

УДК 548:539.124.162:004.9

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОТКЛОНЕНИЯ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ И ПОЗИТРОНОВ С ЭНЕРГИЕЙ 120 ГэВ ИЗОГНУТЫМ КРИСТАЛЛОМ КРЕМНИЯ

В. П. Кошечев¹, Ю. Н. Штанов², Д. А. Моргун^{3,4}, Т. А. Панина³

¹ НИУ МАИ, филиал «Стрела», Жуковский, *koshcheev1@yandex.ru*

² Тюменский индустриальный университет, филиал ТИУ в г. Сургуте, *yuran1987@mail.ru*

³ Сургутский государственный университет, *morgun_da@edu.surgu.ru*

⁴ Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований РАН

Моделирование процесса отклонения поляризованных электронов и позитронов с энергией 120 ГэВ в (110) плоскостном канале изогнутого кристалла кремния выполнено с помощью компьютерной программы TROPICS. Показано, что наилучшее согласие между моделированием и результатами эксперимента достигнуто при условии, когда расчетное ограничение по углам влета частиц в кристалл в два раза больше экспериментального. Результаты компьютерного эксперимента показывают сильную зависимость степени деполаризации пучка от знака заряда, так для электронов отсутствует максимум в распределении по углам поворота спина, а для позитронов положение максимума соответствует теоретической оценке, которая получена по формуле В. Л. Любошица.

Ключевые слова: отклонение поляризованных электронов и позитронов, программный комплекс TROPICS, поворот вектора спина.

COMPUTER MODELING OF SHIFT PROCESS OF POLARIZED ELECTRONS AND POSITRONS WITH ENERGY OF 120 GeV USING BENT SILICON CRYSTAL

V. P. Koshcheev¹, Yu. N. Shtanov², D. A. Morgun^{3,4}, T. A. Panina⁵

¹ "Strela" of the Moscow Aviation Institute (National Research University), Zhukovsky Branch, *koshcheev1@yandex.ru*

² Surgut Oil and Gas Institute, Branch of Tyumen industrial University, *yuran1987@mail.ru*

³ Surgut State University, *morgun_da@edu.surgu.ru*

⁴ System Research Institute, Russian Academy of Sciences

The shift process modeling of polarized electrons and positrons with energy of 120 GeV in a plane channel (110) of the bent silicon crystal was performed using the TROPICS software. It is shown that the best fit of the modeling and experiment results is achieved under the condition that the design constraint on angles of the particles entry into the crystal is twice as large as the experimental one. The results of the computer experiment show a high dependency of the degree of beam depolarization on the charge sign, thus electrons have no maximum in the distribution over angles of the spin rotation, and positrons maximum position corresponds to the theoretical evaluation calculated using the Lyuboshits V. L. formula.

Keywords: polarized electrons and positrons shift, TROPICS software, spin vector rotation.

Введение. Измерение магнитных моментов короткоживущих элементарных частиц [1] и проблема вывода пучков поляризованных частиц из ускорителей [2] с помощью эффекта каналирования в изогнутых кристаллах представляют собой актуальные научные направления исследований в настоящее время. С другой стороны, в работах [3–4] впервые наблю-

дали эффект каналирования неполяризованных релятивистских электронов в плоскостных каналах изогнутого кристалла кремния. В [5] впервые наблюдали эффект каналирования неполяризованных релятивистских электронов и позитронов с энергией 120 ГэВ в плоскостных каналах изогнутого кристалла кремния. Так как эволюция магнитного момента не влияет на движение релятивистских частиц, то динамику потока релятивистских электронов и позитронов в плоскостных каналах изогнутого кристалла можно исследовать с помощью независимого «маркера», которым является угол поворота вектора спина.

В настоящей работе с помощью уравнения Баргманна – Мишеля – Телегди исследуется эволюция магнитного момента релятивистской частицы в плоскостных каналах изогнутого кристалла с учетом многократного рассеяния как вдоль, так и поперек атомной плоскости (111), которая состоит из цепочек $\langle 111 \rangle$.

Уравнения для вектора спиновой поляризации и система уравнений движения быстрой заряженной частицы. Уравнения движения для проекции вектора спина (вектора спиновой поляризации), который пропорционален магнитному моменту элементарной частицы, имеют вид

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \xi_x \approx -\frac{a}{v_z} \ddot{x} \xi_z \\ \frac{d}{dt} \xi_y \approx -\frac{a}{v_z} \ddot{y} \xi_z \\ \frac{d}{dt} \xi_z \approx \frac{a}{v_z} (\ddot{y} \xi_y + \ddot{x} \xi_x) \end{cases}, \quad (1)$$

где $a = \gamma[g/2 - \gamma/(1 + \gamma)] \approx \gamma(g/2 - 1)$; γ – лоренц-фактор; g – фактор для электрона, запишем в виде [6] $(g - 2)/2 = 1159.65218076 \cdot 10^{-6}$; продольная составляющая скорости релятивистской частицы $v_z = \text{const.}$, что соответствует малоугловому приближению.

Так как $d\vec{\xi}^2/dt = 0$, то вектор спиновой поляризации $\vec{\xi}$ удобно нормировать на единицу $\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2 = 1$.

Начальные условия для системы уравнений (1), которые соответствуют поляризованным релятивистским частицам, выберем в виде $\xi_x(0) = 0, \xi_y(0) = 0, \xi_z(0) = 1$.

Уравнения движения релятивистской частицы в осевых каналах изогнутого кристалла запишем в виде

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\partial \bar{U}_{\text{eff}}(\bar{x}, \bar{y}) / \partial \bar{x} \\ m\ddot{y} = -\partial \bar{U}_{\text{eff}}(\bar{x}, \bar{y}) / \partial \bar{y} \end{cases} \quad (2)$$

со следующими начальными условиями: $\bar{x}_0 = \bar{x}(0), \bar{y}_0 = \bar{y}(0), \dot{\bar{x}}_0 = \dot{\bar{x}}(0), \dot{\bar{y}}_0 = \dot{\bar{y}}(0)$, где $\bar{U}_{\text{eff}}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{U}(\bar{x}, \bar{y}) - p v \bar{x} / R_x - p v \bar{y} / R_y$; R_x, R_y – радиусы изгиба кристалла в направлении оси ОХ и ОУ, соответственно, которые изменяются с глубиной z ; $z = v \cdot t$; $p = mv \approx mv_z$.

Если $\dot{\bar{y}} = 0$, то частное решение системы уравнений (1) в плоскостном канале изогнутого кристалла запишем в виде

$$\begin{cases} \xi_x = -\xi_z(0) \sin(a\dot{\bar{x}}/v_z), \\ \xi_z = \xi_z(0) \cos(a\dot{\bar{x}}/v_z). \end{cases}$$

Введем в рассмотрение угол поворота вектора спина ϑ_s с помощью формулы $\text{tg } \vartheta_s = \xi_x / \xi_z$. В результате получим хорошо известную формулу [7]

$$\vartheta_s = -a\dot{\bar{x}}/v_z = -\gamma(g - 2)\theta_x/2, \quad (3)$$

где $\theta_x = \dot{\bar{x}}/v_z$ – угол отклонения частицы в плоскостном канале изогнутого кристалла.

Множественное рассеяние каналированных частиц будем описывать с помощью системы уравнений для средних квадратов флуктуаций поперечной координаты и скорости (см., например, [8])

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \overline{\delta x^2} &= 2\overline{\delta x \delta \dot{x}}, \\
 \frac{d}{dt} \overline{\delta x \delta \dot{x}} &= \overline{\delta \dot{x}^2} - \frac{1}{m} (\overline{U_{xx}} \overline{\delta x^2} + \overline{U_{xy}} \overline{\delta x \delta y}), \\
 \frac{d}{dt} \overline{\delta \dot{x}^2} &= -\frac{2}{m} (\overline{U_{xx}} \overline{\delta x \delta \dot{x}} + \overline{U_{xy}} \overline{\delta \dot{x} \delta y}) + \frac{D_{xx}}{m^2}, \\
 \frac{d}{dt} \overline{\delta x \delta y} &= \overline{\delta \dot{x} \delta y} + \overline{\delta x \delta \dot{y}}, \\
 \frac{d}{dt} \overline{\delta \dot{x} \delta y} &= -\frac{1}{m} (\overline{U_{xx}} \overline{\delta x \delta y} + \overline{U_{yy}} \overline{\delta y^2}) + \overline{\delta \dot{x} \delta \dot{y}}, \\
 \frac{d}{dt} \overline{\delta x \delta \dot{y}} &= -\frac{1}{m} (\overline{U_{yy}} \overline{\delta x \delta y} + \overline{U_{xy}} \overline{\delta x^2}) + \overline{\delta \dot{x} \delta \dot{y}}, \\
 \frac{d}{dt} \overline{\delta \dot{x} \delta \dot{y}} &= -\frac{1}{m} (\overline{U_{xx}} \overline{\delta x \delta \dot{y}} + \overline{U_{xy}} \overline{\delta y \delta \dot{y}} + \overline{U_{yy}} \overline{\delta \dot{x} \delta y} + \overline{U_{xy}} \overline{\delta x \delta \dot{x}}) + \frac{D_{xy}}{m^2}, \\
 \frac{d}{dt} \overline{\delta y^2} &= 2\overline{\delta y \delta \dot{y}}, \\
 \frac{d}{dt} \overline{\delta y \delta \dot{y}} &= \overline{\delta \dot{y}^2} - \frac{1}{m} (\overline{U_{yy}} \overline{\delta y^2} + \overline{U_{xy}} \overline{\delta x \delta y}), \\
 \frac{d}{dt} \overline{\delta \dot{y}^2} &= -\frac{2}{m} (\overline{U_{yy}} \overline{\delta y \delta \dot{y}} + \overline{U_{xy}} \overline{\delta x \delta \dot{y}}) + \frac{D_{yy}}{m^2},
 \end{aligned} \tag{4}$$

где $D_{xx} = D_{xx}(\bar{x}, \bar{y})$, $D_{xy} = D_{xy}(\bar{x}, \bar{y})$, $D_{yy} = D_{yy}(\bar{x}, \bar{y})$ – компоненты коэффициента диффузии; $\overline{U}_x = \partial \overline{U} / \partial x$, $\overline{U}_y = \partial \overline{U} / \partial y$, $\overline{U} = \overline{U}(\bar{x}, \bar{y})$ – непрерывный потенциал, образованный атомными цепочками. Переопределение значений координат и скоростей производится случайным образом при помощи соотношений

$$\begin{cases} \bar{x} = \text{RandG}(\bar{x}, \sqrt{\overline{\delta x^2}}), & \bar{y} = \text{RandG}(\bar{y}, \sqrt{\overline{\delta y^2}}) \\ \dot{\bar{x}} = \text{RandG}(\dot{\bar{x}}, \sqrt{\overline{\delta \dot{x}^2}}), & \dot{\bar{y}} = \text{RandG}(\dot{\bar{y}}, \sqrt{\overline{\delta \dot{y}^2}}) \end{cases} \tag{5}$$

где функция RandG генерирует случайную величину, удовлетворяющую нормальному распределению с заданным математическим ожиданием и дисперсией согласно алгоритму [9].

Переопределение запрещается, если после предыдущего переопределения пройдено расстояние меньше τ_{\min} . Расстояние τ_{\min} определяется некоторым минимальным количеством столкновений частицы с атомами кристалла. Программный комплекс TROPICS [10] основан на численном решении системы уравнений (1)–(2), (4) и соотношений (5). Ранее было показано (см. [8] и цит. там лит.), что совместное решение системы уравнений (2), (4) и соотношений (5) эквивалентно решению кинетического уравнения Фоккера – Планка методом компьютерного моделирования траекторий каналированных частиц. Используется кубическая эрмитовая сплайн-аппроксимация коэффициента диффузии и поперечной силы, численные значения которых были первоначально вычислены с помощью разложения в тригонометрический ряд Фурье. Учитывались структурный и атомный форм-факторы, а также фактор Дебая – Валлера. Температура кристалла считалась равной 294 °К. Для потенциала изолированного атома и при расчете плотности распределения атомных электронов использова-

лось приближение Мольер [11] и Дойля – Тернера [12]. Компоненты атомного коэффициента диффузии были разложены в тригонометрический ряд Фурье

$$D_{xy}(x, y) = D_{yx}(x, y) = \frac{4\pi^2 a_z}{a_x a_y d^6 \nu} \sum_{\vec{g}} \sum_{\vec{q}} \sum_i n_x m_y V(\vec{g}) V(\vec{q}) \times \exp\left[-\sigma^2(\vec{g} - \vec{q})^2/2\right] \exp\left[-\sigma^2(\vec{g}^2 + \vec{q}^2)/2\right] \cos[(\vec{g} - \vec{q})(\vec{r} - \vec{r}_i)] \quad (6)$$

где $V(\vec{g})$ – компонента Фурье потенциала изолированного атома; $\vec{g}^2 = g_x^2 + g_y^2$ – квадрат модуля вектора обратной решетки; $g_x = 2\pi n_x/a_x$, $g_y = 2\pi n_y/a_y$; $q^2 = q_x^2 + q_y^2$; $q_x = 2\pi m_x/a_x$, $q_y = 2\pi m_y/a_y$; n_x, n_y, m_x, m_y – целые числа; a_x, a_y – периоды кристаллической решетки в направлении осей OX, OY , соответственно; σ^2 – средний квадрат флуктуаций тепловых колебаний атомов кристалла; d – постоянная кристаллической решетки; $(\vec{g} - \vec{q})^2 = (g_x - q_x)^2 + (g_y - q_y)^2$, $\vec{q} = (q_x, q_y)$, $\vec{g} = (g_x, g_y)$, $\vec{r} = (x, y)$; вектор \vec{r}_i определяет положение атома в элементарной ячейке кристаллической решетки.

Видно, что атомный коэффициент диффузии не зависит от кулоновского электронного и ядерного логарифмов [8]. Для построения коэффициента диффузии использовались вычислительные мощности видеокарты с поддержкой технологии CUDA [13]. В расчете использовался также модифицированный коэффициент диффузии, который отличается от коэффициента диффузии в приближении Линдхарда [14] и Китагавы – Оцуки [15] тем, что электронный и ядерный кулоновский логарифмы заменены на радиационный логарифм. Время интерполирования атомного коэффициента диффузии составляет 10,5 часов при количестве точек 256×256 . Модифицированный коэффициент диффузии, коэффициент диффузии в приближении Линдхарда – Китагавы – Оцуки и атомный коэффициент диффузии (6) представлены на рис. 1 в приближении Дойля – Тернера. Было обнаружено, что тригонометрический ряд Фурье для атомного коэффициента диффузии в приближении Мольер сходится очень медленно. Модифицированный коэффициент диффузии располагается между максимальными и минимальными значениями атомного коэффициента диффузии, которые были вычислены для потенциалов атомов кристалла в приближении Мольер и Дойля – Тернера, соответственно.

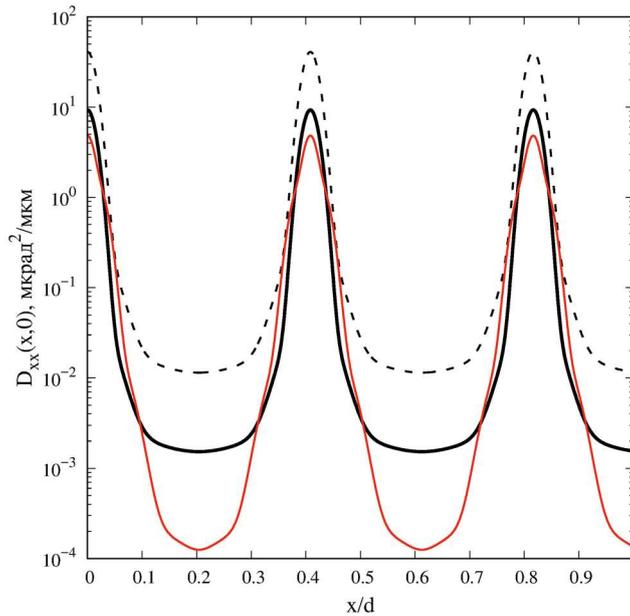


Рис. 1. Модифицированный коэффициент диффузии (сплошная линия), коэффициент диффузии с электронным и ядерным логарифмом (пунктирная линия) и атомный коэффициент диффузии (красная линия) в сечении атомных $\langle 111 \rangle$ цепочек кристалла кремния для электронов с энергией 120 ГэВ в приближении Дойля – Тернера

Результаты компьютерного эксперимента. В плоскости XOZ лежит как радиус изгиба R_x плоскости (110), так и угол вылета частиц θ_x , которые измерялись относительно первоначального направления пучка. Угол разориентации между осью $\langle 111 \rangle$ и направлением падения частиц в плоскости (110) был взят равным 20 мрад [5]. Начальные значения точек влета были равномерно распределены в следующих пределах $\Delta x \times \Delta y = 1 \text{ мм} \times 1 \text{ мм} = 1 \text{ мм}^2$, а углы влета нормально распределены вокруг среднего значения согласно алгоритму [9]. Модельное среднеквадратичное отклонение, которое определяет угловую расходимость пучка частиц, было выбрано $\sigma_x = 97$ мкрад $\sigma_y = 66$ мкрад, а толщина кристалла 2,01 мм [5]. В эксперименте [5] осуществлялся отбор частиц по углам влета от -9,4 до +9,4 мкрад. Для численного решения системы дифференциальных уравнений движения применялся метод Рунге – Кутты четвертого порядка точности. Компьютерный эксперимент выполнялся только для частиц с углами влета $\pm 9,4$ мкрад и $\pm 18,8$ мкрад. Поэтому из 300 000 частиц в расчетах участвовали $\approx 22\,900$ и $\approx 45\,900$ частиц, соответственно. Экспериментальные [5] и расчетные значения были нормированы так, что площадь под каждой гистограммой равна единице. Разрешение детектирующей системы равнялось 5 мкрад. Все расчеты выполнены в приближении Дойля – Тернера.

На рис. 2 и 3 представлены экспериментальные [5] и расчетные угловые распределения электронов и позитронов с энергией 120 ГэВ, которые отклонялись (110) плоскостным каналом изогнутого кристалла кремния. При решении дифференциальных уравнений шаг интегрирования равнялся 18,7 нм, а расстояние τ_{\min} было равным 187,9 нм. В расчетах радиусы изгиба $R_x = 11,5$ м и $R_y = 0$, соответственно. В компьютерном эксперименте выполнялся отбор частиц по углам влета на рис. 2 от -9,4 до +9,4 мкрад, а на рис. 3 от -18,8 до +18,8 мкрад. Время расчета каждого распределения составило около 50–100 мин на четырехъядерном процессоре Intel Core i5 с частотой 3 ГГц. Видно, что наилучшее согласие между моделированием и результатами эксперимента достигнуто при условии, когда расчетное ограничение по углам влета частиц в кристалл в два раза больше экспериментального. На рис. 4а и 4б представлены результаты расчета поворота вектора спиновой поляризации для пучка электронов и позитронов в (110) плоскостном канале изогнутого кристалла кремния. На рис. 4а и 4б стрелочками обозначены положение максимума вектора спиновой поляризации, рассчитанный по формуле (3). Время расчета при отборе частиц по углам влета составляет от 2 до 4,4 ч. Видно, что наличие дополнительного отбора по углам влета не влияет на результаты расчета поворота вектора спиновой поляризации для электронов, а для позитронов наблюдается зависимость от отбора частиц по углам влета. Результаты компьютерного эксперимента показывают сильную зависимость степени деполяризации пучка от знака заряда, так для электронов отсутствует максимум в распределении по углам поворота спина, а для позитронов положение максимума соответствует теоретической оценке, которая получена по формуле В. Л. Любошица.

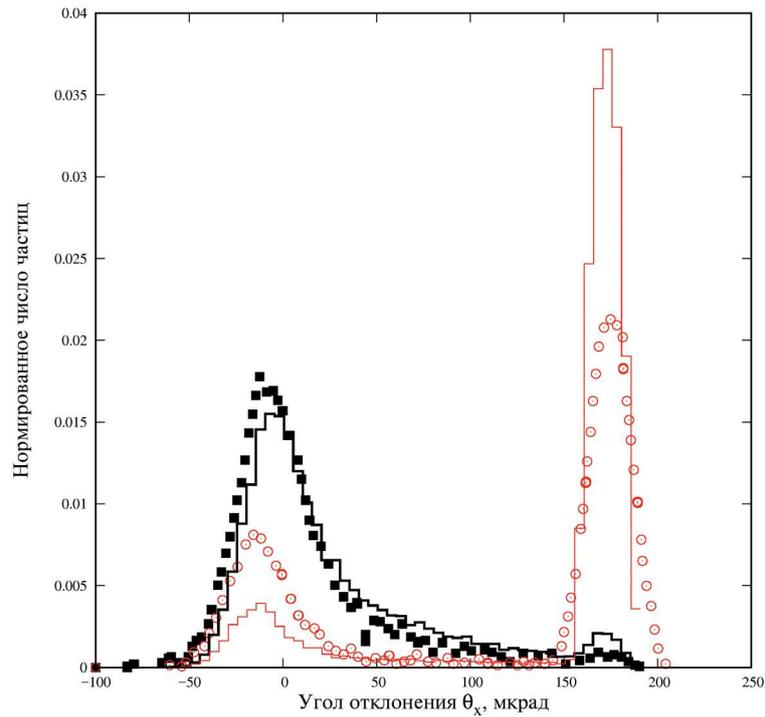


Рис. 2. Угловое распределение пучка электронов и позитронов с энергией 120 ГэВ в (110) плоскостном канале кремния

На рисунке результаты эксперимента [5] для электронов и позитронов обозначены квадратами и кружками, соответственно. Результаты компьютерного моделирования для электронов и позитронов обозначены черной линией и красной линией, соответственно. В компьютерном эксперименте выполнялся отбор по углам влета частиц от $-9,4$ до $+9,4$ мкрад.

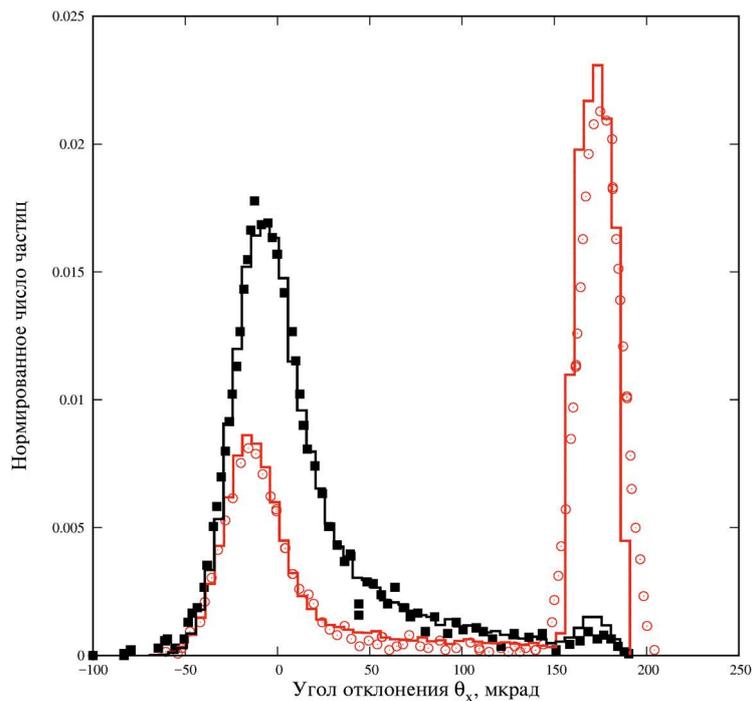
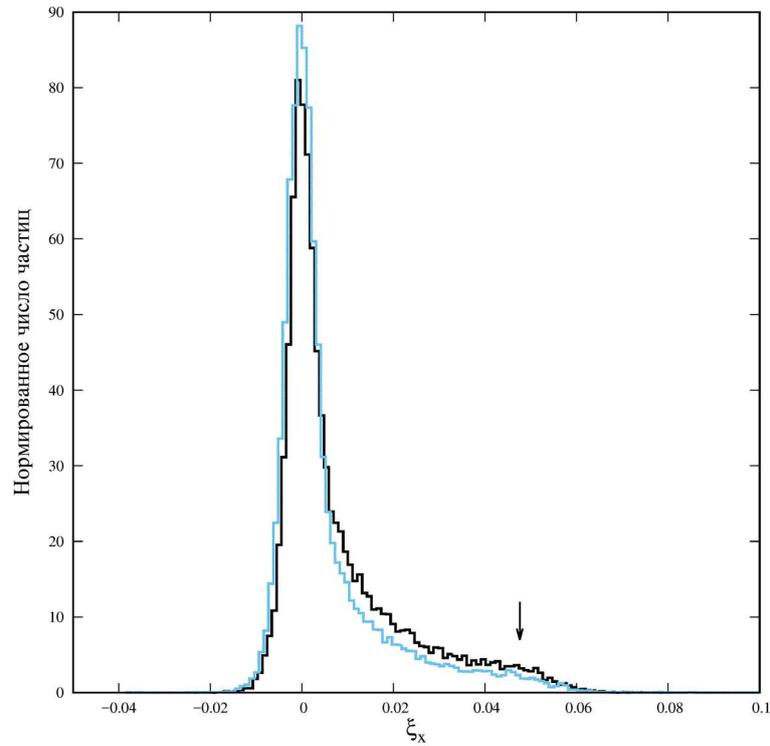
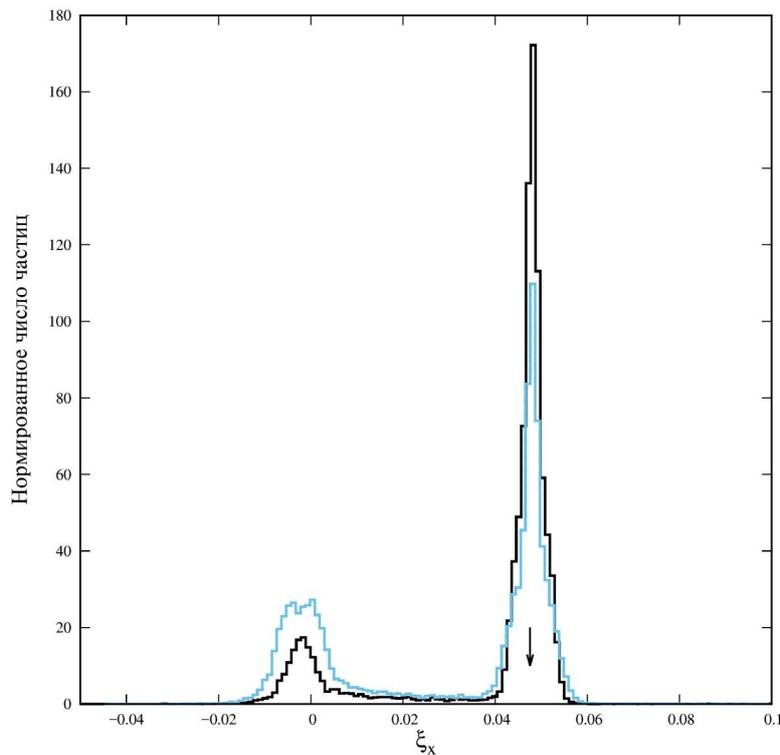


Рис. 3. Угловое распределение пучка электронов и позитронов с энергией 120 ГэВ в (110) плоскостном канале кремния

На рисунке результаты эксперимента [5] для электронов и позитронов обозначены квадратиками и кружками, соответственно. Результаты компьютерного моделирования для электронов и позитронов обозначены черной линией и красной линией, соответственно. В компьютерном эксперименте выполнялся отбор по углам влета частиц от $-18,8$ до $+18,8$ мкрад.



a



б

Рис. 4. Распределение проекции вектора спиновой поляризации на ось OX для пучка электронов (*a*) и позитронов (*б*) в зависимости от энергии в (110) плоскостном канале кремния

Черной линией обозначен результат компьютерного эксперимента с отбором по углам влета частиц от $-9,4$ до $+9,4$ мкрад, а синей – от $-18,8$ до $+18,8$ мкрад. Стрелочками обозначены положение максимума вектора спиновой поляризации, рассчитанные по формуле В. Л. Любошица.

Вывод. Предварительные оценки показывают, что согласие между результатами моделирования и экспериментом [5] может быть достигнуто при отборе частиц по углам влета от $-9,4$ до $+9,4$ мкрад, если в расчетах учесть явление динамического хаоса с помощью теории [16]. В [16] было показано, что источником динамического хаоса являются квантовые флуктуации поперечной координаты и импульса каналированной частицы, которые связаны между собой принципом неопределенности Гейзенберга.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Ханты-Мансийского автономного округа – Югры в рамках научного проекта № 15-41-00048 «р_урал_а».

Литература

1. Burmistrov L., Calderini G., Ivanov Yu., Massacrier L., Robbel P., Scandale W., Stocchi A. Measurement of Short Living Baryon Magnetic Moment using Bent Crystals at SPS and LHC // CERN-SPSC-2016-030. 2016. URL: <http://cds.cern.ch/record/2194564> (дата обращения: 14.10.2017).
2. Gurevich G. M., Lukhanin A. A., Maas F., Plis Yu. A., Sidorin A. O., Smirnov A. V., Thomas A., Usov Yu. A. // In proceedings of “XVth International Workshop in Polarized Sources, Targets and Polarimetry”, PSTP2015, 14–18 September 2015, Bochum, Germany. URL: <https://pos.sissa.it/243/043/pdf> (дата обращения: 14.10.2017).
3. Mazzolari A., Bagli E., Bandiera L., Guidi V., Backe H., Lauth W., Tikhomirov V., Berra A., Lietti D., Prest M., Vallazza E., De Salvador D. Steering of a Sub-GeV Electron Beam through Planar Channeling Enhanced by Rechanneling // Phys Rev Lett. 2014. V. 112. P. 135503. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.135503.
4. Wienands U., Markiewicz T. W., Nelson J., Noble R. J., Turner J. L., Uggerhøj U. I., Wistisen T. N., Bagli E., Bandiera L., Germogli G., Guidi V., Mazzolari A., Holtzapple R., Miller M. Observation of Deflection of a Beam of Multi-GeV Electrons by a Thin Crystal // Phys Rev Lett. 2015. V. 114. P. 074801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.074801.
5. Bagli E., Guidi V., Mazzolari A., Bandiera L., Germogli G., Sytov A.I., De Salvador D., Berra A., Prest M., Vallazza E. Experimental evidence of independence of nuclear dechanneling length on the particle charge sign // Eur Phys J C. 2017. V. 77. №. 2. P. 71–76. DOI: 10.1140/epjc/s10052-017-4642-y.
6. Olive K. A., Agashe K., Amsler C. et al. Particle Data Group // Chin Phys C. 2015. V. 38. P. 090001.
7. Lyuboshits V. L. Spin rotation associated with deflection of relativistic charged particle in an electric field // Yadernaya Fizika. 1980. V. 31. № 4. P. 986–992.
8. Кощев В. П., Штанов Ю. Н., Моргун Д. А., Панина Т. А. Моделирование процесса отклонения релятивистских электронов изогнутым кристаллом кремния // Письма в ЖТФ. 2015. Т. 41. Вып. 19. С. 55–63.
9. Marsaglia G., Bray T. A. A Convenient Method for Generating Normal Variables // SIAM Rev. 1964. V. 6. № 3. P. 260–264. DOI: 10.1137/1006063.
10. Штанов Ю. Н., Кощев В. П., Моргун Д. А. TROPICS. Программный комплекс для моделирования траекторий движения быстрых заряженных частиц в кристаллах // Библиотека программ «JINRLIB». URL: <http://wwwinfo.jinr.ru/programs/jinrlib/tropics/index.html> (дата обращения: 14.10.2017).
11. Gemmel D. S. Channeling and related effects in the motion of charged particles through crystals // Rev Mod Phys. 1974. V. 46. № 1. P. 29–235.

12. Doyle P. A, Turner P. S. Relativistic Hartree-Fock X-ray and electron scattering factors // *Acta Cryst A*. 1968. V. 24. P. 390–397. DOI: 10.1107/S0567739468000756.
13. Штанов Ю. Н., Моргун Д. А., Фокин А. С. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014618657. М. : Роспатент, 2014.
14. Линдхард Й. Влияние кристаллической решетки на движение быстрых заряженных частиц // *УФН*. 1969. Т. 99. Вып. 2. С. 249–296. DOI: 10.3367/UFNr.0099.196910c.0249.
15. Kitagawa M., Ohtsuki Y. H. Modified dechanneling theory and diffusion coefficients // *Phys Rev B*. 1973. V. 8. № 7. P. 3117–3123. DOI: 10.1103/PhysRevB.8.3117.
16. Кощев В. П., Моргун Д. А., Панина Т. А., Штанов Ю. Н. Влияние квантовых флуктуаций на движение релятивистских протонов в кристаллах // *Поверхность. Рентгенов., синхротрон. и нейтрон. исслед.* 2012. № 12. С. 57–59.