

УДК 691.11: 51-74

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛИТ ПОКРЫТИЙ ИЗ ДРЕВЕСИНЫ И КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ ТЕОРИИ

Г.Л. Горынин, Ю.И. Григорьев

Сургутский государственный университет, grigoriev-1991@mail.ru

Представлена математическая модель плиты покрытия из разномодульного композитного материала, получены аналитические формулы для напряжений и перемещений для случая изгиба плиты для разномодульного материала. Рассмотрен пример расчета плиты покрытия.

Ключевые слова: деревянные композитные конструкции, моделирование изгиба разномодульных материалов, клеенные плиты покрытия, разномодульная теория, модуль упругости древесины и однонаправленного клеенного шпона.

MODELING OF ROOF SLABS FROM WOOD AND COMPOSITE MATERIALS ON THE BASIS OF THE DIFFERENT-MODULUS THEORY

G.L. Gorynin, Y.I. Grigoryev

Surgut State University, grigoriev-1991@mail.ru

A mathematical model of a roof slab of made of a different-modulus composite material is presented, analytical formulas for stresses and displacements are obtained for the case of bending a slab for a different-modulus material. An example of calculating a roof slab is considered.

Keywords: wooden composite structures, modeling of bending of different-modulus materials, glued roof slabs, a different-modulus theory, modulus of elasticity of wood and Laminated Veneer Lumber.

Введение

Клеенные панели покрытия из древесины и композитных материалов на основе древесины относятся к облегченным конструкциям промышленного изготовления. Их используют в зданиях с наружным отводом воды с кровли, в отапливаемых зданиях при относительной влажности воздуха в помещениях до 75% и в неотапливаемых при расчетной температуре наружного воздуха не ниже $t = -5^\circ\text{C}$. Целесообразность применения клефанерных плит определяется малым весом при высокой несущей способности, т.к. выполняет одновременно функции прогонов и настила, а также обеспечивает теплозащиту сооружения.

Одним из типовых решений плит является клефанерная плита покрытия, которая состоит из продольных ребер из древесины и фанерных обшивок (см. рис.1).

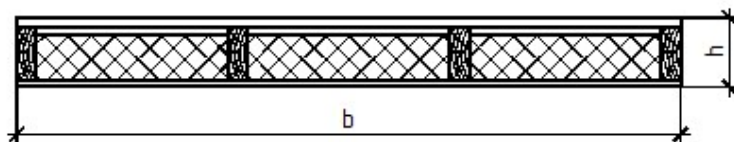


Рис. 1. Поперечное сечение клефанерной плиты покрытия

Для увеличения прочностных и жесткостных характеристик возможно применение в качестве обшивок плит покрытия листов из однонаправленного клеенного шпона (LVL-

бруса).

Моделирование клеёных плит покрытий на основе композитных материалов

Представленные в работах [1] и [2] экспериментальные результаты по определению механических свойств древесины и однонаправленного клеенного шпона позволяют сделать вывод, что указанные материалы являются разносопротивляемыми, т.е. модули упругости на растяжение и сжатие различны (см. рис.2).

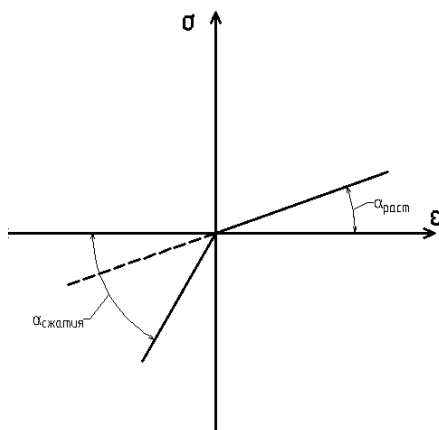


Рис. 2. Схематичный вид диаграммы напряжение-деформация для древесины при растяжении-сжатии

Напряжения в таком случае определяются следующим образом:

$$\sigma_p = \varepsilon * E_p, \quad \sigma_c = \varepsilon * E_c, \quad (1)$$

где: σ_p, σ_c - нормальные напряжения растяжения, сжатия в поперечном сечении балки соответственно; ε - продольная деформация; E_p, E_c - модули упругости на растяжение, сжатие соответственно.

В работе [3] и [4] показано, что при изгибе упругих многослойных анизотропных балок выполняется гипотеза плоского сечения. Предположим, что данная гипотеза также выполняется для балок из разносопротивляемого материала. Таким образом деформации вычисляются:

$$\varepsilon = -(\chi - y_0)\chi, \quad (2)$$

где χ - это кривизна, y_0 - координата нейтрального слоя.

Подставив формулу (2) в формулу (1) получим напряжения в сжатых и растянутых слоях сечения:

$$\sigma_p = -\chi * E_p * (y - y_0) \quad (3)$$

$$\sigma_c = -\chi * E_c * (y - y_0) \quad (4)$$

Рассмотрим клеенную плиту покрытия, в которой: верхний и нижний слой - лист LVL, продольные ребра из древесины. При чем, продольные ребра можно разделить на две области. Верхняя часть ребра будет работать на сжатие, нижняя - на растяжение (см. рис.3). Используя разномодульную теорию, изложенную в [5] и [6], определим в общем случае величину изгибающего момента и положение нейтральной линии.

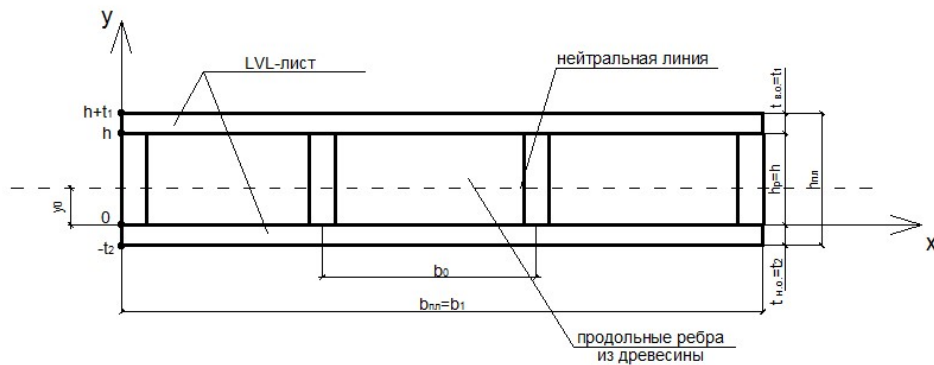


Рис. 3. расчетное сечение клеенной плиты покрытия

Изгибающий момент определяется:

$$M = \int_{F_c^L} \sigma_c^L * (y - y_0) dF + \int_{F_p^L} \sigma_p^L * (y - y_0) dF + \int_{F_c^D} \sigma_c^D * (y - y_0) dF + \int_{F_p^D} \sigma_p^D * (y - y_0) dF, \quad (5)$$

где $F_c^L, F_p^L, F_c^D, F_p^D$ - площади поперечных сечений сжатой и растянутой зоны LVL-бруса и древесины соответственно; $\sigma_p^L, \sigma_c^L, \sigma_p^D, \sigma_c^D$ - нормальные напряжения на растяжение и сжатие в поперечном сечении плиты для LVL-бруса и древесины соответственно.

Подставив формулы (3), (4) в формулу (5), и выполнив интегрирование, определим величину изгибающего момента для случая разномодульного материала:

$$M = \chi * \left[b_1 * E_c^L * \left(\frac{(h + t_1 - y_0)^3 - (h - y_0)^3}{3} \right) + b_2 * E_c^D * \frac{(h - y_0)^3}{3} + b_2 * E_p^D * \frac{(y_0)^3}{3} - b_1 * E_p^L * \left(\frac{(y_0)^3}{3} - \frac{(t_2 + y_0)^3}{3} \right) \right], \quad (6)$$

где $E_c^L, E_p^L, E_c^D, E_p^D$ - модули упругости LVL-бруса и древесины соответственно; h -высота поперечного сечения ребра (см. рис.2), t_1, t_2 - толщины верхней и нижней обшивок соответственно, b_1 - ширина плиты, b_2 - ширина поперечных продольных ребер в сумме. Для однородных упругих балок из курса сопротивления материалов известно уравнение для определения изгибающего момента:

$$M = \chi * EI, \quad (7)$$

где EI - изгибная жесткость однородной балки.

Введем обозначение для величины изгибной жесткости слоистой балки по аналогии с изгибной жесткостью однородной балки, используя для этого квадратные скобки. Из выражений (6) и (7) для этой величины следует равенство:

$$[EI] = \left[b_1 * E_c^L * \left(\frac{(h + t_1 - y_0)^3 - (h - y_0)^3}{3} \right) + b_2 * E_c^D * \frac{(h - y_0)^3}{3} + b_2 * E_p^D * \frac{(y_0)^3}{3} - b_1 * E_p^L * \left(\frac{(y_0)^3}{3} - \frac{(t_2 + y_0)^3}{3} \right) \right] \quad (8)$$

При этом равенство (6) может быть записано в виде аналогично равенству (7):

$$M = \chi * [EI] \quad (9)$$

Принимая во внимание, что рассматривается изгиб балки и продольная нагрузка отсутствует (продольные усилия $N=0$), получим:

$$\int_{F_c^l} \sigma_c^l dF + \int_{F_c^d} \sigma_c^d dF + \int_{F_p^l} \sigma_p^l dF + \int_{F_p^d} \sigma_p^d dF = 0 \quad (10)$$

Подставив формулы (3) и (4) в равенство (10), собрав подобные и сократив на величину χ , получим квадратное уравнение на величину y_0 , которая является координатой нейтральной линии:

$$E_c^l * b_1 * ((h + t_1 - y_0)^2 - (h - y_0)^2) + E_c^d * b_2 * (h - y_0)^2 - E_p^d * b_2 * (y_0)^2 - E_p^l * b_1 * (t_2^2 + 2t_2 y_0) = 0 \quad (11)$$

Равенство (11) является уравнением для нахождения y_0 . Положение нейтральной линии определяется численно, исходя из заданных параметров, таких как толщина верхней обшивки, количество и размеры поперечных ребер.

Выразив из (9) кривизну χ , и приведя подобные, из равенств (3), (4) получим:

$$\sigma_p^i = \frac{-M * E_p^i * (y - y_0)}{[EI]}, \sigma_c^i = \frac{-M * E_c^i * (y - y_0)}{[EI]}, \text{ где } i \in [л, д]. \quad (12)$$

Алгоритм проектирования.

1. Задание исходных параметров - габаритные размеры плиты, нагрузка на плиту, материал.
2. Определение количества продольных ребер. Минимальное количество продольных ребер - 2. Максимальное - ограничено шириной плиты покрытия. Оптимальное количество принимается после проведения и анализа расчетов (из практики проектирования принимают от 3 до 5).
3. Размеры поперечного сечения продольных ребер - подбираются из условия пожаробезопасности и сортамента на пиломатериалы.
4. Определение толщины верхней фанерной обшивки - толщина верхней обшивки определяется из расчета на действие монтажной нагрузки и из расчета на прочность по нормальным напряжениям.
5. Определение толщины нижней фанерной обшивки - толщина нижней обшивки определяется из расчета прочности по нормальным напряжениям и расчета на жесткость.
6. Выбор оптимальных параметров плиты покрытия.

В дальнейшем, при рассмотрении клеенной плиты покрытия, анализируются несколько параметров, таких как толщины верхней и нижней обшивок, высота и ширина ребра, количество

продольных ребер. Для сравнения результатов разномодульной теории и теории, изложенной в [6], определим параметры, которые меняются в ограниченном диапазоне.

Пример расчета клеенной плиты покрытия.

Рассмотрим пример расчета клеенной плиты покрытия на прочность и жесткость по разномодульной теории и теории, изложенной в [7] в соответствии с Алгоритмом проектирования.

1. Для расчета приняты следующие исходные данные:

Рассматривается плита длиной (l) 6 м, шириной (b) 1,5 м. Материал: древесина - сосна 2 сорт (класс прочности С22), LVL-брус - сорт К40 (класс прочности С45). Режим нагружения, согласно [7] - В, условие эксплуатации - 2.

Верхний слой - лист LVL, нижний слой - лист LVL. Продольные ребра приняты из цельной древесины. Модули упругости материалов для расчета по разномодульной теории приняты в соответствии с полученными экспериментальными данными, изложенными в [1] и [2]: $E_c^L=18180$ МПа, $E_p^L=13650$ МПа, $E_c^D=16670$ МПа, $E_p^D=10100$ МПа.

Модули упругости материалов для расчета в соответствии с [7] (формулы 8,9, приложение В). $E_{сп}^L=13500$ МПа, $E_{сп}^D=9000$ МПа.

Расчетные сопротивления материалов приняты в соответствии с [6]: $R_c^L=17,82$ МПа, $R_p^L=16,04$ МПа, $R_c^D=11,58$ МПа, $R_p^D=6,24$ МПа.

Нагрузка принята равной:

Расчетная нагрузка $q_p=450$ кг/м², нормативная нагрузка $q_n=330,8$ кг/м².

Погонная нагрузка принята равной:

Расчетная нагрузка $q_p=675$ кг/м, нормативная нагрузка $q_n=496,32$ кг/м².

2. Определение количества продольных ребер. Минимальное количество продольных ребер - 2. Максимальное - ограничено шириной плиты покрытия. Оптимальное количество принимается после проведения и анализа расчетов (из практики проектирования принимают от 3 до 5). Для данного примера приведем расчет принимая количество ребер: 3, 4 и 5 шт.

3. Ширина ребра принимается из условия пожаробезопасности. Минимально допустимая ширина - 54 мм (60 мм с учетом острожки по 3 мм с каждой стороны в соответствии с сортаментом на пиломатериалы). Высота продольных ребер задается в соответствии с сортаментом на пиломатериалы и принимается равной 69, 94, 119 и 144 мм с учетом острожки соответственно. При рассмотрении задачи принимаются поочередно все указанные размеры высоты поперечного сечения продольного ребра.

4. Толщина верхней обшивки предварительно определяется из расчета на действие монтажной нагрузки. Полку из LVL-листа рассчитываем как пластинку, заделанную в местах приклейки к ребрам. Груз P считать распределенным на ширину 100 см (см. рис.4).

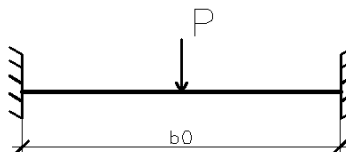


Рис.4. Расчетная схема для расчета на монтажную нагрузку

Расчет проводится как изгибаемого элемента по нормальным напряжениям.

$$\frac{M_m}{W} \leq R_{c,90}^L * 1,2, \quad (13)$$

где: M_m - величина изгибающего момента от действия монтажной нагрузки; W - момент сопротивления на ширину 100 см в плоскости листа поперек волокон, $R_{c,90}^l$ - расчетное сопротивление сжатию LVL-бруса поперек волокон в плоскости листа, определяемого по [7]. Изгибающий момент равен:

$$M = \frac{P \cdot b_0}{8}, \quad (14)$$

где P - монтажная нагрузка, равная 120 кг, b_0 - расстояние между ребрами в свету. Момент сопротивления определяется по следующей формуле:

$$W = \frac{100 \cdot t_1}{6} \quad (15)$$

Тогда толщину верхней обшивки определим из условия (13):

$$t_1 \geq \sqrt{\frac{P \cdot b_0 \cdot 6}{R_{c,90}^l \cdot 1,2 \cdot 8 \cdot 100}}, \quad (16)$$

Для четырех продольных ребер толщину верхней обшивки определим из условия (16):

$$t_1 \geq \sqrt{\frac{P \cdot b_0 \cdot 6}{R_{c,90}^l \cdot 1,2 \cdot 8 \cdot 100}} \geq 0,91 \text{ см},$$

Таким образом толщина верхней обшивки предварительно принимается 10 мм. В дальнейшем при подборе толщины нижней обшивки из условия прочности, учитывается выполнение условия прочности плиты как в зоне сжатия, так и в зоне растяжения.

5. Толщина нижней обшивки определяется из расчета прочности по нормальным напряжениям и расчета на жесткость.

Для определения толщины нижней обшивки используем графический метод. Для этого необходимо построить графики зависимости напряжений при растяжении и сжатии от толщины нижней обшивки при заданной толщине верхней обшивки, размеров и количестве продольных ребер. Из построенного графика определяем толщину нижней обшивки при достижении величины нормальных напряжений на растяжение и сжатие величины расчетных сопротивлений, исходя из условия 17:

$$-R_c^i \leq \sigma \leq R_p^i, \quad (17)$$

где: R_c^i - расчетное сопротивление материала на сжатие, R_p^i - расчетное сопротивление материала на растяжение.

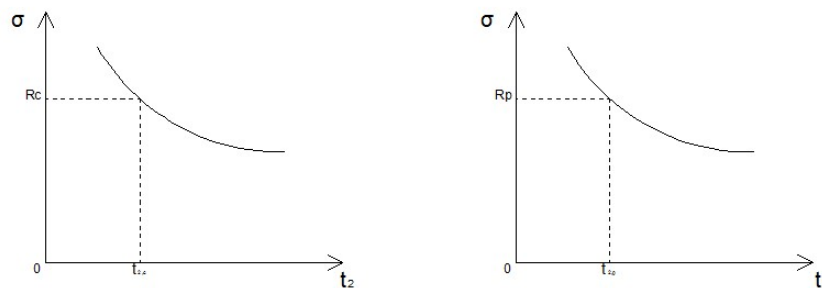


Рис.5 Графики зависимости нормальных напряжений при растяжении и сжатии от толщины нижней

обшивке

Нормальные напряжения на растяжение и сжатие определяются по формулам(12).

Анализируемом параметром в представленной задаче является толщины нижней обшивки, для определения которой необходимо:

- произвести расчет на прочность и определить толщину нижней обшивки при достижении величин напряжений на растяжение и сжатие расчетных сопротивлений при заданных размерах и количестве продольных ребер.

- произвести расчет по деформациям и определить толщину нижней обшивки при достижении величины относительного прогиба предельному прогибу, нормируемому[8] при заданных размерах и количестве продольных ребер:

$$\frac{f}{l} \leq \left[\frac{f}{l}\right]_u, \quad (18)$$

$$\frac{f}{l} = \frac{5 \cdot q_n \cdot l^3}{384 \cdot [EI]} \leq \left[\frac{f}{l}\right]_u = \frac{1}{200}$$

- определить необходимую толщину обшивки с учетом сортамента и типовых размеров. Результаты расчета на прочность приведены при условии достижения нормальных напряжений величин расчетного сопротивления в таблицах 1, 2, 3.

Таблица 1

Количество продольных ребер - 4

Высота ребра, мм	Толщина нижней обшивки по расчету в соответствии с [6], мм			Толщина нижней обшивки по расчету по разномодульной теории, мм		
	при $\sigma=R_p$	при $\sigma=-R_c$	Требуемая толщина нижней обшивки	при $\sigma=R_p$	при $\sigma=-R_c$	Требуемая толщина нижней обшивки
69	44.8	22.1	46	37.6	18.7	38
94	16.2	13.1	18	11.9	11.4	12
119	10.1	3.1	12	7.8	3.8	8
144	5.4	Не достигает R_c	6	5.2	Не достигает R_c	6

Таблица 2

Количество продольных ребер - 3

Высота ребра, мм	Толщина нижней обшивки по расчету в соответствии с [6], мм			Толщина нижней обшивки по расчету по разномодульной теории, мм		
	при $\sigma=R_p$	при $\sigma=-R_c$	Требуемая толщина нижней обшивки	при $\sigma=R_p$	при $\sigma=-R_c$	Требуемая толщина нижней обшивки
69	23.5	47.2	48	42.5	18.9	44
94	13.8	16.2	18	15.8	12.4	16
119	8.8	2.1	10	8.7	4.1	10
144	6.2	Не достигает R_c	8	5.8	1.2	6

Таблица 3

Количество продольных ребер - 5

Высота ребра, мм	Толщина нижней обшивки по расчету в соответствии с [6], мм			Толщина нижней обшивки по расчету по разномодульной теории, мм		
	при $\sigma=R_p$	при $\sigma=-R_c$	Требуемая толщина нижней обшивки	при $\sigma=R_p$	при $\sigma=-R_c$	Требуемая толщина нижней обшивки
69	23.3	45.3	46	18.6	34.8	36
94	13.4	15.6	16	11.8	11.4	12
119	9.1	2.1	10	7.3	2.4	8
144	5.8	Не достигает R_c	6	3.9	Не достигает R_c	4

Сравнивая результаты, видно, что экономия материала (рассматривая нижнюю обшивку) при разномодульной теории достигает до 33,3%, в зависимости от высоты продольных ребер плиты.

Расчет на жесткость проведен в соответствии с [7] и [8], согласно которым относительный прогиб плиты от нормативной нагрузки не должен превышать предельно допустимого прогиба ($[f/l]_u$), нормируемого [8].

Таблица 4

Результаты расчета по деформациям приведены в таблице 4

Высота ребра, мм	Толщина нижней обшивки по расчету в соответствии с [6], мм	Требуемая толщина нижней обшивки, мм	Толщина нижней обшивки по расчету по разномодульной теории, мм	Требуемая толщина нижней обшивки, мм
	$pruf/l=[f/l]_u$		$pruf/l=[f/l]_u$	
4 продольных ребра				
69	90.9	92	49.9	50
94	66.8	68	28	28
119	41.8	42	13.8	14
144	22.1	24	6.3	8
3 продольных ребра				
69	90.9	92	52.7	54
94	67.9	68	29.1	30
119	41.9	42	14.8	16
144	22.4	24	7.2	8

Таблица 4 (продолжение)

5 продольных ребер				
69	90.3	92	51.9	52
94	66.5	68	27.3	28
119	41.6	42	13.1	14
144	21.7	22	5.8	6

При расчете на жесткость, экономия материала (рассматривая нижнюю обшивку) при разномодульной теории достигает до 72,7%, в зависимости от высоты продольных ребер плиты.

Из анализа расчетов на прочность и жесткость можно сделать вывод, что при расчете на жесткость к плите предъявляются более высокие требования.

Экономическое сравнение вариантов

Для экономического сравнения рассмотрим плиту покрытия для производственного здания с площадью кровли 2592 кв.м. (144х18м).

Проведем стоимостное сравнение по материалу, рассматривая стоимость материала для всей плиты покрытия. Результаты сравнения представлены в таблице 5.

Таблица 5

Показатель		По расчету в соответствии с [6] при высоте ребра, мм				По расчету по разномодульной теории при высоте ребра, мм			
		69	94	119	144	69	94	119	144
Усредненная рыночная стоимость LVL-листа за 1 м ³		36 000 руб.							
Усредненная рыночная стоимость древесины за 1 м ³		11 500 руб.							
Площадь кровли, кв.м.		2592 кв.м.							
Объем LVL-листа, необходимого для нижней обшивки на все здание, м ³	3 р.	264,38	202,18	134,78	88,13	165,89	103,68	67,39	46,66
	4 р.	264,38	202,18	134,78	88,13	155,52	98,50	62,21	46,66
	5 р.	264,38	202,18	134,78	82,94	160,70	98,50	62,21	41,47

Таблица 5 (продолжение)

Стоимость LVL-листа на весь объем, руб	3 р.	9517824	7278336	4852224	3172608	5971968	3732480	2426112	1679616
	4 р.	9517824	7278336	4852224	3172608	5598720	3545856	2239488	1679616
	5 р.	9517824	7278336	4852224	2985984	5785344	3545856	2239488	1492992
Объем древесины на все здание, м3	3 р.	4,8289	6,5785	8,3281	10,0777	4,8289	6,5785	8,3281	10,0777
	4 р.	6,4385	8,7713	11,1041	13,4369	6,4385	8,7713	11,1041	13,4369
	5 р.	8,0482	10,9642	13,8802	16,7962	8,0482	10,9642	13,8802	16,7962
Стоимость древесины на весь объем, руб	3 р.	55532	75653	95773	115894	55532	75653	95773	115894
	4 р.	74043	100870	127697	154525	74043	100870	127697	154525
	5 р.	92554	126088	159622	193156	92554	126088	159622	193156
ИТОГО стоимость плиты, руб.	3 р.	9573356	7353989	4947997	3288502	6027500	3808133	2521885	1795510
	4 р.	9591867	7379206	4979921	3327133	5672763	3646726	2367185	1834141
	5 р.	9610378	7404424	5011846	3179140	5877898	3671944	2399110	1686148

Очевидно, что при использовании в расчетах разномодульной теории, экономия обшивки плиты существенна и достигает до 72,7%, что позволяет экономить на материальных ресурсах в процессе строительства. В целом проанализировав стоимость всей плиты, можно сделать вывод, что минимальная стоимость определилась для плиты с количеством продольных ребер - 5 штук и высотой поперечного сечения продольного ребра - 144 мм. Из таблицы (5) видно, что данный тип плиты наиболее экономичный при применении обоих методов расчета. Экономия при расчете по разномодульной теории составила 47%.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-07-01326.

Литература

1. Горынин Г. Л., Григорьев Ю.И. Сравнительный анализ экспериментальных данных модулей упругости древесины и однонаправленного клеенного шпона // Материалы IX Всероссийской научно-технической конференции «Актуальные вопросы строительства». – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2016. – С. 41-45.
2. Горынин Г. Л., Григорьев Ю.И. Сравнительный анализ экспериментальных данных модулей упругости древесины // Север России: стратегии и перспективы развития: материалы II Всероссийской научно-практической конференции (г. Сургут, 27 мая 2016 г.): в 4 т. – Сургутский государственный университет. – Сургут: ИЦ СурГУ, 2016. – Т. II. – 335 с. – С. 58-62.

3. Горынин Г. Л. Пространственные задачи слоистых анизотропных конструкций: монография. – Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008. – 262 с.
4. Горынин Г. Л., Немировский Ю.В. Продольно-поперечный изгиб слоистых балок в трехмерной постановке// Прикладная механика и техническая физика. - 2004. -Т. 45, №6. - С. 133-143.
5. Горынин Г. Л., Григорьев Ю.И. Сравнительный анализ законов деформирования древесины согласно Свода правил и разномодульного закона деформирования при изгибе //Проблемы оптимального проектирования сооружений: доклады 4-й Всероссийской конференции (Новосибирск, 11 – 13 апреля 2017 г.) – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2017. – С. 79-87.
6. Горынин Г. Л., Григорьев Ю.И. Моделирование изгиба оконной перемычки из композитных материалов// Север России: стратегии и перспективы развития: материалы III Всероссийской научно-практической конференции (г.Сургут, 26 мая 2017 г.): в 4 т. – Сургутский государственный университет. – Сургут: ИЦ СурГУ, 2017. – Т. II. – С. 197-203.
7. Свод правил: СП 64.13330.2017 Деревянные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-25-80. – Москва: 2017. – 3-16 с., 64-71 с.
8. Свод правил: СП 20.13330.2016 Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85* – Москва: 2011. – 32-33 с., 72-80 с.