УДК 517.521.1

РЯД 1+1+1+…

Г. Е. Деев [1], С. В. Ермаков [1]
[1] *Обнинский институт атомной энергетики,*
[1] *Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,*
georgdeo@mail.ru, ermakov@iate.obninsk.ru

Приведено описание вариантов вычисления ряда 1+1+1+…, выполненных различными авторами. Многие из вариантов дают разные ответы. На этом основании в работе делается вывод о некорректности примененных методов. В противовес им дается описание подхода, который может быть признан как метод суммирования этого и других расходящихся рядов. Этот подход позволяет расширить область применимости вычислительных устройств вплоть до бесконечно больших чисел.

Ключевые слова: расходимость рядов, обобщенное суммирование, разрядная сетка, гиперсетка, числовая ось, гиперось, числоиды, гиперчисла.

SERIES 1+1+1+…

G. E. Deev [1], S. V. Ermakov [1]
[1] *Obninsk Nuclear Energy Institute,*
[1] *National Research Nuclear University MEPhI*
georgdeo@mail.ru, ermakov@iate.obninsk.ru

The article describes variants for computing the series 1 + 1 + 1 + ... performed by different authors. Many of the variants give different sums. On this basis, these methods are concluded to be incorrect. In opposition to them, a description of the approach that can be recognized as a method of summing this and other divergent series is given. This approach allows extending the range of applicability of computing devices up to infinity.

Keywords: divergence of series, generalized summation, bit grid, hypergrid, number axis, hyper axis, chisloid, hypernumbers.

Введение. Обратимся к рядам типа

$$1+x+x^2+x^3+...+x^n+... \qquad (1)$$

Эйлер [1] рассматривает случай $x=1$ и дает следующий комментарий: «Из суммирования бесконечных рядов также можно заимствовать многое, служащее как для *лучшего уяснения этого учения о бесконечном*, так и для *лучшего устранения всяких сомнений, которые обычно возникают в этом деле*. Прежде всего, если ряд состоит из равных членов, как, например, $1+1+1+1+1+1+...$ и т. д., и он продолжается без конца, т. е. до бесконечности, то нет, конечно, никакого сомнения, что сумма всех этих членов больше чем всякое могущее быть заданным число. Поэтому она необходимо должна быть бесконечной»

В этой цитате обращают на себя внимание два выделенных фрагмента. Первый говорит о том, что представления Эйлера о бесконечном настолько содержательны, что они образуют то, что может быть названо *учением о бесконечном*. Другими словами, бесконечность – это нечто структурированное, содержательное, достойное названия «учения». Второй фрагмент говорит о том, что при работе с объектами бесконечной природы не должно быть никаких сомнений, все должно быть недвусмысленно понимаемо.

Эйлер характеризует сумму

$$s=1+1+1+...+1+... \qquad (2)$$

как необходимо бесконечную. Но хотелось бы понять, какое описание допускает связанная с ней бесконечность?

Различные варианты нахождения суммы *s*. Между тем, сумма (2) подверглась многочисленным преобразованиям, имевшим целью найти ее числовое значение. Среди них были такие преобразования, которые приводили к неожиданным результатам. Часто получались результаты, изображаемые отрицательными числами. Но ведь Эйлер сказал, что она «необходимо бесконечна» и вовсе не равняется никакому конечному числу, тем более отрицательному. Приведём примеры таких преобразований.

Пример 1. Выполним понятные преобразования:

$$\begin{aligned} s &= 1+1+1+\ldots+1+\ldots = 1+(1+1)+(1+1+1)+(1+1+1+1)+\ldots = \\ &= 1+2+3+4+5+\ldots = \\ &= 1+(2+3+4)+(5+6+7)+(8+9+10)+11+\ldots = \\ &= 1+9+18+27+36+\ldots = 1+9\cdot(1+2+3+4+5+\ldots) = 1+9\cdot s, \end{aligned}$$

откуда делается вывод, что

$$s = 1+1+1+\ldots+1+\ldots = -1/8. \tag{3}$$

Озадачивает равенство: $s = 1+9\cdot s$, утверждающее, что величина s по смыслу своему положительная, равна девяти с лишним своим значениям. Возразят – законы конечного не распространяются на бесконечные объекты, но в (3) утверждается, что s – конечный объект. Апостериорный парадокс.

Согласно точке зрения Эйлера, все сомнения в учении о бесконечном должны быть устранены. Равенств типа (3) быть не должно, они отвергаются многими математиками, среди которых в свое время по этому поводу явно высказался Н.-Х. Абель, сказав: «…читать такого сорта равенства, – ну разве это не смехотворно?».

Выполнив преобразования, аналогичные проделанным, легко получить равенства:

$$\begin{aligned} &s = 1+1+1+\ldots+1+\ldots \\ &s = s^1 = 1+2+3+4+\ldots+n+\ldots \\ &s = s^2 = 1+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2+\ldots \\ &s = s^3 = 1+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3+\ldots \\ &\ldots \\ &s = s^p = 1+2^p+3^p+4^p+\ldots+n^p+\ldots \\ &\ldots \end{aligned}, \tag{4}$$

утверждающие, что сумма s равна любому из перечисленных рядов. Но ряды все различны, у них разные законы роста, разные суммы и потому s не может быть равна ни одному из них. Это говорит о том, что преобразование исходного ряда во все последующие недопустимо, так как, по Эйлеру, при изучении бесконечностей *сомнений быть не должно*. А тут их столько! Преобразование, которое привело к такому результату, – это группировка. Она при работе с расходящимися рядами недопустима, или в каждом отдельном случае требует обоснования.

Пример 2. Существует обобщение преобразования, приведенного в примере 1. Оно приводит к соотношению:

$$s = (1+2+\ldots+m)+(2m+1)^2\cdot s, \tag{5}$$

при любом $m = 1, 2, \ldots$.

При первых значениях $m = 1, 2, \ldots$ получаются результаты:

$$\begin{aligned} &s = 1+9\cdot s, \\ &s = 1+2+25\cdot s, \\ &s = 1+2+3+49\cdot s, \\ &\ldots \end{aligned}$$

для всех преобразований семейства (5), т. е. при любом m, $s = -1/8$. Это как будто бы довод в пользу такого результата.

Но вот еще примеры преобразований.

Пример 3. В силу (4), одним из рядов, равных s, является ряд $s=1+2+3+...+n+...$ Рамануджан показал, что

$$s=1+2+3+...+n+...=-\frac{1}{12} \tag{6}$$

Это делается следующим образом. Помимо суммы s рассматриваются еще две суммы:

$$s_1=1-1+1-1+1-1+... , \tag{7}$$

$$s_2=1-2+3-4+5-... . \tag{8}$$

Сумма s_1 привлекала к себе внимание еще в XVI–XVII вв. Вначале Лейбниц приписал сумме s_1 значение, равное $1/2$, мотивируя это преобразованием:

$$s_1=1-1+1-1+1-1+...=1-(1-1+1-1+1-1+...)=1-s_1,$$

откуда

$$s_1=1/2. \tag{9}$$

Но можно выполнить другое, совершенно равноправное преобразование:

$$s_1=1-1+1-1+1-1+...=1-1+(1-1+1-1+1-1+...)=0+s_1,$$

откуда

$$s_1-\textit{любое число}. \tag{10}$$

Поскольку, по Эйлеру, учение о бесконечном должно быть ясным и никаких сомнений быть не должно, то надо признать, что преобразования, приведшие к парадоксу (9)–(10), недопустимы. А это опять группировка членов бесконечного ряда.

Сам Эйлер тоже получил для s_1 значение, приведенное в (9). Но он получил его по другому, исходя из ряда

$$1+x+x^2+...x^n+...=\frac{1}{1-x}, \tag{11}$$

в котором он положил $x=-1$. Обоснование этому было сделано позже Пуассоном, который сформулировал один из первых *методов обобщенного суммирования*. Пуассон кладет идею Эйлера в основу метода обобщенного суммирования, на основе которого осуществляется суммирование. Но так ли все гладко «на самом деле»? В связи с этим в книге Фихтенгольца [3, т. 2, с. 397] приводится тождество, аналогичное (11), имеющее вид:

$$\frac{1+x+...+x^{m-1}}{1+x+...+x^{n-1}}=1-x^m+x^n-x^{m+n}+x^{2n}..., \tag{12}$$

которое дает при $x=1$ для суммы s_1:

$$s_1=1-1+1-1+1-1+...=m/n , \tag{13}$$

т. е. для этой суммы любое рациональное положительное число может быть взято в качестве значения (заметим, что (13) согласуется с (10)). Прием совершенно эквивалентен Эйлеровскому и обосновывается по Пуассону, но дает массу других результатов. В учении о бесконечном это недопустимо (Эйлер).

Итак, наряду с результатом (9), находятся другие результаты, эквивалентные ему по методу получения. Но большинство исследователей, включая Рамануджана, в качестве значения суммы не отдали предпочтения ни 1, ни 0, а взяли $s_1=1/2$. Не исключено, что над ними довлело представление о том, что предел должен быть непременно единственным. Однако вполне возможно, что более правильным был бы подход, в основе которого лежит принцип «что получается, то и получается». На основе этого подхода надо было бы признать, что пределом у этого ряда является *множество, состоящее из двух чисел*: 1 и 0. Это так называемый *полный предел, являющийся множеством пределов всех подпоследовательностей частичных сумм ряда*. И тогда мы бы писали:

$$s_1 = 1-1+1-1+1-1+... = \{0;1\} \tag{14}$$

Это означает, что природа такова: два числа с равным правом претендуют на звание предела ряда. Но наша ментальная действительность иная: *считается*, что $s_1 = 1/2$.

Приняв это, переходим ко второй сумме s_2, к сумме (10). Она подвергается следующему преобразованию:

$$\begin{aligned}
&2s_2 = s_2 + s_2 = (1-2+3-4+5-...) + s_2 = \qquad [\textit{место } 1]\\
&= (1-2+3-4+5-...) + (1-2+3-4+5-...) = [\textit{место } 2]\\
&= 1-2+3-4+5-6+7-...\\
&\quad +1-2+3-4+5-6+... = \qquad [\textit{место } 3]\\
&= 1-1+1-1+1-1+... = s_1 = 1/2.
\end{aligned}$$

Комментарий к [*месту* 1]: левая s_2 расписывается, причем ее слагаемые в своем расположении уходят в бесконечность, при этом правая s_2 этой бесконечностью оказывается выброшенной за пределы нашего мира.

Комментарий к [*месту* 2]: правая s_2, находящаяся за пределами нашего мира, также расписывается.

Комментарий к [*месту* 3]: сумма s_2 в расписанном виде возвращается в наш мир и ее слагаемые *группируются специальным образом* со слагаемыми первой суммы.

Специальная группировка обеспечивает сложение, приводящее к сумме s_1. В итоге получается, что

$$s_2 = 1/4. \tag{15}$$

Замечание 1. То же значение для s_2 получается при другой группировке.

$$\begin{aligned}
&2s_2 = s_2 + s_2 =\\
&= 1-2+3-4+5-6+7-...\\
&\qquad +1-2+3-4+5-6+... = -1+(4-6+8-10+12-...) =\\
&= -1+2(2-3+4-5+6-...) = -1-2[-1+(1-2+3-4+5-6+...)] = 1-2s_2
\end{aligned}$$

В отличие от предыдущего случая, здесь обошлось *без обращения к сомнительной сумме* s_1.

Замечание 2. При другой аналогичной группировке получается, что s_2 *может быть любым*. Действительно,

$$\begin{aligned}
&2s_2 = s_2 + s_2 =\\
&= 1-2+3-4+5-6+7-...\\
&\qquad +1-2+3-4+5-6+... =\\
&= -2+(6-8+10-12+...) =\\
&= -2+2(3-4+5-6+...) = -2+2[1+(1-2+3-4+5-6+...)] = -2+2+2s_2.
\end{aligned}$$

Отсюда следует верное равенство, 0 = 0, справедливое при любом s_2, т. е. s_2 может быть любым. Ситуация аналогична ситуации для s_1 (10).

Замечание 3. Сумма s_2 находится также по методу Пуассона и дает (15). Теперь, наконец, находим s:

$$\begin{aligned}
s - s_2 &= 1+2+3+4+5+6+...\\
&\quad -1+2-3+4-5+6-... = 4+8+12+16+... =\\
&= 4(1+2+3+4+5+...) = 4s.
\end{aligned}$$

Откуда,

$$s = 1+2+3+4+5+... = -1/12. \tag{16}$$

Итак, для s, помимо (16), доказанным оказалось равенство (3):

$$s = 1+2+3+4+5+... = -1/8$$

Кроме того, можно получить:

$$s = 1+2+3+4+5+... = 3/16 \qquad (17)$$

Поскольку, кроме того, s_1 и s_2 могут быть любыми, а эти суммы принимают участие при нахождении s, то и s может быть любой. Отсюда следует, что *все предлагаемые здесь значения для* s *ложны,* s не равняется ни одному из них. Известно, что равенство (16) используется в книге Joseph Pulchinski по теории струн [4, с. 22]; поскольку истинность его сомнительна, то это заставляет повнимательнее рассмотреть те разделы теории струн, где оно используется.

Иной вариант суммирования. Переходим к описанию другого подхода, согласно которому *написанная выше сумма* (2) *должна изучаться на основе соотношений, в которых явно отражена первоначально данная динамика роста последовательности частичных сумм.*

Поясним, что такое динамика роста последовательности частичных сумм. Для этого снова обратимся к сумме (2).

Первоначальное понимание этой суммы таково: с ней связан вполне определенный процесс последовательного суммирования, состоящий в том, что после нахождения на каком-то этапе частичной суммы следующим шагом является прибавление к ней еще одной единицы и т. д. В символах это описывается предельным переходом:

$$\begin{cases} s_n = \underbrace{1+1+1+...+1}_{n\ \text{раз}}, & (18_1) \\ s_{n+1} = s_n + 1, & (18_2) \\ s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n\ . & (18_3) \end{cases} \qquad (18)$$

Никакого другого истолкования запись 1+1+1+… не имеет.

В соотношениях (18) выделяется по своей роли равенство (18_2). Его можно назвать *равенством, определяющим динамику роста частичных сумм*. Динамика роста суммы является важнейшим показателем, характеризующим сумму. Она является аналогом скорости роста, аналогом производной. А сама сумма является аналогом интеграла. Точно так же, как значение интеграла зависит от интегрируемой функции, точно так же сумма бесконечного ряда зависит от показателя, характеризующего динамику роста суммы. Поэтому *два ряда, имеющие различные характеристики динамики роста, должны считаться различными*.

Процесс суммирования ряда $\tilde{s} = 1+2+3+4+...$ описывается соотношениями, аналогичными соотношениям (18):

$$\begin{cases} \tilde{s}_n = 1+2+3+4+...+n, & (19_1) \\ \tilde{s}_{n+1} = \tilde{s}_n + (n+1), & (19_2) \\ \tilde{s} = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{s}_n\ . & (19_3) \end{cases} \qquad (19)$$

Соотношение (19_2) характеризует динамику роста суммы $\tilde{s}$, причем совсем другую динамику, чем соотношение (18_2). Поэтому ряды s и $\tilde{s}$ различны и нельзя выводы, сделанные относительно одного из них, автоматически переносить на другой.

Изучать поведение рядов надо на *основе соотношений* типа (18_2) и (19_2), *характеризующих динамику роста* ряда, не сводя данный ряд к рядам с другой динамикой роста. Использовать привычные законы конечной алгебры для преобразования расходящихся рядов без соответствующего обоснования нельзя.

Поэтому выполненный выше переход от ряда $s = 1+1+1+...+1+...$ к ряду $\tilde{s} = 1+2+3+4+...+n+...$ является недопустимым, он меняет динамику роста, значит является переходом к *другому* ряду, не эквивалентному исходному (несмотря на то, что с точки зрения законов конечной алгебры возможен двусторонний переход $s \rightleftarrows \tilde{s}$, гарантирующий в конечной алгебре эквивалентность). Тем более недопустимыми являются дальнейшие преобразования, так как они также являются преобразованиями, приводящими к рядам с другой динамикой роста.

Поскольку далее речь пойдет о положительных целых числах, то для их представления будет использоваться разрядная сетка $Gr^0 \equiv \underbrace{\ldots\underset{3}{-}\underset{2}{-}\underset{1}{-}\underset{0}{-}}_{Gr^0(10^0)}$ – ее вполне достаточно. В обозначении этой сетки под фигурной скобкой стоит имя сетки (Gr^0), а также ее основной весовой коэффициент (10^0). Вес места сетки с номером *i* находится по формуле 10^{0+i}. На места сетки, изображенные черточками, ставятся цифры той системы счисления, в которой ведется изложение. В результате простановки на *все* места цифр системы счисления получается объект, называемый *числоидом*, который служит для представления чисел. Любое *r*-разрядное натуральное число n на этой сетке записывается в виде: $n = \ldots 000 n_{r-1} \ldots n_2 n_1 n_0 = \overleftarrow{0} n_{r-1} \ldots n_2 n_1 n_0$, где $n_i \in Z_{(10)} = \{0,1,2,\ldots,9\}$, – цифры десятичной системы счисления (в общем случае *k*-ичной, где $k \geq 2$, натуральное), $\overleftarrow{0} = \ldots 000$.

При изучении ряда (2) будем пользоваться соотношениями (18). Из (18_1) мы узнаем, что частичная сумма s_n есть просто натуральное число n, а сумма ряда, в силу (18_3), есть предел последовательности натуральных чисел, который и надо найти:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} n. \tag{20}$$

В (20), присутствующая под знаком предела запись $n \to \infty$, должна читаться так: «при неограниченном возрастании *n*», а не «при *n*, стремящемся к бесконечности», чтобы не примешивать преждевременно бесконечность – объект, еще подлежащий осмыслению, имеющий сложную структуру, и как к нему «стремиться» еще нужно объяснить.

Судя по записи (20), надо найти «последнее натуральное число». Это делается в два этапа. Вначале находится последнее натуральное число среди натуральных чисел ограниченной разрядности. Рассмотрим числа разрядности *r*. Это числа приведенного выше вида:

$$n = \ldots 000 n_{r-1} \ldots n_2 n_1 n_0 = \overleftarrow{0} n_{r-1} \ldots n_2 n_1 n_0. \tag{21}$$

По мере роста они стремятся к своему последнему числу, которое имеет вид:

$$\ldots 000 \underset{r\ \text{раз}}{9 \ldots 99} = \overleftarrow{0} \underset{r\ \text{раз}}{9 \ldots 99} \tag{22}$$

На втором этапе надо заставить неограниченно возрастать *r*:

$$\lim_{n\to\infty} n = \lim_{r\to\infty} \overleftarrow{0} \underset{r\ \text{раз}}{9 \ldots 99} = \ldots 999 = \overleftarrow{9}. \tag{23}$$

Числоид, который получается простановкой на все места разрядной сетки Gr^0 цифры 9, является тем объектом, к которому стремятся натуральные числа при неограниченном их росте. Этот числоид сам по себе натуральным числом не является, ибо нет никакого натурального числа, с которым он мог бы быть отождествлен. Но он является идеальным элементом по отношению ко всем натуральным числам.

Итак, на сетке Gr^0 есть объект, который представляет сумму ряда (2):

$$s = 1 + 1 + 1 + \ldots = \overleftarrow{9} \tag{24}$$

Запись (24) справедлива в десятичной системе счисления. В произвольной *k*-ичной системе счисления, $(k \geq 2)$, запись имеет вид:

$$s = 1 + 1 + 1 + \ldots = \overleftarrow{k-1}. \tag{25}$$

На гиперсетке, модель которой такова:

$$Gr \equiv ...\|\underbrace{...\underset{3}{0}\,\underset{2}{0}\,\underset{1}{0}\,\underset{0}{0}}_{Gr^2(10^{2\cdot\infty})}\|\underbrace{...\underset{3}{0}\,\underset{2}{0}\,\underset{1}{0}\,\underset{0}{0}}_{Gr^1(10^{1\cdot\infty})}\|\underbrace{...\underset{3}{9}\,\underset{2}{9}\,\underset{1}{9}\,\underset{0}{9}}_{Gr^0(10^0)}|, \tag{26}$$

где сетка $Gr^1(10^{1\cdot\infty})$ представляет мир бесконечно больших величин первого порядка, сетка $Gr^2(10^{2\cdot\infty})$ – мир бесконечно больших величин второго порядка и т. д., полученный объект записывается в виде:

$$Gr \equiv ...\|\underset{Gr^2(10^{2\cdot\infty})}{\overleftarrow{0}}\|\underset{Gr^1(10^{1\cdot\infty})}{\overleftarrow{0}}\|\underset{Gr^0(10^0)}{\overleftarrow{9}}| = ...\|\overleftarrow{0}\|\overleftarrow{0}\|\overleftarrow{9}| \tag{27}$$

(по историческим причинам в разрядных сетках разряды растут справа налево; так же растут веса всех сеток). Полная запись числоида, представляющего сумму на гиперсетке (27), такова:

$$s = 1+1+1+.... = ...\|\overleftarrow{0}\|\overleftarrow{0}\|\overleftarrow{9}|. \tag{28}$$

Но записи (24)–(28) носят представительский характер, они лишь представляют объект, которому равна сумма *s*, «количественной» характеристики они не дают, наподобие того, как 784 – это представительская характеристика вполне определенного количества, правда, легко понимаемая нами. Но она же, записанная в четверичной системе счисления – 30122, с точки зрения количественной воспринимается нами не так легко. Чтобы вскрыть количественное содержание представительских записей, надо провести дополнительное вычисление, проявив количественный смысл каждой содержащейся в записи цифры. Так,

$$784 = 7\cdot10^2 + 8\cdot10^1 + 4\cdot10^0 \text{ и } 30122 = 3\cdot4^4 + 0\cdot4^3 + 1\cdot4^2 + 2\cdot4^1 + 2\cdot4^0.$$

По аналогии находится количественный смысл записи

$$\overleftarrow{9} = \lim_{r\to\infty}\overleftarrow{0}\underbrace{9...99}_{r\ раз} = \lim_{r\to\infty}(10^r - 1) = 10^{1\cdot\infty} - 1$$

или кратко,

$$\lim_{n\to\infty} n = 10^{1\cdot\infty} - 1, \tag{29}$$

а также

$$1+1+1+... = 10^{1\cdot\infty} - 1 \tag{30}$$

Равенство (30) дает количественную характеристику результата суммирования, а равенство (29) – количественную характеристику результата предельного перехода.

Для понимания правой части в (29) и (30) удобно ее переписать:

$$10^{1\cdot\infty} - 1 = (-1)\cdot10^0 + 1\cdot10^{1\cdot\infty} \tag{31}$$

и трактовать так:

Первое слагаемое в (31) – это обыкновенное число (–1), расположенное на нашей числовой оси $Ax^0(10^0)$, на которой числа идут с весовым коэффициентом 10^0 (рис. 1).

Второе слагаемое – это бесконечно большая величина первого порядка. О порядке бесконечно большой величины мы узнаем по множителю 1, стоящем перед символом бесконечности в показателе. Существует числовая ось, полностью аналогичная нашей оси, известной еще со школы, но числа на этой оси идут с общим весовым коэффициентом $10^{1\cdot\infty}$ и понимаются как бесконечно большие величины первого порядка. На этой числовой оси выбрано число 1 в качестве результата в (31).

Эти представления укладываются в рамки модели числовой гипероси, представленной далее, см. также [5]. Числовая гиперось является расширением известного понятия числовой оси и дает начальное представление о структуре бесконечности. Числовую ось, имеющую весовой коэффициент $10^{p\cdot\infty}$, обозначаем символами: $Ax^p(10^{p\cdot\infty})$ или Ax^p.

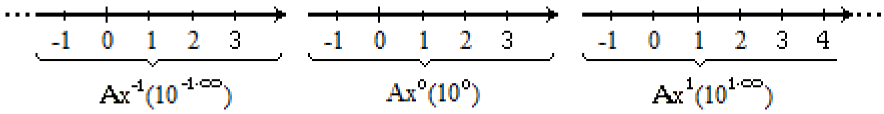

Рис. 1. Числовая гиперось

Числовые оси, входящие в гиперось, упорядочены по признаку порядка *p*. Поэтому гиперось Ax можно записать как упорядоченное объединение числовых осей:

$$Ax = \bigcup_{-\infty<p<+\infty} Ax^p \tag{32}$$

Наглядное представление о гипероси можно получить из рис. 1.

Отрицательным значениям *p* соответствуют бесконечно малые величины порядка *p*, положительным – бесконечно большие. Множество значений параметра *p* может быть как дискретным, так и континуальным.

Правая часть в (31) – это гиперчисло. Наподобно тому, как числа изображаются точками на числовой оси, гиперчисла также изображаются точками на гипероси, правда, для изображения гиперчисла требуется не одна точка, а набор точек, по точке на каждую ось. Гиперчисло (31) изображается так:

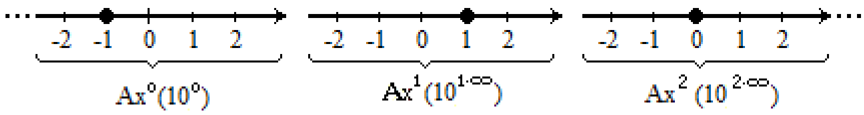

Рис. 2. Представление гиперчисла (31) на числовой гипероси

Гиперчисло (31) можно записать с явным выделением числовых осей:

$$10^{1\cdot\infty} - 1 = (-1)\cdot 10^0 + 1\cdot 10^{1\cdot\infty} = (-1)\,|_{Ax^0} + 1\,|_{Ax^1} + 0\,|_{Ax^2} + \ldots \ , \tag{33}$$

или более компактно:

$$10^{1\cdot\infty} - 1 = [-1\,|\,1\,|\,0\,|\ldots\rangle \ , \tag{34}$$

где справа от равенства после открывающей квадратной скобки на оси Ax^0 стоит число (–1), на оси Ax^1 – число 1, на оси Ax^2 – число 0 и т. д. Вертикальные черточки служат для отделения числовых осей друг от друга. Угловая скобка показывает направление роста порядков числовых осей. Нам для записи гиперчисла понадобились числовые оси, начиная с оси Ax^0, поэтому интересующую нас сумму можно записать в виде:

$$s = 1+1+1+\ldots = [-1\,|\,1\,|\,0\,|\ldots\rangle\,, \tag{35}$$

не выделяя начальную ось Ax^0. В иных случаях такое выделение можно явно оформить. Выражения (33)–(35) раскрывают структуру той бесконечности, которой равна сумма *s*.

Замечание 4. Не следует путать числовую гиперось (рис. 1) с обобщенной разрядной сеткой, с гиперсеткой (26).

Замечание 5. По историческим причинам числа на числовых осях растут слева направо.

На гиперсетках, наоборот, веса разрядов растут справа налево.

Итоговые равенства (24), (28), (35) соберем вместе:

$1+1+1+\ldots = \overleftarrow{9}$	на сетке Gr^0
$1+1+1+\ldots = \ldots\|\overleftarrow{0}\|\overleftarrow{0}\|\overleftarrow{9}\|$	на гиперсетке *Gr* (26)
$1+1+1+\ldots = [-1\|1\|0\|\ldots\rangle$	на гипероси, рис.2

Справа от равенств стоят представления той бесконечности, которой равен ряд. Представление (24) дано на сетке Gr^0; представление (28) – на гиперсетке *Gr* (по другому, на обобщенной разрядной сетке); представление (35) – на числовой гипероси. Тем самым получен ответ на вопрос о структуре бесконечности, поставленный в конце Введения.

Дополнение. Формула $\lim\limits_{n\to\infty} n = 10^{1\cdot\infty} - 1$ (29) позволяет решить вопрос о пределах многих бесконечных сумм.

Пример 4. Найти предел суммы

$$s = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots \tag{36}$$

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} s &= 1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots = \lim_{n\to\infty}(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot n + \frac{1}{2}\cdot n^2\right) = \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty} n + \frac{1}{2}\cdot(\lim_{n\to\infty} n)^2 = \\ &= \frac{1}{2}\cdot(10^{1\cdot\infty} - 1) + \frac{1}{2}\cdot(10^{1\cdot\infty} - 1)^2 = -\frac{1}{2}\cdot 10^{1\cdot\infty} + \frac{1}{2}\cdot 10^{2\cdot\infty} = [0\,|-\frac{1}{2}|\,\frac{1}{2}\,|\,0\,|\ldots\rangle \end{aligned}$$

Итак,

$$s = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots = [0\,|-\frac{1}{2}|\,\frac{1}{2}\,|\,0\,|\ldots\rangle\ , \tag{37}$$

т. е. сумма (36) является бесконечно большой величиной второго порядка, наподобие того, как ее конечный аналог является многочленом второго порядка.

Аналогично (37) находим:

$$s = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + \ldots = [0\,|\,\frac{1}{6}\,|-\frac{1}{2}|\,\frac{1}{3}\,|\,0\,|\ldots\rangle\,,$$

$$s = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + \ldots = [0\,|\,0\,|\,\frac{1}{4}\,|-\frac{1}{2}|\,\frac{1}{4}\,|\,0\,|\ldots\rangle\ .$$

Понятно, как действовать в других случаях. По проблеме, рассмотренной в данной статье, см. также [6–8].

Считаем приятным долгом выразить благодарность доктору технических наук, профессору А. И. Перегуде за интерес к работе.

Литература

1. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1949. 580 с.
2. Santonja J. M. Физика учит новый язык. Лейбниц. Анализ бесконечно малых / пер. с исп. М. : Де Агостини, 2015. 168 с.
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления ; в 3 т. СПб. : Лань, 2016.
4. Pulchinski J. String theory. Vol 1. Cambridge university press, 2005. 402 p.
5. Деев Г. Е. Вычисления с бесконечностями // Вестн. кибернетики. 2017. № 1. С. 49–57.
6. Харди Г. Расходящиеся ряды. М. : Изд-во иностр. лит., 1951. 504 с.
7. Рамис Ж.-П. Расходящиеся ряды и асимптотические теории. М. ; Ижевск : Ин-т компьют. исслед., 2002. 80 с.
8. Выгодский М. Я. Вступителное слово к «Дифференциальному исчислению» Л. Эйлера // Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1949. С. 5–34.