УДК 530.1: 517.958

# НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ МОДЕЛЬ БЕРЕЗИНА – МАРИНОВА СО СВЕРХТОНКИМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

**С. Л. Лебедев, В. В. Терещенко**
*Сургутский государственный университет, integrall@mail.ru*

Рассматривается псевдоклассическая модель Березина – Маринова с двумя заряженными частицами, обладающими спином ½. Получены уравнения движения в грассмановых и в классических («наблюдаемых») переменных. Определены точные интегралы движения и показано, что орбитальное движение остается Кеплеровым. В то же время, полное описание пространственного движения включает грассманову (нильпотентную) компоненту, которая приводит к наблюдаемым эффектам, если использовать процедуру усреднения с фазовой плотностью Березина – Маринова. При специальном выборе центральных потенциалов рассматриваемая система представляет псевдоклассическое описание атома водорода с учетом сверхтонкого взаимодействия. Указан частный случай полной интегрируемости радиального движения электрона.

*Ключевые слова:* псевдоклассическая механика, модель Березина – Маринова, прецессия спина, фазовая плотность, алгебра Грассмана.

# NONRELATIVISTIC BEREZIN – MARINOV MODEL WITH HYPERFINE INTERACTION

**S. L. Lebedev, V. V. Tereshchenko**
*Surgut State University*

Pseudo-classical Berezin – Marinov model with two charged particles carrying ½ spin is considered. The motion equations in Grassmann as well as in classical (“observable”) variables are obtained. The true integrals of motion are determined and the orbital motion is shown to remain Kepler. However the complete description of the spatial motion includes the Grassmann (nilpotent) component, which leads to the observed effects only after application of the averaging procedure with the use of Berezin – Marinov phase space density. Under special choice of central potentials the system considered gives a pseudo-classical description to the hydrogen atom with the hyperfine interaction considered. The particular case of complete integrability of the electron radial motion is described.

*Keywords:* pseudo-classical mechanics, Berezin – Marinov model, spin precession, phase space density, Grassmann algebra.

**1. Введение.** Псевдоклассическая механика (ПКМ), понимаемая как обобщение аналитической механики Лагранжа – Гамильтона, использует в дополнение к обычным степеням свободы грассмановы функции времени. Она вошла в научный обиход около 40 лет назад [1–4]. В известном смысле ПКМ представляет собой результат обратного движения от квантовой теории к классике. Не случайно ПК системы рассматривались первоначально только в контексте проблемы квантования и на описание физической реальности не претендовали. Тем не менее, с момента возникновения ПКМ обращалось внимание на параллели с теорией суперструн и на особую роль суперсимметрии (т. е. инвариантности действия по отношению к преобразованиям, перемешивающим обычные и грассмановы координаты) [2–6]. После появления суперсимметричной квантовой механики выяснилось, что суперсимметрия ответственна за существование практически всех точно решаемых задач из учебников по квантовой механике [12]. Это стимулировало дополнительное изучение ПК систем, так как теперь методы квазиклассического анализа стало возможным применять к решению практических задач квантовой механики [7–11].

Наша работа посвящена исследованию нерелятивистской [1] модели Березина – Маринова (БМ) [1, 3]. Мы рассматриваем систему двух частиц спина ½. В дополнение к гамильтониану, использованному авторами [3], мы вводим сверхтонкое взаимодействие частиц (будем называть тяжелую частицу «протоном» или «нуклоном», а легкую – электроном). Таким образом, мы имеем механическую систему с тремя моментами количества движения (МКД): орбитальным – у электрона, и двумя спиновыми МКД – у протона и электрона. Фазовое пространство системы 12-мерно: координата $\vec{q}$ и сопряженный импульс $\vec{p}$ являются четными элементами грассмановой алгебры, а шесть переменных – $\vec{\xi}$ (для электрона) и $\vec{\xi}^{(N)}$ (для нуклона) – нечетными:

$$\left[\xi_i,\xi_k\right]_+ \equiv \xi_i\xi_k+\xi_k\xi_i=0,\ \left[\xi_i^{(N)},\xi_k^{(N)}\right]_+=0,\ \left[\xi_i,\xi_k^{(N)}\right]=0. \tag{1}$$

Динамика атома определяется действием

$$A=\int\left\{\frac{i}{2}\vec{\xi}\cdot\dot{\vec{\xi}}+\frac{i}{2}\vec{\xi}^{(N)}\cdot\dot{\vec{\xi}}^{(N)}+\vec{p}\cdot\dot{\vec{q}}-H\left(\vec{p},\vec{q},\vec{\xi},\vec{\xi}^{(N)}\right)\right\}dt, \tag{2}$$

в котором функция Гамильтона

$$H=\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}+V_0(\vec{q})+\vec{l}\cdot\vec{s}\ V_1(\vec{q})+\vec{j}\cdot\vec{s}^{(N)}\ V_{12}(\vec{q}), \tag{3}$$

а полный МКД электрона $\vec{j}=\vec{l}+\vec{s}$ . Спины электрона и нуклона определяются согласно [1–3]:

$$\vec{s}=-\frac{i}{2}\vec{\xi}\times\vec{\xi},\qquad \vec{s}^{(N)}=-\frac{i}{2}\vec{\xi}^{(N)}\times\vec{\xi}^{(N)}, \tag{4}$$

а орбитальный МКД $\vec{l}=\vec{q}\times\vec{p}$ . Потенциалы $V_0$, $V_1$, $V_{12}$ зависят только от координаты $\vec{q}$ и в дальнейшем будут считаться центральными.

Важной особенностью ПК систем является наличие грассмановых (нильпотентных) добавок к координатам и импульсам частиц. Эти добавки, разумеется, ненаблюдаемы: экспериментатор имеет дело с вещественными числами. Поскольку нильпотентные слагаемые, как в уравнениях движения, так и в самих решениях связаны со спиновыми степенями свободы, для получения «усредненного» классического спина можно воспользоваться ПК вариантом спиновой матрицы плотности [3], которая в нерелятивистском случае имеет вид [2]

$$\rho(\vec{\xi},\vec{C})=\vec{C}\cdot\vec{\xi}-\frac{i}{6}(\xi\xi\xi) \tag{5}$$

и удовлетворяет условию нормировки,

$$\int\rho(\vec{\xi})(d\vec{\xi})=1\,, \tag{6}$$

а также условию сохранения «фазового объема»

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\left\{\rho,H\right\}=0. \tag{7}$$

Здесь явная зависимость от времени имеется у классического спина $\vec{C}(t)$, а скобка Пуассона

$$\left\{f,g\right\}=i\frac{\vec{\partial}f}{\partial\xi_k}\frac{g\overleftarrow{\partial}}{\partial\xi_k}+i\frac{\vec{\partial}f}{\partial\xi_k^{(N)}}\frac{g\overleftarrow{\partial}}{\partial\xi_k^{(N)}}+\frac{\partial f}{\partial\vec{q}}\frac{\partial g}{\partial\vec{p}}-\frac{\partial f}{\partial\vec{p}}\frac{\partial g}{\partial\vec{q}}\,, \tag{8}$$

[1] Преобразования суперсимметрии известны только для релятивистского варианта модели БМ.

[2] $(\xi\xi\xi)\equiv\varepsilon_{ijk}\xi_i\xi_j\xi_k$, $\vec{C}(t)$ – классический («наблюдаемый») спин. Строгие определения и детали использования анализа на грассмановой алгебре см. в [2–3].

где стрелками указаны правая (←) и левая (→) производные по нечетным аргументам [3]. Если выполнено условие (7), то усредненные уравнения движения ПКМ БМ приводят к правильным уравнениям прецессии для наблюдаемого спина $\vec{C}(t)$ [3].

В разд. 2 мы анализируем следствия уравнений движения, получаемых на основе действия (2). Раздел 3 посвящен целиком радиальному движению электрона. Мы, в частности, показываем, что сверхтонкое взаимодействие (последнее слагаемое в гамильтониане (3)) приводит к двум новым нильпотентным вкладам в координату $|\vec{q}| \equiv R$ по сравнению с решением БМ в [3]:

$$R = r(t) + \Lambda_1 a(t) + \Lambda_{12} b(t) + \Lambda_1 \Lambda_{12} c(t). \tag{9}$$

Здесь $r(t)$ – это Кеплерова траектория (если $V_0(R)$ – кулоновский потенциал), $\Lambda_1$ и $\Lambda_{12}$ – грассмановы параметры, а уравнения для числовых функций $a, b$ и $c$ сводятся к линейным уравнениям для параметрического осциллятора с возбуждением. Здесь рассматривается также частный случай полной интегрируемости системы уравнений для функций $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ (окружность $r(t) = r_0 = const$). В последнем 4-м разделе мы получаем уравнения прецессии для наблюдаемых спинов $\vec{C}$ и $\vec{C}^{(N)}$.

**2. Интегралы движения**. Уравнения Гамильтона приводят к следующей полной системе уравнений движения:

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}} = -\vec{\nabla} V_0 - (\vec{p}\times\vec{s})V_1 - (\vec{l}\cdot\vec{s})\vec{\nabla} V_{12} - (\vec{p}\times\vec{s}^{(N)})V_{12} - (\vec{j}\cdot\vec{s})\vec{\nabla} V_{12}, \tag{10}$$

$$\dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{m} + (\vec{s}\times\vec{q})V_1 + (\vec{s}^{(N)}\times\vec{q})V_{12}, \tag{11}$$

$$\dot{\vec{\xi}} = i\frac{H\overleftarrow{\partial}}{\partial\vec{\xi}} = (\vec{l}\times\vec{\xi})V_1 + (\vec{s}^{(N)}\times\vec{\xi})V_{12}, \tag{12}$$

$$\dot{\vec{\xi}}^{(N)} = i\frac{H\overleftarrow{\partial}}{\partial\vec{\xi}^{(N)}} = (\vec{j}\times\vec{\xi}^{(N)})V_{12}. \tag{13}$$

Используя определения (4), а также центральную симметрию потенциалов, несложно показать, что уравнения прецессии для МКД имеют вид:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = (\vec{s}\times\vec{l})V_1 + (\vec{s}^{(N)}\times\vec{l})V_{12}, \tag{14}$$

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = (\vec{l}\times\vec{s})V_1 + (\vec{s}^{(N)}\times\vec{s})V_{12}, \tag{15}$$

$$\frac{d\vec{s}^{(N)}}{dt} = (\vec{j}\times\vec{s}^{(N)})V_{12}. \tag{16}$$

Законы сохранения, соответствующие уравнениям (14)–(16), включают полный МКД $\vec{J} = \vec{l} + \vec{s} + \vec{s}^{(N)}$, а также проекции $\vec{J}\cdot\vec{s}^{(N)}$ и $\vec{J}\cdot\vec{j}$:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\vec{J}\cdot\vec{s}^{(N)} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\vec{J}\cdot\vec{j} = 0. \tag{17}$$

Из уравнения (14) следует также сохранение длины вектора $\vec{l}$. Заметим, что $\vec{s}^2 = 0$ и $(\vec{s}^{(N)})^2 = 0$ в силу (1) и (4), так что

$$\vec{J}\cdot\vec{s}^{(N)} = \vec{j}\cdot\vec{s}^{(N)} \equiv \Lambda_{12} = const, \tag{18}$$

[3] Мы используем определение спиновой скобки Пуассона, несколько отличающееся от определения БМ, см. формулу (2.6) в [3]. Если четности функций $f$ и $g$ одинаковы, то эти определения совпадают, если четности разные, они отличаются знаком.

и

$$\frac{d}{dt}\vec{J}\cdot\vec{j}=\frac{d}{dt}\vec{j}^2=0.$$

Так как $\vec{j}^2=\vec{l}^2+\vec{s}^2+2\vec{l}\cdot\vec{s}$, мы имеем в дополнение к (18) сохранение второго спинового множителя в гамильтониане (3):

$$\vec{l}\cdot\vec{s}\equiv\Lambda_1=const. \tag{19}$$

Обратим внимание на то, что скалярные произведения $\vec{J}\cdot\vec{s}$ и $\vec{J}\cdot\vec{l}$ не сохраняются (в отличие от их суммы):

$$\frac{d}{dt}\vec{J}\cdot\vec{s}=\vec{s}^{(N)}\cdot(\vec{l}\times\vec{s})(V_1-V_{12})=-\frac{d}{dt}\vec{J}\cdot\vec{l}. \tag{20}$$

Так как $V_1\neq V_{12}$ (тонкое и сверхтонкое взаимодействия описываются разными потенциалами), несохранение скалярных произведений $\vec{J}\cdot\vec{s}$ и $\vec{J}\cdot\vec{l}$ обязано конечности объема параллелепипеда моментов:

$$\vec{s}^{(N)}\cdot(\vec{l}\times\vec{s})\neq 0\,, \tag{21}$$

при этом производная

$$\frac{d}{dt}\vec{s}^{(N)}\cdot(\vec{l}\times\vec{s})=(\vec{l}\times\vec{s})\cdot(\vec{s}^{(N)}\times\vec{l})(V_1-V_{12}) \tag{22}$$

и, вообще говоря, отлична от нуля. Появление параллелепипеда моментов в формулах (20) неслучайно. Легко проверить, что полная скобка Пуассона (8)

$$\left\{\vec{j}\cdot\vec{s}^{(N)},\vec{l}\cdot\vec{s}_0\right\}=\vec{s}^{(N)}\cdot(\vec{s}\times\vec{l}),\qquad \vec{s}_0=\vec{s}+\vec{s}^{(N)}, \tag{23a}$$

$$\left\{\vec{l}\cdot\vec{s},\vec{l}\cdot\vec{s}_0\right\}=-\vec{s}^{(N)}\cdot(\vec{s}\times\vec{l}). \tag{23b}$$

В квантовой механике некоммутативность операторов $\vec{j}\cdot\vec{s}^{(N)}$ и $\vec{l}\cdot\vec{s}_0$ соответствует двум неэквивалентным способам сложения трех МКД [4]:

$$\vec{J}=(\vec{l}+\vec{s})+\vec{s}^{(N)}=\vec{j}+\vec{s}^{(N)}, \tag{24a}$$

$$\vec{J}=\vec{l}+(\vec{s}+\vec{s}^{(N)})=\vec{l}+\vec{s}_0. \tag{24b}$$

Неравенство (21) на квантовом языке означает невозможность включения проекций $\vec{J}\cdot\vec{s}$ и $\vec{J}\cdot\vec{l}$ в полный набор операторов, что эквивалентно их несохранению. Это же соображение применимо и к $\vec{l}\cdot\vec{s}_0$ (так как $\vec{l}\cdot\vec{s}$ сохраняется, можно говорить о несохранении только $\vec{l}\cdot\vec{s}^{(N)}$).

**3. Радиальное движение.** Уравнение для радиальной координаты $R\equiv|\vec{q}|$ можно получить следующим образом:

$$\vec{q}\cdot\vec{p}=R\cdot p_r,\qquad \vec{l}^2=R^2(\vec{p}^2-p_r^2). \tag{25}$$

Дифференцируя первое из этих соотношений по времени, и используя уравнения (10), (11), находим:

$$\frac{\vec{p}^2-p_r^2}{m}-R\frac{dp_r}{dt}=RV_0'(R)+\Lambda_1 RV_1'(R)+\Lambda_{12}RV_{12}'(R)\;, \tag{26}$$

см. (18), (19). Применяя второе из соотношений (25), получаем замкнутую систему уравнений для функций $R$ и $p_r$:

[4] Правило (24a) соответствует *jj*-связи, а (24b) – связи Рассела – Саундерса [13]. Гамильтониан (3) соответствует как раз правилу сложения (24a).

$$\begin{cases} \dfrac{dR}{dt} = \dfrac{p_r}{m} \quad , \\ \dfrac{dp_r}{dt} = -V_0'(R) + \dfrac{\vec{l}^{\,2}}{mR^3} - \Lambda_1 V'(R)_1 - \Lambda_{12} V_{12}'(R) \ . \end{cases} \tag{27}$$

Подставляя анзац (9) и аналогичное ему выражение для $p_r$,

$$p_r = \pi(t) + \Lambda_1 \alpha(t) + \Lambda_{12} \beta(t) + \Lambda_1 \Lambda_{12} \gamma(t), \tag{28}$$

в первое из уравнений (27), сначала находим:

$$m\dot{r} = \pi(t), \quad m\dot{a} = \alpha(t), \quad m\dot{b} = \beta(t), \quad m\dot{c} = \gamma(t) \,. \tag{29}$$

Подстановка уравнений (28), (29) во второе из уравнений (27) окончательно приводит к системе уравнений для неизвестных функций $r, a, b$ и $c$:

$$m\ddot{r} = -f(r), \tag{30}$$

$$m\ddot{a} = -f'(r)a - V_1'(r), \tag{31$a$}$$

$$m\ddot{b} = -f'(r)b - V_{12}{}'(r), \tag{31$b$}$$

$$m\ddot{c} = -f'(r)c - f''(r)ab - V_1''(r)b - V_{12}{}''(r)a \,. \tag{31$c$}$$

Здесь $f(r) \equiv V_0'(r) - \dfrac{\vec{l}^{\,2}}{mr^3}$. Уравнение (30) – это радиальное уравнение в задаче Кеплера [14]. При получении уравнений (30), (31) из (27) мы воспользовались нильпотентностью $\Lambda$-членов в уравнении (28), так что, например,

$$f(R) = f(r) + f'(r)(\Lambda_1 a + \Lambda_{12} b + \Lambda_1 \Lambda_{12} c) + \frac{1}{2} f''(r) 2\Lambda_1 \Lambda_{12} ab \,, \tag{32}$$

см. (9). Подчеркнем, что система уравнений (30), (31) точная. Так как $r(t)$ – известная периодическая функция времени, уравнения для функций $a, b$ и $c$ однотипны:

$$\ddot{y} + \omega^2(t) y = \psi_{a,b,c}(t) \,, \tag{33}$$

и представляют параметрические колебания с возбуждением, причем функции $\psi_a$, $\psi_b$ и $\psi_c$, а также частота

$$\omega(t) = \sqrt{m^{-1} f'(r(t))} \tag{34}$$

также известны, если заданы потенциалы $V_0$, $V_1$ и $V_{12}$.

Уравнения (30) и (31) могут быть легко проинтегрированы в частном случае, когда Кеплерова траектория – это окружность. Тогда $(V_0(r) = -\alpha / r)$:

$$r = r_0 \equiv \frac{\vec{l}^{\,2}}{\alpha m}, \qquad \omega = \omega_0 \equiv \frac{m\alpha^2}{(\vec{l}^{\,2})^{3/2}} \,, \tag{35}$$

а общие решения для $a(t)$ и $b(t)$ представляют собой гармонические колебания с частотой $\omega_0$ относительно точек

$$a = a_0 \equiv -\frac{V_1'(r_0)}{f'(r_0)}, \qquad b = b_0 \equiv -\frac{V_{12}'(r_0)}{f'(r_0)}. \tag{36}$$

Уравнение (31*c*) для функции $c(t)$ отличается от уравнений (31*a,b*) в двух отношениях: во-первых, произведение $ab$ приводит к генерации колебаний на частоте $2\omega_0$; во-вторых, вклады, содержащие $a(t)$ и $b(t)$, а также «перекрестные» слагаемые в произведении $ab$, приводят к появлению секулярных членов в решении, если не накладывать специальных условий на имеющиеся константы. «Раскачка», по-видимому, не исключена и в общем случае эллиптической орбиты (заметим, что все периодические процессы регулируются одной частотой, см. (34)).

Физическую интерпретацию $\Lambda$-членам в (9), (27) и (28) можно дать только после усреднения по грассмановым степеням свободы. Движения, описываемые выражениями вида (9) и (28), можно было бы понять как Шрёдингеровское Zitterbewegung [15]. Подобные свойства отмечаются и в классических спиновых моделях, не использующих грассмановы переменные [16]. Мы на этом не останавливаемся.

**4. Уравнения для наблюдаемых.** Фазовая плотность в системе двух спинов

$$\hat{\rho}(\vec{\xi},\vec{\xi}^{(N)},\vec{C},\vec{C}^{(N)}) = \rho(\vec{\xi},\vec{C})\rho(\vec{\xi}^{(N)},\vec{C}^{(N)}), \tag{36}$$

см. (5). Очевидно, что соотношения вида (6), (7) будут выполнены и для функции $\hat{\rho} = \rho\rho^{(N)}$, если они выполнены для каждого сомножителя в (36). Мы используем те же определения интегралов по переменным $\vec{\xi}$ и $\vec{\xi}^{(N)}$, что и в работе [3], так что

$$\vec{C} = \int \vec{S}\hat{\rho}(d\vec{\xi})(d\vec{\xi}^{(N)}) = \int \vec{S}\rho(d\vec{\xi}), \tag{37}$$

$$\vec{C}^{(N)} = \int \vec{S}^{(N)}\hat{\rho}(d\vec{\xi})(d\vec{\xi}^{(N)}) = \int \vec{S}^{(N)}\rho^{(N)}(d\vec{\xi}^{(N)}). \tag{38}$$

Тогда

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = -\int \vec{S}\left\{\hat{\rho}, H\right\}(d\vec{\xi})(d\vec{\xi}^{(N)}), \tag{39}$$

где

$$\left\{\hat{\rho}, H\right\} = \rho^{(N)}\left[(\vec{C}-\vec{S})\cdot(\vec{l}\times\vec{\xi})V_1 + (\vec{C}-\vec{S})\cdot(\vec{S}^{(N)}\times\vec{\xi})V_{12}\right] + \rho(\vec{C}^{(N)}-\vec{S}^{(N)})\cdot(\vec{j}\times\vec{\xi}^{(N)})V_{12}. \tag{40}$$

Подстановка выражения (40) в (39) дает:

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = (\vec{l}\times\vec{C})V_1 + (\vec{C}^{(N)}\times\vec{C})V_{12}. \tag{41}$$

При получении (41) мы использовали следующие свойства интегралов по $\xi_k$ [3]:

$$\int \xi_k d\xi_k = 1, \quad \int 1\, d\xi_k = 0, \quad \int S_m\xi_k(d\vec{\xi}) = \delta_{mk}, \tag{42}$$

и т. п. Действуя тем же методом, находим уравнение для «наблюдаемого» спина нуклона:

$$\frac{d\vec{C}^{(N)}}{dt} = (\vec{l}+\vec{C})\times\vec{C}^{(N)}V_{12}. \tag{43}$$

Наконец, уравнение (14) для орбитального МКД после усреднения по $\vec{\xi}$ и $\vec{\xi}^{(N)}$ приобретает вид:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = (\vec{C}\times\vec{l})V_1 + (\vec{C}^{(N)}\times\vec{l})V_{12}. \tag{44}$$

Заметим, что уравнения (41), (43) и (44) приводят к сохранению $c$-числовых функций

$$\Lambda_1^c = \vec{l}\cdot\vec{C} = const; \quad \Lambda_{12}^c = (\vec{l}+\vec{C})\cdot\vec{C}^{(N)} = const, \tag{45}$$

а также полного МКД

$$\vec{J}^c = \vec{l} + \vec{C} + \vec{C}^{(N)}. \tag{46}$$

Совпадение уравнений (44), (41) и (43) с их грассмановыми аналогами (14), (15) и (16), как и законы сохранения (45), (46), свидетельствуют о наличии соответствия между ПК и классической теорией волчка. Вместе с тем, теория БМ не сводится к классической теории, что можно понять из структуры полученного решения. Если усреднить нильпотентные поправки в уравнениях (9) и (28), то можно заметить, что соответствующие усредненные выражения не могут быть получены из усредненных уравнений (10), (11) (в последнем из них усреднение приводит к простой замене $\vec{s}$ на $\vec{C}$ и $\vec{s}^{(N)}$ на $\vec{C}^{(N)}$). Это связано с невозможностью использовать разложения вида (32).

**Литература**

1. Березин Ф. А., Маринов М. С. Классический спин и алгебра Грассмана // Письма в ЖЭТФ. 1975. № 21. С. 678–680.
2. Casalbuoni R. The Classical Mechanics for Bose-Fermi Systems // Nuovo Cim. 1976. № 3. P. 389–431.
3. Berezin F. A., Marinov M. S. Particle Spin Dynamics as the Grassmann Variant of Classical Mechanics // Ann Phys. 1977. № 104. P. 336–362.
4. Brink L., Di Vecchia P., Howe A P. A lagrangian formulation of the classical and quantum dynamics of spinning particles // Nucl Phys. 1977. № 118. P. 76–94.
5. Brink L., Deser S., Zumino B., Di Vecchia P., Howe P. Local supersymmetry for spinning particles // Phys Lett. 1976. № 64. P. 435–438.
6. Маринов М. С. Релятивистские струны и дуальные модели сильных взаимодействий // УФН. 1977. № 121. С. 377–425.
7. Abe S., Naka S. On the Bohr-Sommerfeld Quantization in the Pseudoclassical Systems // Prog Theor Phys. 1984. № 72 (4). P. 881–883.
8. Junker G., Matthiesen S. Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics // J Phys. 1994. № 27. P. 751–755.
9. Junker G. Recent Developments in Supersymmetric Quantum Mechanics // Turk J Phys. 1995. № 19. P. 230–248.
10. Junker G. Supersymmetric methods in quantum and statistical physics. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1996. 173 p.
11. Bagchi B. Supersymmetry in quantum and classical mechanics. United Kingdom : Chapman &Hall/CRC ; Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 2001. 226 p.
12. Генденштейн Л. Э., Криве И. В. Суперсимметрия в квантовой механике // УФН. 1985. № 146. С. 553–590.
13. Шпольский Э. В. Атомная физика. Т. 2. М. : Наука, 1974. 447 с.
14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М. : Наука, 1988. 215 с.
15. Бете Г. Квантовая механика. М. : Мир, 1965. 333 с.
16. Rivas M. Kinematical Theory of Spinning Particles. New York : Kluwer Academic Publishers, 2002. 360 p.