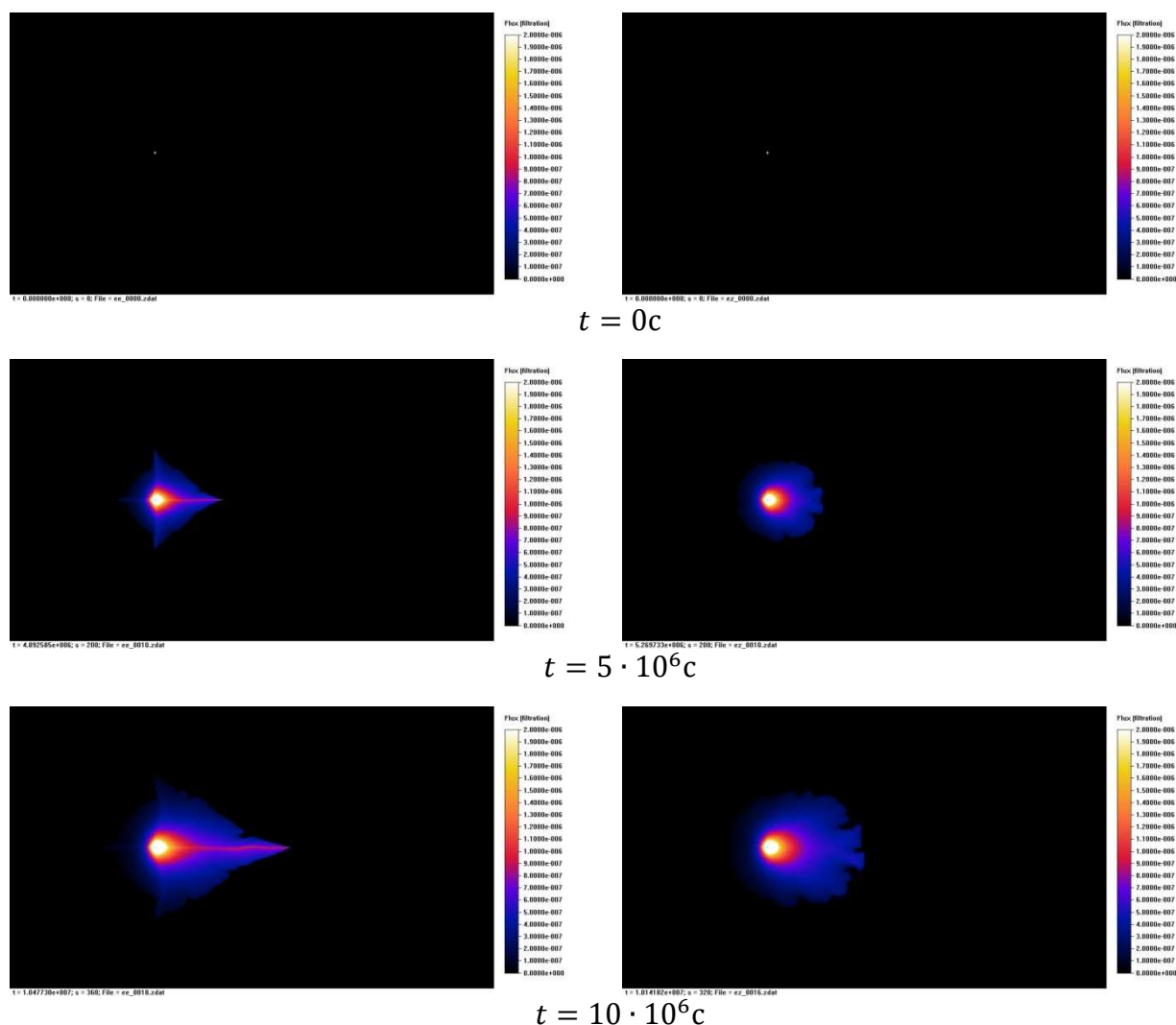


Рис. 2. Распределение суммарной скорости фильтрации $|u|$ с течением времени: слева расчет на 5-точечном шаблоне, справа – на 9-точечном

Рис. 2 показывает, как развивается поле скорости по мере нагнетания в систему воды. На нем в том числе хорошо видна сама трещина гидроразрыва, поскольку по ней движение весьма интенсивное по сравнению с фильтрацией в окружающем ее пространстве. В обоих случаях движение постепенно усиливается, поскольку вязкость воды существенно меньше, что приводит к повышению общей мобильности среды по мере увеличения количества воды. При расчете на 5-точечном шаблоне получено, что главный канал движения образуется вдоль координатной линии, все остальные пальцеобразные выступы резко деградированы по сравнению с основным. Даже когда этот канал подходит к трещине гидроразрыва, конец которой лежит не на продолжении линии координат, он от нее отклоняется лишь непосредственно перед трещиной, и тем не менее окончательно соединяется не с концом трещины, а с точкой, находящейся между этим концом и добывающей скважиной (она приходится на середину трещины).

Когда расчет ведется на 9-точечном шаблоне, образуется несколько конкурирующих друг с другом пальцеобразных каналов; преимущественное течение по одному из пальцев возникает лишь вблизи конца трещины. При прорыве воды к трещине гидроразрыва главный канал подходит строго к концу этой трещины. Тем не менее, сохраняются и менее интенсивные вторичные пальцеобразные каналы, практически подавленные при расчете на 5-точечном шаблоне.

На рис. 3 изображено распределение абсолютной величины скорости фильтрации водной фазы в эти же моменты времени; слева расчет на 5-точечном, справа – на 9-точечном шаблоне.



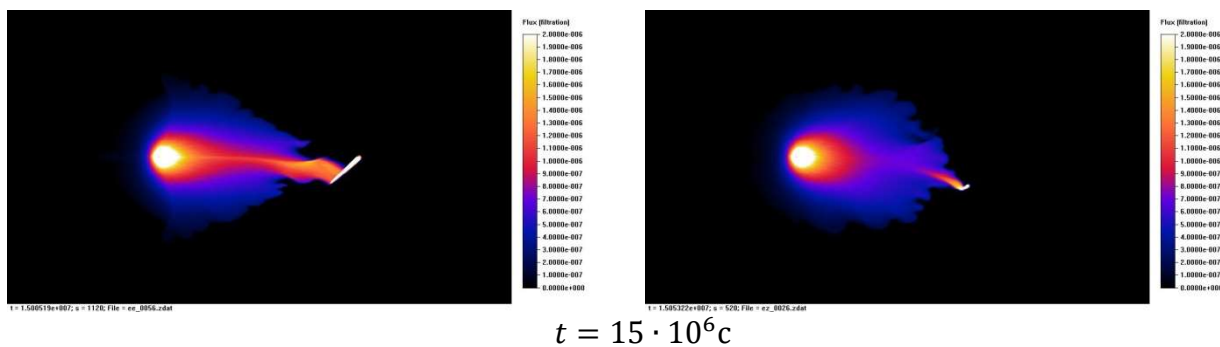


Рис. 3. Распределение скорости фильтрации воды $|u_w|$ с течением времени:
слева расчет на 5-точечном шаблоне, справа – на 9-точечном

Фактически, на этом рисунке от суммарного потока, изображенного на рис. 2, отделен поток нефтяной фазы и оставлен лишь поток вытесняющей жидкости. Картина развития его в общем повторяет те же выводы, что были сделаны и ранее. Из нового можно заметить то, что при расчете на 5-точечном шаблоне прорыв воды к трубе наступил явно раньше. Это можно объяснить высоким приоритетом движения пальцев вдоль координатных линий при расчете схемой «крест», что делает основной канал движения вдоль координаты более мощным, и достижение цели – более быстрым.

На рис. 4 изображен поток воды на добывающей скважине, а также доля водяной фазы в общей добыче в зависимости от времени. Черная кривая на графиках соответствует расчету на 9-точечном шаблоне, красная – на 5-точечном.

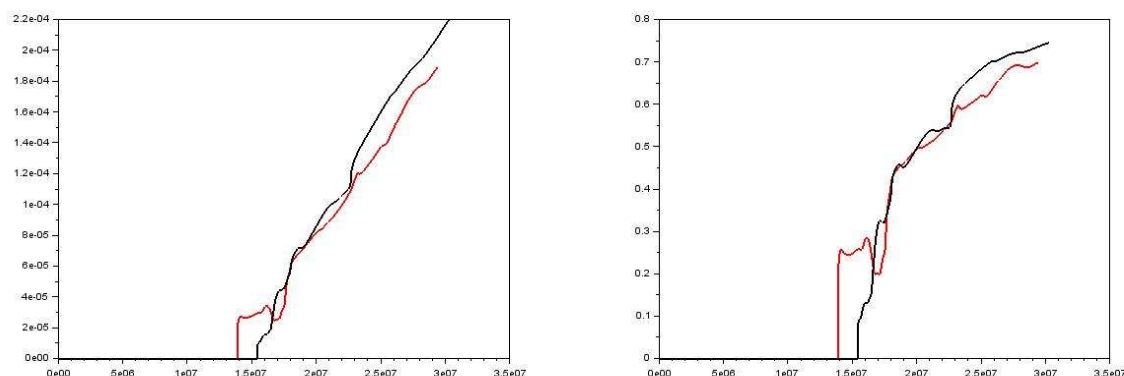


Рис. 4. Зависимость от времени выхода воды из добывающей скважины:
слева объемный поток водяной фазы в добывающую скважину, в единицах м^3 на метр мощности пласта;
справа зависимость от времени доли водной фазы в потоке из добывающей скважины;
черная кривая – расчет на 9-точечном шаблоне; красная – на 5-точечном

Видно, что прорыв воды в добывающую скважину происходит для счета на 5-точечном шаблоне немногим раньше – около $1,4 \cdot 10^7$ с (это около полугода с начала закачки в условиях тестовой задачи). Для 9-точечного шаблона прорыв происходит несколько позже – в момент времени около $1,55 \cdot 10^7$ с. Поток воды в добывающую скважину, особенно на начальном этапе, после прорыва нарастает неравномерно, ступенями. Каждая такая ступень связана с подходом к трещине гидроразрыва или к добывающей скважине нового пальца. Особенно четко ступенчатый характер имеет качество добываемой нефти (которое тем хуже, чем больше в нем воды). После прорыва добываемая нефть быстро ухудшается по качеству, уже к моменту $2,0 \cdot 10^7$ с в добываемой жидкости около 50 % воды для обоих вариантов расчета.

При расчете на 5-точечном шаблоне (красная кривая) особенно хорошо выделяется первая ступень на графиках рис. 4. Она связана с тем, что первичный прорыв воды идет не на

конце трещины гидроразрыва; резкий же скачок добычи воды около момента $1,8 \cdot 10^7$ с связан с подходом дополнительного потока воды к концу трещины и последующим быстрым усилением скорости фильтрации водной фазы в окрестности трещины.

Поскольку при расчете на 9-точечном шаблоне поток воды первично подходит к концу трещины, усиление его добычи в этом случае более интенсивно и более равномерно (степени короче). В целом в итоге поток для 9-точечного шаблона для одних и тех же моментов времени становится чуть более интенсивным, чем для 5-точечного, а качество добытой после прорыва нефти – более низким.

Сравнение результатов расчетов с трещиной гидроразрыва и без таковой. Нами было проведено сравнение результатов расчетов с трещиной гидроразрыва у добывающей скважины (результаты для нее частично изложены выше) и без таковой. Все расчеты, изложенные ниже, проводились на 9-точечном шаблоне.

На рис. 5 изображено распределение давления в начальный момент для обоих случаев. Из него видно, каким образом трещина гидроразрыва искажает распределение давления, которое является куда более регулярным при отсутствии трещины.

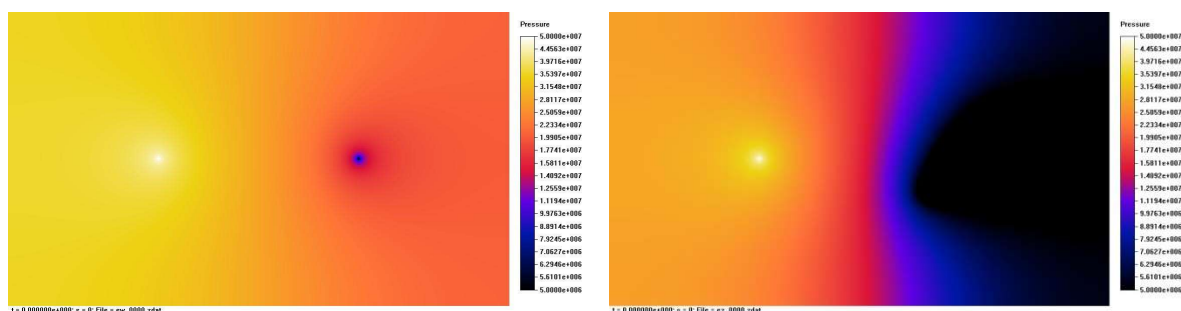
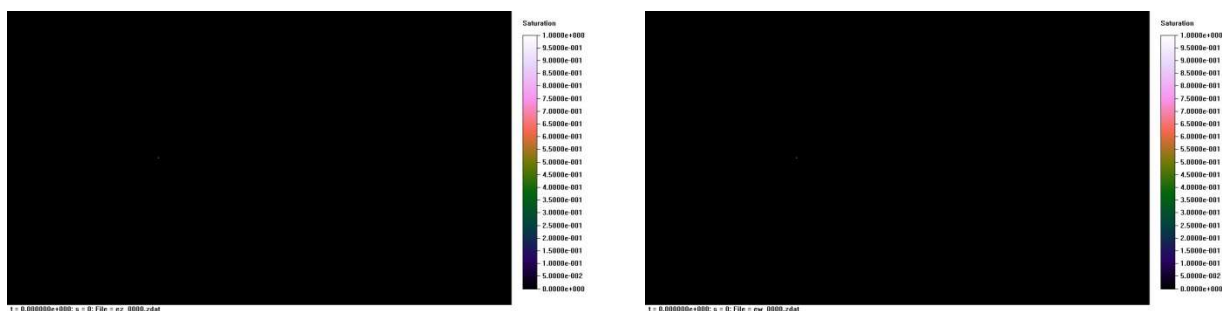


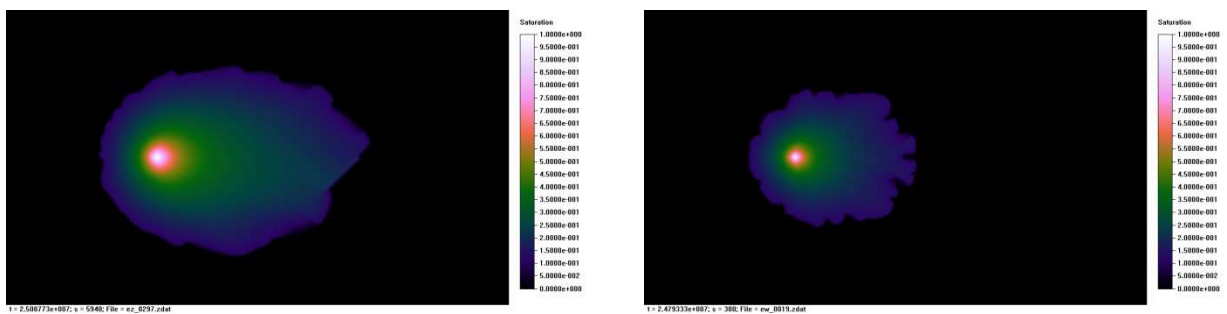
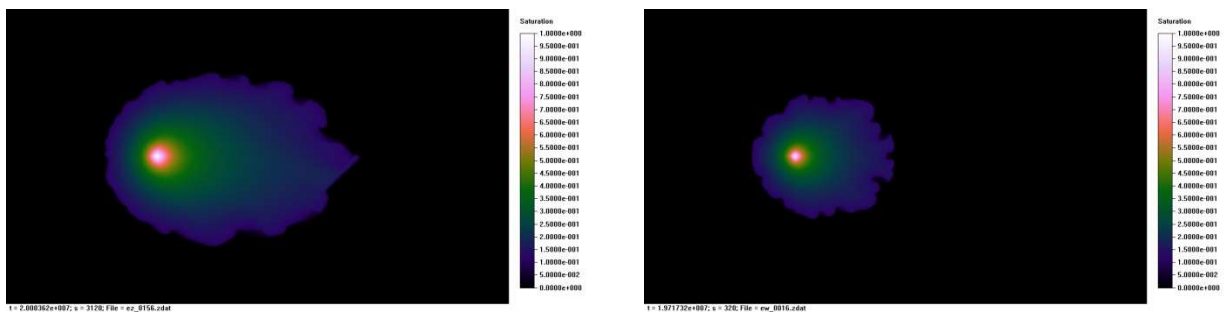
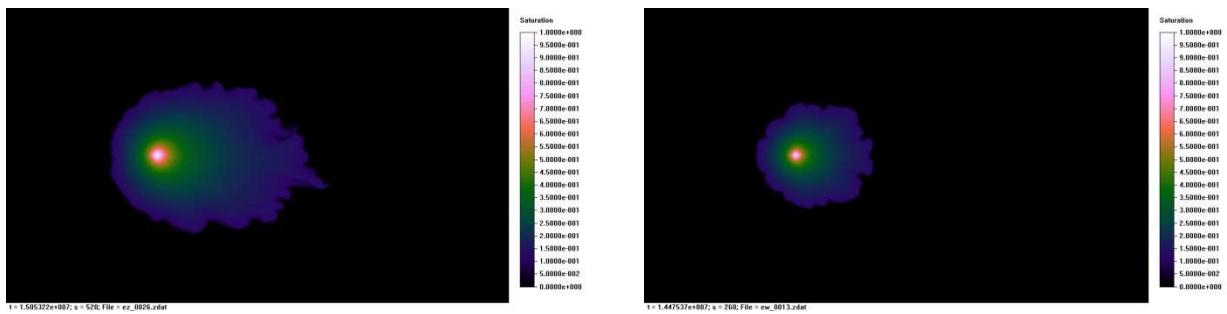
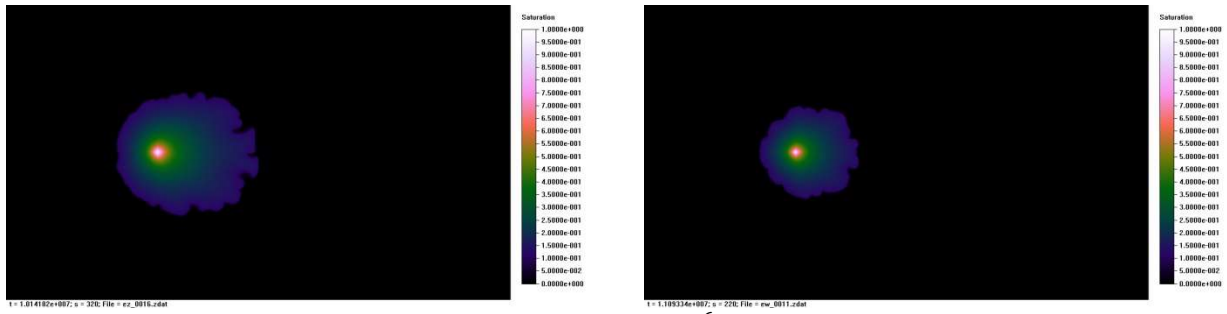
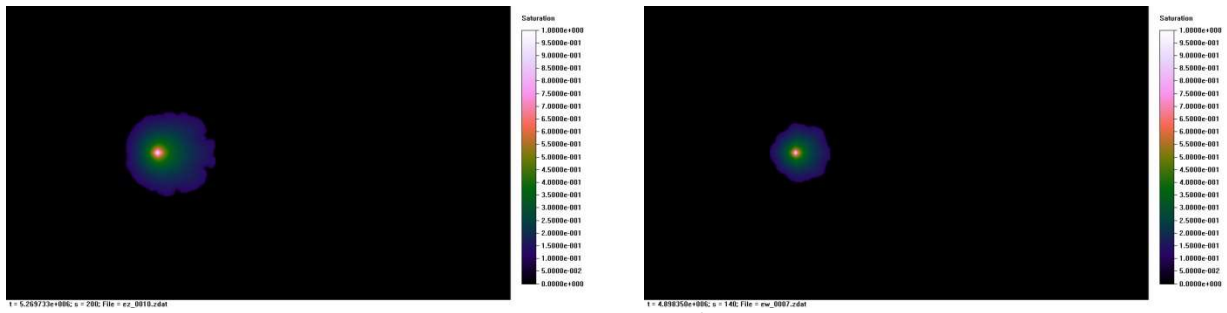
Рис. 5. Распределение давления в пласте при $t = 0$:
слева в случае наличия трещины гидроразрыва у добывающей скважины, справа – при ее отсутствии

Рис. 5 показывает также, что при одном и том же перепаде давления между скважинами наличие трещины гидроразрыва уменьшает давление в значительном объеме пласта, что не может не привести к значительно более высокой интенсивности фильтрационных течений в пласте. Насколько это сказывается на результатах добычи нефти из пласта – определить стоит, сравнив результаты решений при $t > 0$.

На рис. 6 показано развитие процесса; показано распределение приведенной насыщенности S с течением времени через промежутки по $5 \cdot 10^6$ с. Слева изображены данные для наличия трещины гидроразрыва, справа – для отсутствия. Процесс показан до момента, когда вода прорывается к добывающей скважине без трещины; за это время при наличии трещины вода давно уже окружает добывающую скважину, поэтому картинок в этом рисунке значительно больше, чем на рис. 1.



$t = 0$ с



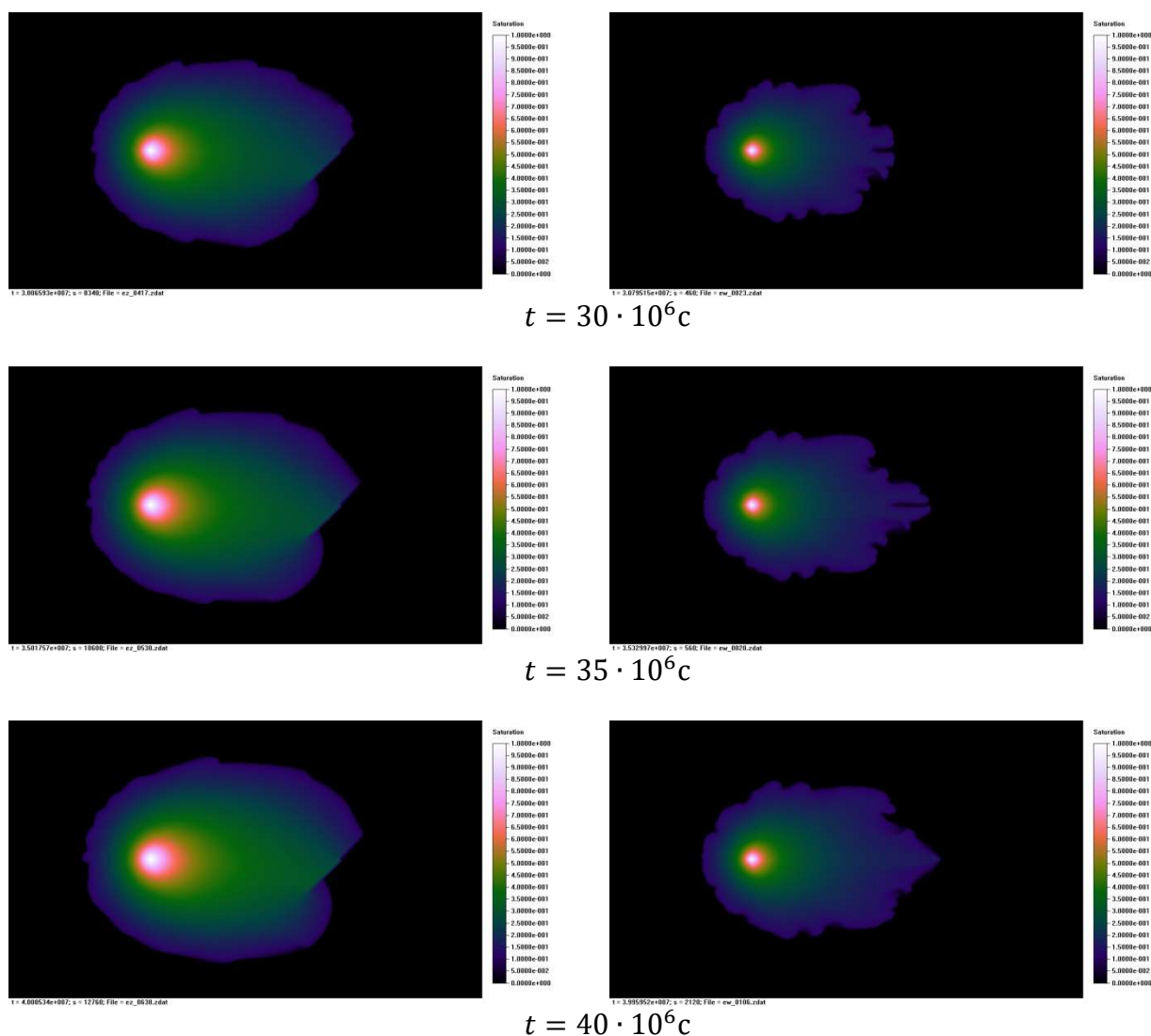
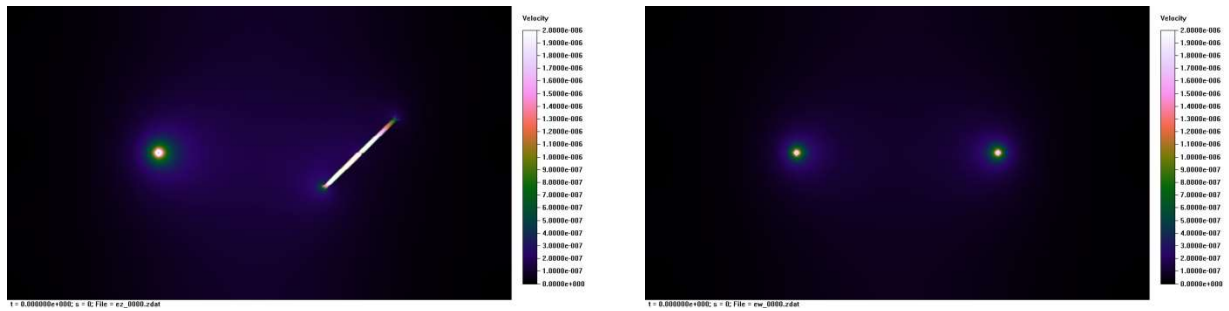


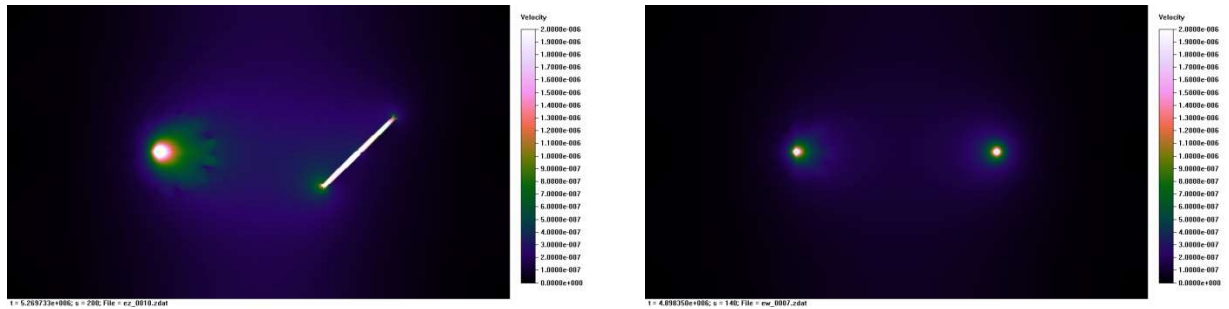
Рис. 6. Распределение приведенной водонасыщенности S с течением времени:
слева расчет в случае наличия трещины гидроразрыва у добывающей скважины;
справа – при ее отсутствии

Из рис. 6 видно, что после прорыва к трещине гидроразрыва примерно около $20 \cdot 10^6 \text{ c}$ распределение водонасыщенности в пласте эволюционирует не слишком интенсивно, хотя за последующее время охват трещины областью с положительной водонасыщенностью постепенно увеличивается. В это время при отсутствии трещины (рисунки справа) область водонасыщенности еще не достигает добывающей скважины; достижение ее происходит примерно около момента $35 \cdot 10^6 \text{ c}$. В целом за одно и то же прошедшее время заполненность пласта водой при наличии трещины гидроразрыва значительно лучше.

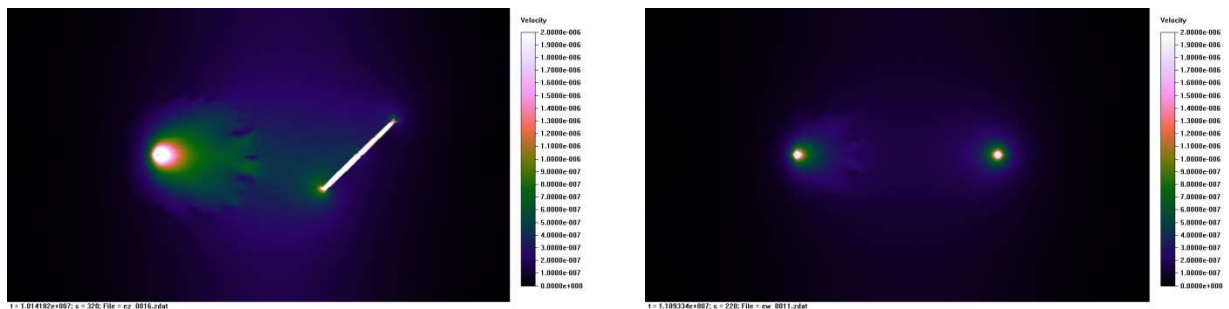
На рис. 7 изображено развитие со временем абсолютной величины суммарной скорости фильтрации в те же времена, что и для приведенной водонасыщенности на рис. 6. Слева имеется трещина гидроразрыва, справа – нет.



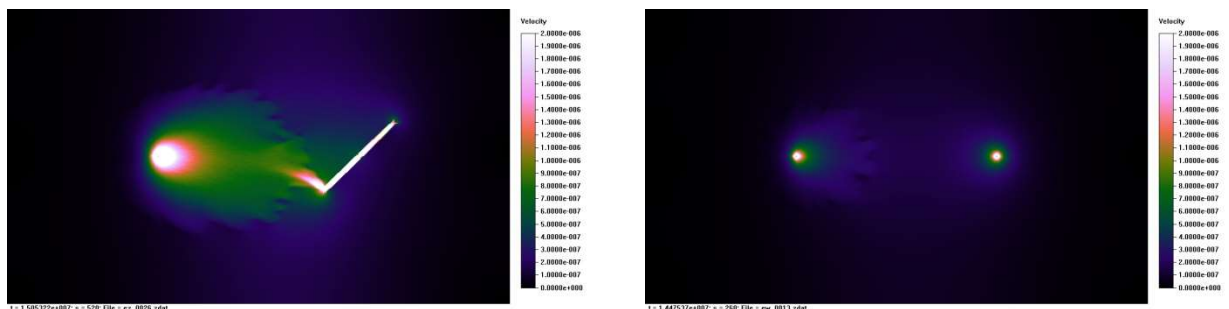
$t = 0c$



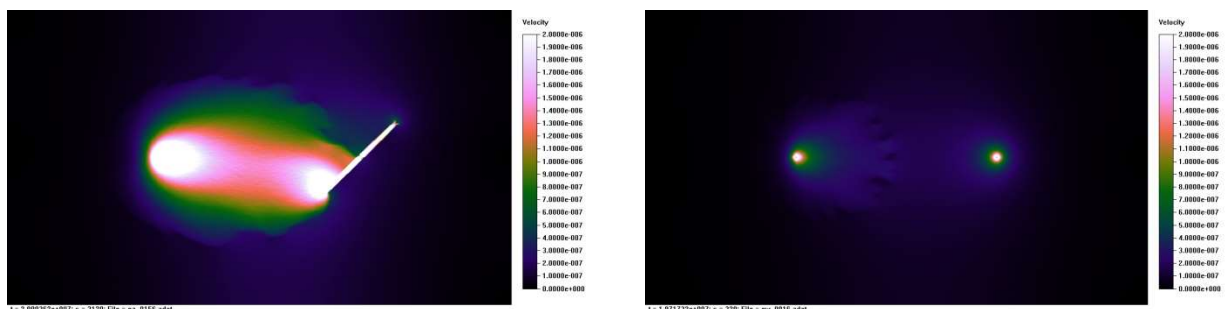
$t = 5 \cdot 10^6 c$



$t = 10 \cdot 10^6 c$



$t = 15 \cdot 10^6 c$



$t = 20 \cdot 10^6 c$

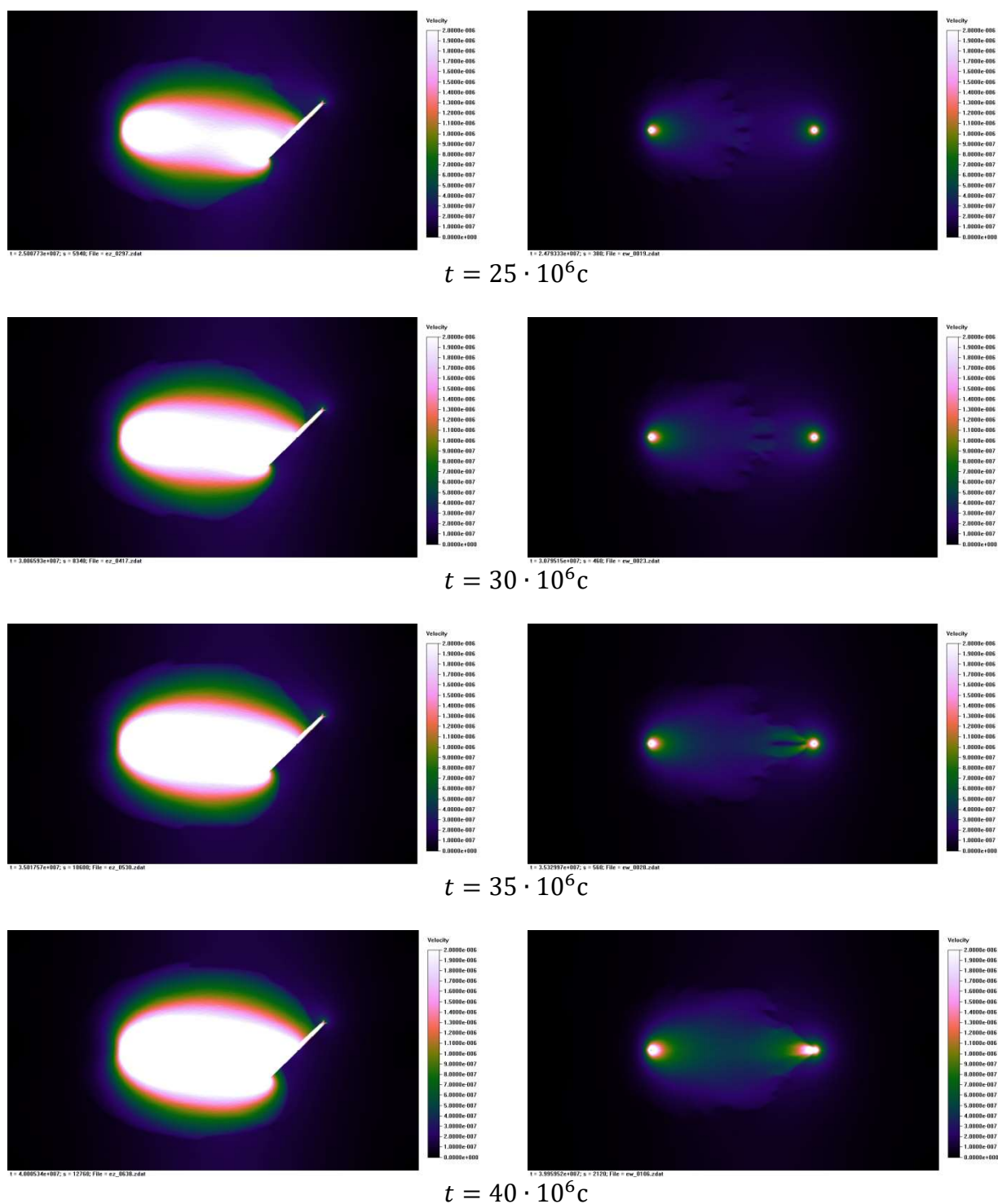
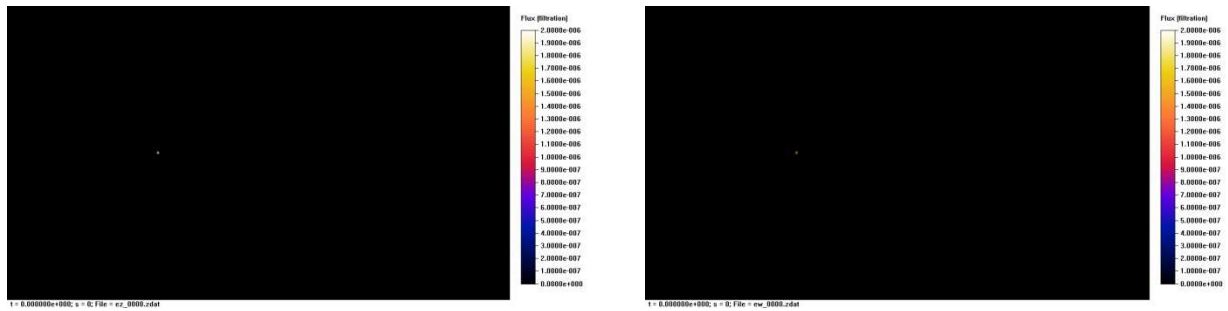


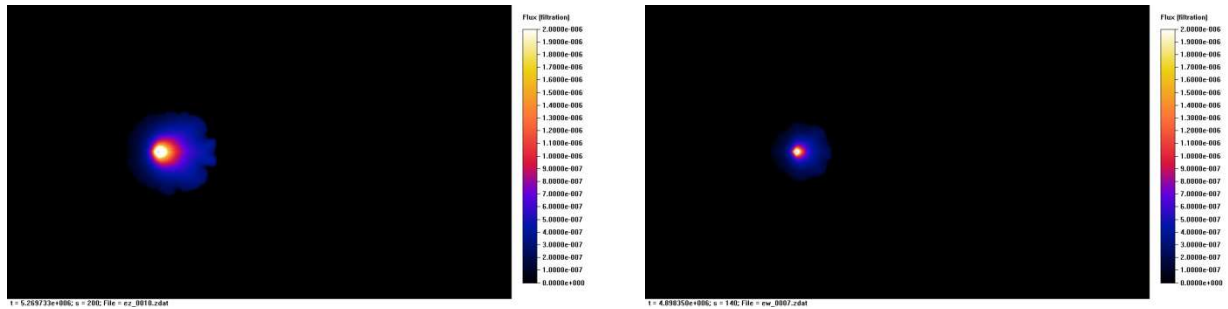
Рис. 7. Распределение модуля суммарной скорости фильтрации $|u|$ с течением времени:
слева расчет в случае наличия трещины гидроразрыва у добывающей скважины;
справа – при ее отсутствии

Из рис. 7 видно, что уровень скорости с трещиной гидроразрыва значительно выше, чем без трещины. Прорыв к скважине в последнем случае осуществляется двумя каналами почти одновременно; после прорыва эти каналы сливаются. Скорость фильтрации после прорыва продолжает возрастать.

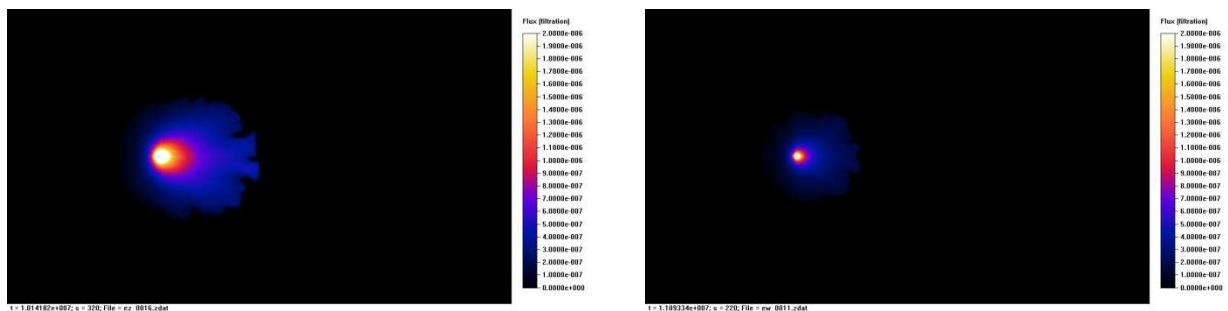
На рис. 8 показано развитие во времени скорости фильтрации воды. Слева имеется трещина гидроразрыва, справа – нет.



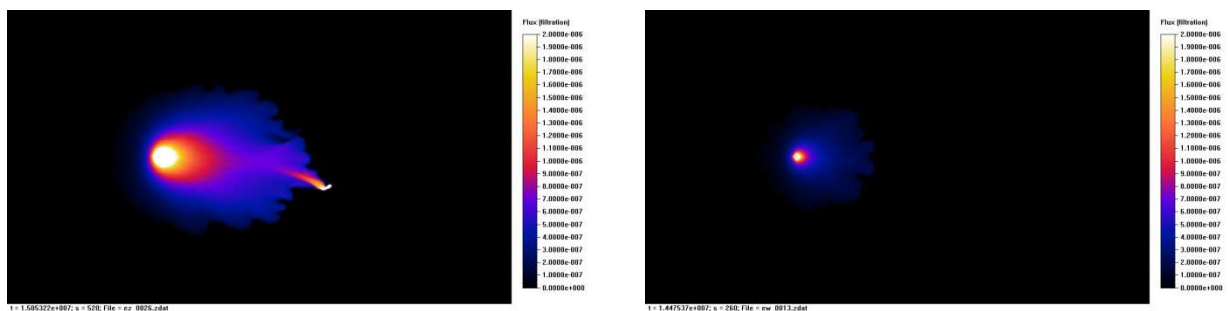
$t = 0c$



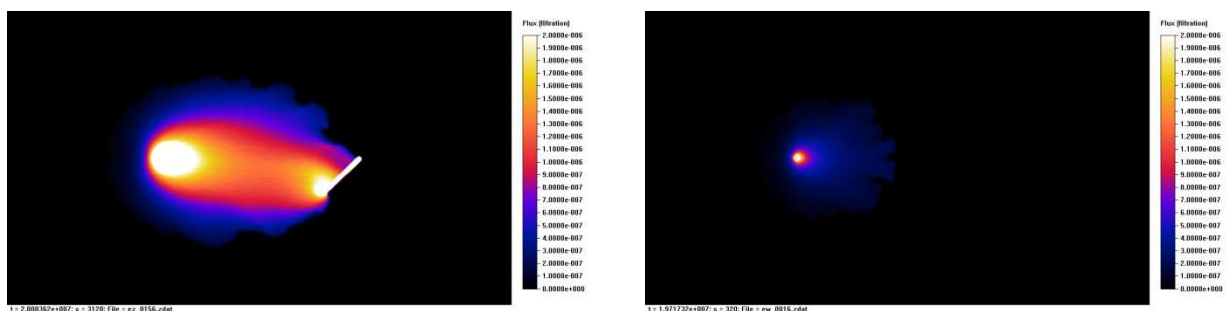
$t = 5 \cdot 10^6 c$



$t = 10 \cdot 10^6 c$



$t = 15 \cdot 10^6 c$



$t = 20 \cdot 10^6 c$

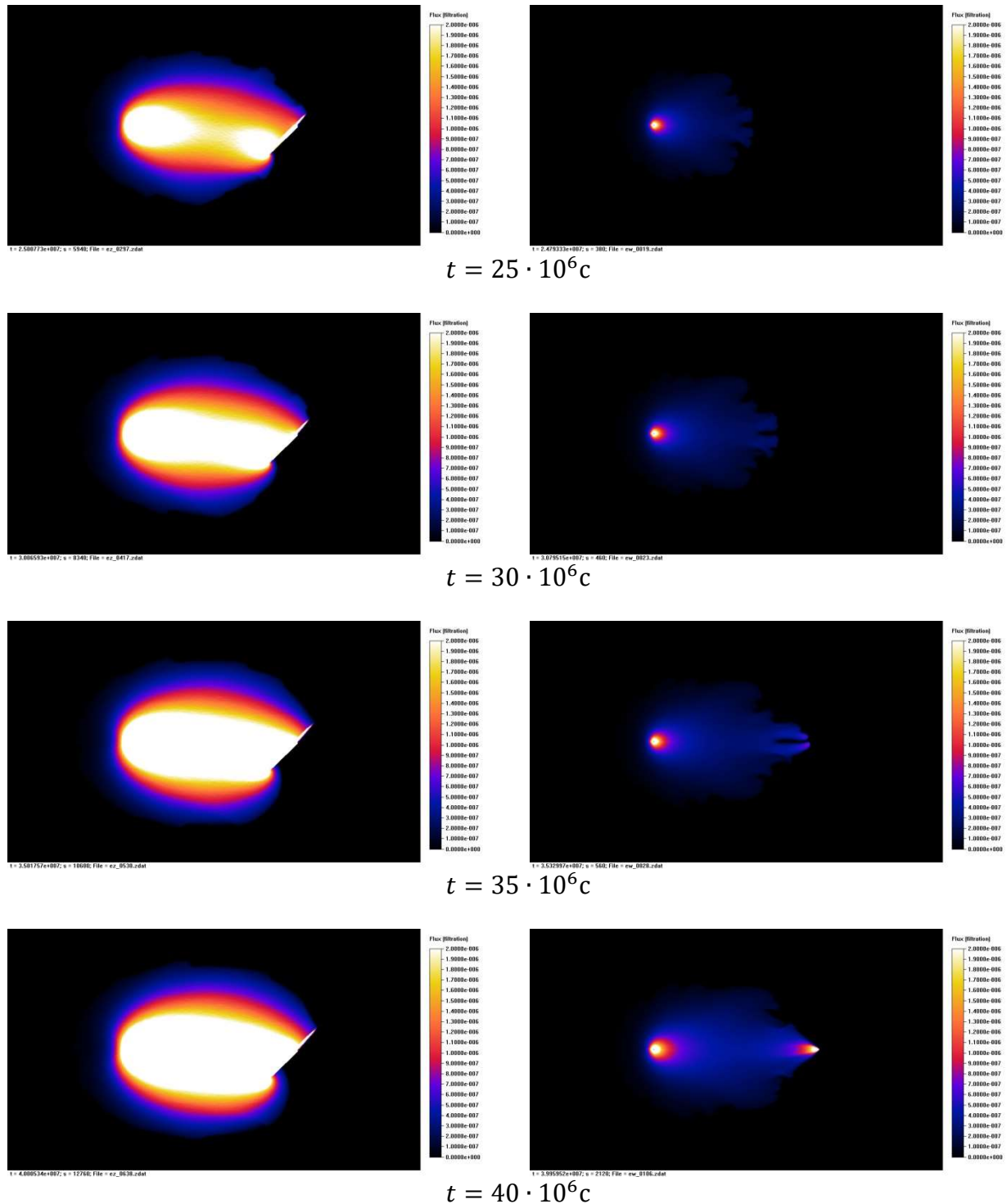


Рис. 8. Распределение модуля суммарной скорости фильтрации $|u_w|$ с течением времени:
слева расчет в случае наличия трещины гидроразрыва у добывающей скважины;
справа – при ее отсутствии

Рис. 8 показывает те же тенденции, что и рис. 7, только фильтрация нефти здесь отсечена.

Далее приводим рисунки, показывающие развитие суммарных процессов во времени в окрестности добывающей скважины. На рис. 9 изображено сравнение интенсивности притока нефти на добывающей скважине (слева) и суммарная интенсивность добычи (справа). Красная кривая соответствует процессу с наличием трещины, черная – без трещины.

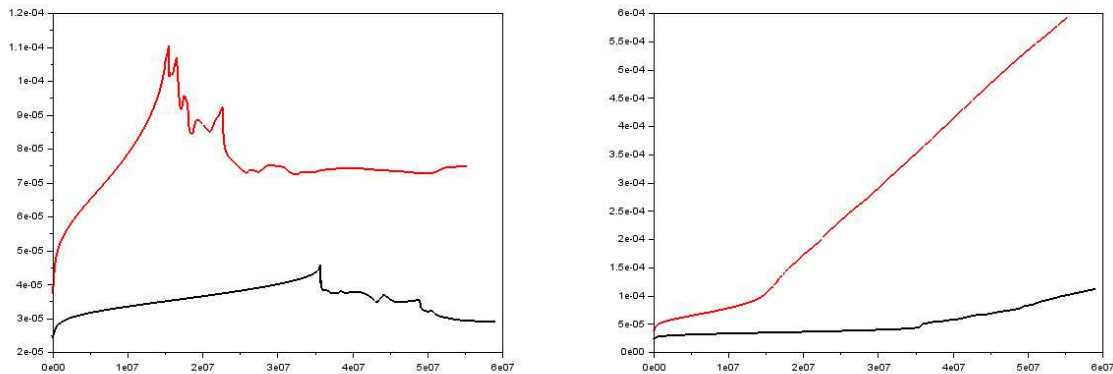


Рис. 9. Слева – интенсивность притока нефти на добывающей скважине, в единицах м^3 на метр мощности пласта. Справа – суммарная интенсивность добычи. Красная (верхняя) кривая соответствует процессу с наличием трещины, черная (нижняя) – без трещины

Рис. 9 показывает, что в обоих случаях кривая интенсивности добычи выглядит качественно одинаково: до прорыва добыча с ускорением растет (не считая краткого начального периода; в момент прорыва водной фазы к скважине интенсивность резко падает, затем толчками начинает то снижаться, то иногда увеличиваться, в конце концов, стабилизируясь на исследуемом периоде. В то же время общая добыча при постоянном перепаде давления продолжает нарастать; это нарастание интенсифицируется именно после прорыва, что говорит о быстром заводнении скважины.

Наконец, на рис. 10 приводим совокупную добычу нефти (слева) и общую интенсивность добычи (справа). Красная кривая соответствует процессу с наличием трещины, черная – без трещины.

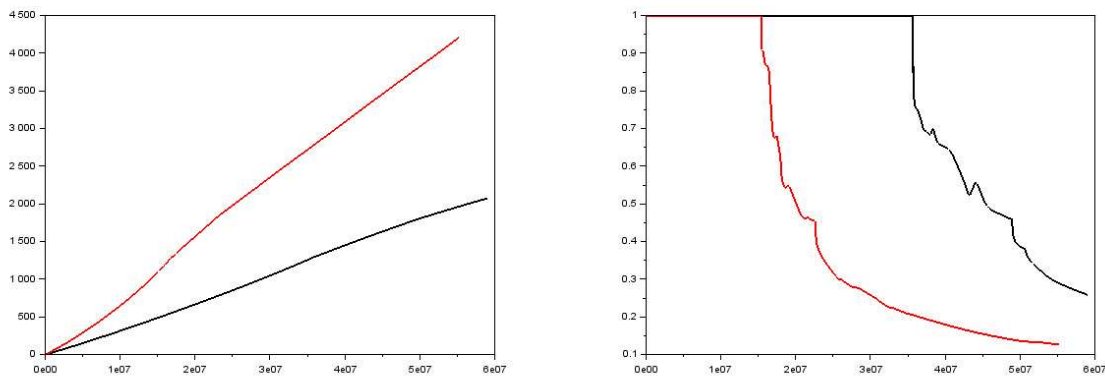


Рис. 10. Слева – совокупная добыча нефти, в единицах м^3 на метр мощности пласта, справа – доля нефтяной фазы в добыче. Красная кривая соответствует процессу с наличием трещины, черная – без трещины

Из этого рисунка видно, что в целом за исследуемый период при наличии трещины нефти добыто почти в 2 раза больше. Несмотря на это, качество добычи при наличии трещины резко падает значительно раньше. Если считать, что скважина прекращает эксплуатацию тогда, когда в добыче остается 25 % нефтяной фазы, то в целом количество добытой нефти от наличия трещины зависит мало. В то же время наличие трещины позволяет добыть нефть быстрее. При ином критерии остановки эксплуатации следует ожидать приблизительно одинаковых результатов (что требуется исследовать дополнительно).

Заключение. В данной работе показано преимущество использования 9-точечного шаблона по сравнению с 5-точечным при моделировании неустойчивых процессов вытесне-

ния из пористой среды. Расчет динамики распространения водонасыщенности нефтяного пласта на 5-точечном разностном шаблоне приводит к нефизичным результатам: распространение неустойчивостей фронта вытеснения («пальцев») идет здесь преимущественно вдоль линий координатной сетки. Это приводит в том числе и к иным интегральным результатам: 5-точечный расчетный шаблон в данной постановке задачи ведет к иным результатам по потоку воды в добываемой нефти и по ее водонасыщенности. Исследование влияния трещины гидроразрыва пласта на процесс нефтедобычи показало, что наличие трещины ускоряет вытеснение нефти, при этом суммарное количество добытой нефти не изменяется. Таким образом, трещина гидроразрыва не приводит к увеличению нефтеотдачи пласта.

Работы, выполненные в МГУ им. М. В. Ломоносова, были поддержаны грантом РФФИ № 17-08-01032.

Литература

1. Barenblatt G. I., Entov V. M., Ryzhik V. M. Theory of Fluids Flows through Natural Rocks. Dordrecht ; Boston ; London : Kluwer Acad Publishers, 1990.
2. Kaviany M. Principles of heat transfer in porous media. NY : Dover Publications Inc., 1988.
3. Андерсен М. А., Дункан Б., МакЛин Р. Анализ керн: истина в последней инстанции при оценке характеристик пласта (Core Truth in Formation Evaluation) // Overfield Rewiew. 2013. № 2. С. 25.
4. Гиматудинов Ш. К., Ширковский А. И. Физика нефтяного и газового пласта. М. : Недра, 1982.
5. Смирнов Н. Н., Никитин В. Ф., Михайлюк М. В., Тимохин П. Ю., Тюренкова В. В., Стамов Л. И. Визуализация результатов моделирования неустойчивого вытеснения нефти из пористых сред // Тр. НИИСИ РАН. 2016. Т. 6. № 2.
6. Козлов И. В., Скрылева Е. И. Математическое моделирование и обработка эксперимента по вытеснению нефти водой из неокомских песчаников // Вестн. кибернетики. 2016. № 2. С. 139–146.
7. Вольпин С. Г., Смирнов Н. Н., Кравченко М. Н., Диева Н. Н. Моделирование импульсно-волновой обработки нефтяных пластов методом термогазохимического воздействия // Сб. науч. тр. ОАО Всерос. нефтегаз. науч.-исслед. ин-т им. акад. А. П. Крылова. 2013. Вып. 149. С. 127–137.
8. Вольпин С. Г., Сайтгареев А. Р., Смирнов Н. Н., Кравченко М. Н., Корнаева Д. А., Диева Н. Н. Перспективы применения волновой технологии термогазохимического воздействия для повышения нефтеотдачи пластов // Нефт. хоз-во. 2014. № 1. С. 62–66.
9. Вольпин С. Г., Смирнов Н. Н., Кравченко М. Н., Диева Н. Н. Оптимизация условий безопасного проведения ТГХВ на нефтяных месторождениях // Эколог. вестн. России. 2014. № 3. С. 17–21.