УДК 531.3:517.958

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ СТРУКТУР В ЗАДАЧАХ ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ С КОМПЛЕКСИРОВАНИЕМ МЕТОДОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

В. А. Галкин [1, 2]
[1] Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук,
[2] Сургутский государственный университет,
val-gal@yandex.ru

В статье рассматривается математическое моделирование течений, описываемых уравнениями Лиувилля, Больцмана, Смолуховского и обобщенными системами законов сохранения. Эти уравнения баланса (неразрывности) являются основополагающими соотношениями, которые определяют статистические решения динамических систем, моделирующих взаимодействие частиц посредством дальнодействующих потенциалов и локальных соударений. Нелинейная динамика течений, описываемых данными уравнениями, приводит к возникновению особенностей гидродинамических характеристик, интерпретируемых как возникновение структуры типа фронта, устойчивого в макроскопических масштабах. Рассмотрены механизмы возникновения структур и вычислительные аспекты их локализации.

Ключевые слова: модели физической кинетики, особенности гидродинамических характеристик, численные методы.

MATHEMATICAL MODELING OF STRUCTURES FORMATION IN PROBLEMS OF PHYSICAL KINETICS WITH METHODS INTEGRATION OF COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS

V. A. Galkin [1, 2]
[1] System Research Institute, Russian Academy of Sciences,
[2] Surgut State University,
val-gal@yandex.ru

The mathematical modeling of flows described by Liouville, Boltzmann, Smoluchowski equations and generalized systems of conservation laws are described in the paper. These balance equations (continuity) are the fundamental relationships that determine the statistical solutions of dynamical systems modeling the interaction of particles by long-range potentials and local collisions. The nonlinear dynamics of the flows described by these equations leads to the appearance of singularities for hydrodynamic parameters interpreted as the appearance of a front-type structure stable at macroscopic scales. The mechanisms of the appearance of the structures and computational aspects of their localization are considered.

Keywords: models of physical kinetics, singularities of hydrodynamic characteristics, numerical methods.

Введение. Наличие пространственной неоднородности значительно усложняет исследование математических моделей в задачах физической кинетики. В частности, это обусловлено новым эффектом (по сравнению с пространственно однородными задачами), а именно, возникновением недифференцируемых особенностей решения по пространственно-временным переменным. Эти особенности, в свою очередь, порождают пространственно-временные зоны, в которых соотношение сохранения для оператора, описывающего локальные столкновения частиц, переходит в соотношение диссипации (эти области можно интерпретировать как зоны интенсивного образования осадков, не взаимодействующих с дисперсной фазой). Эти явления типичны для моделей коагуляции, основанных на уравнении Смолуховского, и они также имеют место для специальных моделей газов.

Важно подчеркнуть, что уравнения Власова, описывающие динамику плазмы в приближении самосогласованного поля, представляют собой ни что иное, как разновидность уравнения Лиувилля. Весьма интересные явления для решений уравнения Лиувилля имеют место при наличии скачков поля скоростей течения. В газовой динамике это приводит к ударным волнам, но возможны также решения типа «черной дыры», когда частицы среды аккумулируются в одной точке. В этом случае уравнение Лиувилля – Власова описывает статистическое решение системы дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в этом случае реализуется «скользящий режим» в теории А. Ф. Филиппова [1], а соответствующих классических и обобщенных решений не существует.

Упомянутые свойства решений (сингулярности) образуют пространственно-временные структуры сопутствующих гидродинамических (средних) характеристик течений [2–6].

1. Метод сглаживания В. А. Стеклова для разрывного поля одномерных скоростей в уравнении Лиувилля. Рассмотрим динамическую систему на числовой прямой

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

где $f(x)$ назовем полем скоростей частиц в фазовом пространстве $\mathbb{R} = \{x\}$. Статистическое решение $p(x,t)$ (плотность вероятности распределения частиц в фазовом пространстве $\mathbb{R}$ в момент времени t) для этой динамической системы определяется задачей Коши для уравнения Лиувилля

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \dfrac{\partial [p(x,t) f(x)]}{\partial x} = 0, \\ p(x,t)|_{t=0} = p^0(x). \end{cases} \tag{1.1}$$

где p^0 — начальная плотность вероятности распределения частиц в фазовом пространстве $\mathbb{R}$. Рассмотрим простейший случай разрывного поля скоростей

$$f(x) = -\operatorname{sgn}(x), \tag{1.2}$$

Вид функции $f(x)$ в (1.2) соответствует ситуации, когда частицы со скоростями, равными по абсолютной величине единице, движутся навстречу друг другу.

Для построения приближенного метода решения задачи (1.1), (1.2) воспользуемся регуляризацией, основанной на сглаживании разрывной функции поля скоростей $f(x)$ на интервале $[-\Delta;\Delta]$ методом В. А. Стеклова:

$$\overline{f}_\Delta(x) = \frac{1}{2\Delta}\int_{x-\Delta}^{x+\Delta} f(\xi)d\xi = \frac{1}{2\Delta}\int_{x-\Delta}^{x+\Delta} (-\operatorname{sgn}(\xi))d\xi = -\frac{x}{\Delta}, \quad x \in [-\Delta;\Delta].$$

Таким образом сглаженная задача принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_\Delta(x,t)}{\partial t} + \dfrac{\partial p_\Delta(x,t) f_\Delta(x)}{\partial x} = 0 \\ p_\Delta(x,t)|_{t=0} = p^0(x), \end{cases} \tag{1.3}$$

где

$$f_\Delta(x) = \begin{cases} f(x), & |x| > \Delta, \\ \bar{f}_\Delta(x), & |x| \le \Delta, \end{cases} = \begin{cases} -\operatorname{sgn}(x), & |x| > \Delta, \\ -\dfrac{x}{\Delta}, & |x| \le \Delta. \end{cases}$$

Построим решение задачи (1.3) методом характеристик, описываемых динамической системой

$$\frac{dx}{dt} = f_\Delta(x). \tag{1.4}$$

Запишем решение уравнения (1.4) в областях $|x| > \Delta$ и $|x| \le \Delta$. Если начальные данные на характеристике $|x(0)| > \Delta$, то справедлива формула

$$x(t) = x(0) - t\operatorname{sgn}(x(0)), \quad |x(t)| \ge \Delta. \tag{1.5$_1$}$$

Продолжение этой характеристики в область $|x| \le \Delta$ определяется соотношением

$$x(t) = \pm\Delta \exp\left(-\frac{1}{\Delta}(t - t_{\pm\Delta})\right), \quad t \ge t_{\pm\Delta}, \tag{1.5$_2$}$$

где величины $t_{\pm\Delta}$ определяются из условий $x(t_{\pm\Delta}) = \pm\Delta.$ Если же $|x(0)| < \Delta$, то

$$x(t) = x(0)\exp\left(-\frac{1}{\Delta}t\right), \quad t \ge 0. \tag{1.5$_3$}$$

Из уравнения Лиувилля (1.1) на характеристиках (1.5_1)—(1.5_3) получаем следующее тождество:

$$\frac{dp_\Delta(x(t),t)}{dt} = p_\Delta(x(t),t)\left[\frac{1}{2\Delta}\big(\operatorname{sgn}(x(t)+\Delta) - \operatorname{sgn}(x(t)-\Delta)\big)\right].$$

В области $|x(t)| > \Delta$ выражение

$$\operatorname{sgn}(x(t)+\Delta) - \operatorname{sgn}(x(t)-\Delta) = 0,$$

соответственно, в этой области на характеристиках имеем

$$p_\Delta(x(t),t) = p_\Delta(x(0),0). \tag{1.6}$$

В области $|x(t)| < \Delta$ выражение

$$\operatorname{sgn}(x(t)+\Delta) - \operatorname{sgn}(x(t)-\Delta) = 2,$$

тогда решение на характеристиках принимает следующий вид:

$$p_\Delta(x(t),t) = p_\Delta(x(t_0),t_0)\exp\left(\frac{1}{\Delta}(t - t_0)\right), \quad t \ge t_0 \ge 0. \tag{1.7}$$

С учетом того, что при значениях времени до значения $t = t_{\pm\Delta}$ величина решения уравнения Лиувилля вдоль характеристики равно $p_\Delta(x(0),0)$, то из выражения (1.7) получаем в области $|x(t)| \le \Delta$

$$p_\Delta(x(t),t) = p_\Delta(x(0),0)\exp\left(\frac{1}{\Delta}(t - t_{\pm\Delta})\right), \quad t \ge t_{\pm\Delta}. \tag{1.8}$$

Чтобы получить решение в произвольной точке, надо в (1.6) и (1.8) исключить величины $t_{\pm\Delta}$ и начальные данные.

Итак, выберем произвольную точку (x,t) в фазовой плоскости и выпустим характеристику «назад по времени» с учетом (1.5_1)–(1.5_3). Отметим, что форма характеристики меняется при пересечении характеристикой прямых $x = \pm\Delta$ в момент времени $t_{\pm\Delta}$

Исследуем предельное поведение построенного решения при $\Delta \to 0$. Для этого умножим $p_\Delta(x,t)$ на финитную функцию $\varphi(x,t)$ и проинтегрируем по x от $-\infty$ до ∞ и по t от 0 до $+\infty$.

Переходя к пределу $\Delta \to 0$ в полученном таким образом интегральном выражении, устанавливаем, что обобщенным решением (в интегральной форме С. Л. Соболева) задачи Коши (1.1), (1.2) является обобщенная функция

$$p(x,t) = p^0(x + t\,\mathrm{sgn}(x)) + \delta_0(x)\int_0^t \left(p^0(t-z) + p^0(z-t)\right)dz, \tag{1.9}$$

где δ_0 – обобщенная дельта-функция Дирака, сосредоточенная в точке $x = 0$. Таким образом, рассмотренное решение приобретает устойчивую сингулярность в начале координат, которая интерпретируется как образование «структуры» в гидродинамике рассматриваемого одномерного течения.

Построенное решение (1.9) является частным случаем функциональных решений законов сохранения, рассмотренных в [7]. Главной причиной возникновения функционального решения в рассмотренном примере служит наличие разрыва поля скоростей.

2. Образование структур в течениях с пространственно-неоднородной коагуляцией. Коагуляция (слияние) частиц является одной из основных причин эволюции пространственно-неоднородных дисперсных систем, под которыми понимают механическую смесь среды (газообразной или жидкой) с частицами диспергированной фазы (твердой или жидкой), причем свойства фаз существенно зависят от переноса вещества между различными точками координатного пространства. Следует подчеркнуть, что наличие пространственной неоднородности значительно усложняет исследование математических моделей коагуляции. В частности, это связано с возникновением недифференцируемых особенностей решения по пространственно-временным переменным. Эти особенности, в свою очередь, порождают пространственно-временные зоны, в которых соотношение сохранения для оператора столкновений Смолуховского переходит в соотношение диссипации (эти области можно интерпретировать как зоны интенсивного образования осадков, не взаимодействующих с дисперсной фазой). Далее демонстрируется, что эти области соответствуют зонам структурообразования в течении.

Рассмотрим математическую модель процесса коагуляции в дисперсной системе, состоящей из вязкой среды, в которой вдоль оси $Ox = \{x \in \mathbb{R}\}$ под действием внешней силы с постоянной скоростью движутся частицы, которые состоят из объединений мономеров, имеющих массу $\mu_1 > 0$. Частицу, порожденную объединением i мономеров (т. е. ее масса равна $i\mu_1$, $i \in \mathbb{N}$), будем для краткости именовать i*-мер*, слово *полимер* примем для обозначения бесконечного объединения мономеров. Пусть скорость движения i-мера равна v_i, а при столкновении пары частиц происходит их слияние в единый конгломерат, состоящий из суммарного количества мономеров обеих частиц (*коагуляция*). Для описания эволюции концентрации i-меров $f_i \overset{def}{=} f(i,x,t)$ в такой системе используется кинетическое уравнение Смолуховского

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial f_i}{\partial x} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1}\Phi_{i-j,j} f_{i-j} f_j - f_i \sum_{j=1}^{\infty}\Phi_{i,j} f_j, \quad i \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

где $\Phi_{i,j} = \sigma_{i,j} \,|\, v_i - v_j \,|$ – интенсивность слияния i и j-меров; $\sigma_{i,j}$ – сечение захвата, являющееся симметричной, неотрицательной функцией на $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Оператор столкновений, определяемый правой частью уравнения (2.1), обозначим $S_i(f)$, $f = \{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Первое слагаемое в $S_1(f)$ считаем по определению равным нулю. Выражение для $S_i(f)$ задает локальный баланс между рождением i-меров из-за слияния $i-j$ и j-меров и уничтожением i-меров. Оператор столкновений определяет локальный закон сохранения количества вещества, заключенного в частицах, состоящих из конечного числа мономеров, ибо для финитных наборов концентраций f справедливо равенство

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} i S_i(f) = 0.$$

Для уравнения (2.1) рассматривается задача Коши с начальными данными

$$f(i,x,0) = \varphi_i(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Ниже указаны достаточные условия, когда на решении уравнения (2.1) возникают негладкие особенности по переменным x, t при сколь угодно гладкой начальной функции $\varphi = \{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Интегральной формой задачи (2.1), (2.2) является нелинейное интегральное уравнение вольтерровского вида

$$f\,|_t = T_t\varphi + \int_0^t T_{t-\tau} \circ S(f)\,|_\tau \, d\tau, \quad t \ge 0, \tag{2.3}$$

где T_t – однопараметрическая группа сдвигов, действие которой определено формулой

$$T_t(\varphi)(i,x) = \varphi_i(x - v_i t), \quad \varphi = \{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}. \tag{2.4}$$

Уравнение (2.3) определяет обобщенное решение задачи Коши для уравнения Смолуховского (2.1). Примем обозначение $\overline{f} = T_t\varphi$ для набора концентраций при свободном преносе частиц. Положим

$$\overline{I}_i(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty}\Phi_{i,j}\overline{f}(j,x,t),$$

$$I_i(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty}\Phi_{i,j} f(j,x,t).$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть сечение захвата частиц* $\sigma_{i,j}$ $(i, j \in \mathbb{N})$ *удовлетворяет неравенствам*

$$0 < \inf_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \sigma_{i,j} \le \sup_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \sigma_{i,j} < \infty,$$

скорость свободного переноса частиц v_i *является строго монотонной функцией аргумента* $i \in \mathbb{N}$. *Предположим, что начальные концентрации* $\{\varphi_i\}_{i\in N}$ *в условии* (2.2) – *положительные гладкие по* $x \in \mathbb{R}$ *функции, имеющие конечные интегралы*

$$\int_R \sum_{j=1}^{\infty} (1 + \Phi_{i,j})\, j\varphi_j(x)dx < \infty,$$

и $\varphi_j(x) \to 0$ *при* $|x| \to \infty$. *Пусть набор начальных концентраций* $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *в каждой точке* $x \in \mathbb{R}$ *удовлетворяет локальному соотношению сохранения*

$$\sum_{i\in N} iS_i(f|_{t=0})=0.$$

Тогда, если существуют точки (x,t), *в которых величина* $\bar{I}(x,t)=+\infty$, *то независимо от класса гладкости начальных концентраций решение уравнения* (2.1) *с этими начальными данными не может быть гладким по* (x,t) *для всех* $t\ge 0,\ x\in\mathbb{R}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В точках, где $\bar{I}(x,t)=+\infty$, решение задачи Коши (2.1), (2.2) имеет особенность типа градиентная катастрофа, т. е. производные обращаются в бесконечность. При этом в указанных точках $S_i(f)=-\infty$, следовательно, справедливо неравенство

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} iS_i(f)<0. \qquad (2.5)$$

Значит, локальное соотношение сохранения (2.4) с течением времени преобразуется в локальное соотношение диссипации (2.5).

Перед доказательством теоремы 1 сделаем ряд предварительных утверждений.

ЛЕММА 1. *Пусть последовательность непрерывных неотрицательных функций* $u_i(x,t),\ t\ge 0,\ x\in\mathbb{R},\ i\in\mathbb{N}$ *подчиняется неравенствам*

$$u_i(x,t)\le T_t u_i(.,0)+C_i\int_0^t\sum_{j=1}^{i-1}T_{t-\tau}(u_{i-j}(.,\tau)u_j(.,\tau))d\tau,\quad i\in\mathbb{N}, \qquad (2.6)$$

где $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ – монотонно возрастающая последовательность неотрицательных чисел. Положим по определению сумму в правой части неравенства при $i=1$ тождественно равной нулю. Если начальные функции $u_i(x,0)$ удовлетворяют неравенствам

$$u_i(x,0)\le F_0=\mathrm{const}<\infty,\quad x\in\mathbb{R},\quad i\in\mathbb{N},$$

то справедливы соотношения

$$u_i(x,t)\le F_0\exp(F_0 iC_i t),\quad x\in\mathbb{R},\quad i\in\mathbb{N},\quad t\ge 0. \qquad (2.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы получим методом математической индукции, применяемым по индексу $i\in\mathbb{N}$. При $i=1$ имеем очевидное неравенство, из которого следует первая часть принципа математической индукции. Если соотношение (2.2) справедливо для функций $u_j, 1\le j\le i-1,\ i>2$, то выполняется неравенство

$$u_i(x,t)\le F_0+C_i\int_0^t\sum_{j=1}^{i-1}F_0^2\exp(F_0(jC_j+(i-j)C_{i-j})\tau)d\tau.$$

Поскольку $C_j\le C_i,\quad (i-j)C_{i-j}\le(i-j)C_i$ при $i\ge j$, то

$$u_i(x,t)\le F_0+C_i iF_0^2\int_0^t\exp(F_0 iC_i\tau)d\tau=F_0\exp(F_0 iC_i t),$$

что завершает доказательство леммы. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1 *и в дополнение к ним функции* $u_i(x,0)\to 0$ *при* $x\to\infty\quad\forall i\in\mathbb{N}$. *Тогда* $u_i(x,t)\to 0,\quad x\to\infty$, *при каждом* $i\in\mathbb{N}$ *равномерно относительно изменения значений* t *на любом конечном промежутке в* $\mathbb{R}_1^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы получается методом математической индукции по номеру $i\in\mathbb{N}$. При $i=1$ имеем

$$u_1(x,t)\le u_1(x-v_1t,0).$$

Поскольку $u_1(x,0)\to 0$, когда $x\to\infty$, то $u_1(x,t)\to 0$ при $x\to\infty$ равномерно относительно $0\le t\le T\quad\forall T\in\mathbb{R}_1^+$. Предположим, что функции $u_j(x,t)$ обладают таким свойством для $1\le j\le i-1$, тогда из неравенства (2.6) вытекает утверждение леммы для u_i. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Пусть* $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *— гладкое неотрицательное решение задачи Коши* (2.1), (2.2), *соответствующее начальным данным, для которых выполнены условия теоремы* 1. *Тогда при* $t\ge 0$ *справедливы следующие неравенства*:

$$\int\limits_{\mathbb{R}_1}\sum_{i\in N} f_i(x,t)dx \le \int\limits_{\mathbb{R}_1}\sum_{i\in\mathbb{N}}\varphi_i(x)dx = N_0, \tag{2.8}$$

$$\int\limits_0^t\sum_{j\in\mathbb{N}}|a-v_j|\,f_j(x+a\tau,\tau)d\tau \le 2N_0 \quad \forall a\in\mathbb{R}_1. \tag{2.9}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Неравенства (2.8), (2.9) имеют простой физический смысл. Оценка (2.8) означает, что в коагулирующей системе число частиц с ростом времени уменьшается, а оценка (2.9) показывает, что через сечение потока коагулирующих частиц, движущихся со скоростью a вдоль оси Ox, может пройти не более $2N_0$ частиц за время t при монотонной функции v_i, поскольку каждая частица проходит через это сечение не более двух раз.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получим сначала неравенство (2.8). Суммируя в (2.1) по индексу $1\le i\le M$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^{M} f_i(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\sum_{i=1}^{M} v_i f_i(x,t) \le 0,$$

ибо $\sum_{i=1}^{M} S_i(f)\le 0\ \ \forall M\in\mathbb{N}$. Интегрируя это неравенство по времени, получаем

$$\sum_{i=1}^{M} f_i(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\sum_{i=1}^{M} v_i\int\limits_0^t f_i(x,\tau)d\tau \le \sum_{i\in\mathbb{N}}\varphi_i(x).$$

Дальнейшее интегрирование по переменной x при $|x|\le A$ приводит к соотношению

$$\int\limits_{-A}^{A}\sum_{i=1}^{M} f_i(x,t)dx + \sum_{i=1}^{M} v_i\int\limits_0^t[f_i(A,\tau)-f_i(-A,\tau)]d\tau \le N_0.$$

Воспользовавшись результатом леммы 2, перейдем к пределу при $A\to+\infty$. Таким образом,

$$\int\limits_{\mathbb{R}_1}\sum_{i=1}^{M} f_i(x,t)dx \le N_0.$$

Переходя к пределу $M\to\infty$ на основании леммы Б. Леви [8], получаем окончательно неравенство (2.8).

Теперь установим справедливость оценки (2.9). Поскольку функция $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ монотонная, то без ограничения общности можно считать ее монотонно возрастающей (в противном случае, следует сделать замену переменных $x\mapsto -x$ в уравнении (2.1)). Итак, при монотонно возрастающей функции v_i в тождестве (2.1) сделаем замену переменных:

$$t\mapsto t,\quad x\mapsto x+at,\quad a=\text{const},$$

тогда для функций

$$\tilde f_i(x,t) \overset{def}{=} f_i(x+at,t),\quad i\in\mathbb{N},$$

действительно тождество

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde f_i + (v_i-a)\frac{\partial}{\partial x}\tilde f_i = S_i(\tilde f_i),\quad i\in\mathbb{N}.$$

Обозначим i_0 наибольшее значение индекса i , для которого $v_i<a$. Тогда суммированием по номеру i получаем неравенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^{i_0}\tilde{f}_i(x,t)+\frac{\partial}{\partial x}\sum_{i=1}^{i_0}(v_i-a)\,\tilde{f}_i(x,t)\le 0.$$

После интегрирования обеих частей этого неравенства по времени на промежутке $(0,t)$ и по пространственной переменной на интервале $(x,+\infty)$, учитывая лемму 2, имеем

$$\int_0^t\sum_{i=1}^{i_0}(a-v_i)\,\tilde{f}_i(x,\tau)d\tau\le\int_x^{+\infty}\sum_{i\in\mathbb{N}}\varphi_i(\xi)d\xi=N_0^+. \tag{2.11}$$

Повторим те же рассуждения для сумм по номеру $1\le i\le M$ в соотношении (2.10), интегрируя теперь по пространственной переменной на промежутке $(-\infty,x)$. Таким образом, получаем

$$\int_0^t\sum_{i=1}^{M}(v_i-a)\,\tilde{f}_i(x,\tau)d\tau\le\int_{-\infty}^{x}\sum_{i\in\mathbb{N}}\varphi_i(\xi)d\xi=N_0^-.$$

Полагая $M>i_0$ и учитывая (2.11), приходим к неравенству

$$\int_0^t\sum_{i=i^0+1}^{M}(v_i-a)\,\tilde{f}_i(x,\tau)d\tau\le N_0^++N_0^-=N_0. \tag{2.12}$$

Сочетая неравенства (2.11), (2.12) и переходя к пределу $M\to\infty$, устанавливаем справедливость неравенства

$$\int_0^t\sum_{i\in\mathbb{N}}|\,v_i-a\,|\;\tilde{f}_i(x,\tau)d\tau\le 2N_0.$$

Возвратимся в этом соотношении к исходным функциям f_i, и тем самым получаем (2.9). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Предположим, что при условиях теоремы существует гладкое решение задачи (2.1), (2.2) при всех $t\ge 0$, $x\in\mathbb{R}$. Отбрасывая в правой части тождества (2.1) неотрицательные слагаемые, приходим к неравенству

$$\frac{\partial f_i}{\partial t}+v_i\frac{\partial f_i}{\partial x}\ge -f_i\sum_{j=1}^{\infty}\Phi_{i,j}f_j,\quad i\in\mathbb{N},$$

и, таким образом,

$$f_i(x,t)\ge\overline{f}_i(x,t)\exp\left[-\int_0^t I_i(\xi,\tau)|_{\xi=x-v_i(t-\tau)}d\tau\right],$$

$$i\in\mathbb{N},\quad t\ge 0.$$

Воспользовавшись неравенством (2.9) из леммы 3, получаем оценку интеграла

$$\int_0^t I_i(\xi,\tau)|_{\xi=x-v_i(t-\tau)}d\tau\le 2N_0,\quad i\in\mathbb{N},$$

$$t\ge 0,\quad x\in\mathbb{R},$$

которая в сочетании с предыдущим неравенством приводит к соотношению

$$f_i(x,t)\ge\overline{f}_i(x,t)\exp(-2\sup_{i,j\in\mathbb{N}}\sigma_{i,j}N_0),\quad i\in\mathbb{N},\ t\ge 0, x\in\mathbb{R}. \tag{2.13}$$

В силу положительности начальных данных φ имеем положительность функций $\overline{f}_i, i\in\mathbb{N}$, значит, $f_i>0$ при $t\ge 0$. Кроме того, подставляя правую часть оценки (2.13) в выражение для $I_i(x,t)$, имеем неравенство

$$I_i(x,t)\ge c_1\overline{I}_i(x,t),$$

где постоянная $c_1>0$ не зависит от $i\in\mathbb{N}$. Итак, в точках, где значения $\overline{I}=+\infty$, значения оператора столкновений

$$S_i(f(x,t)) = -\infty$$

из-за строгой положительности и ограниченности величин f_i. Тем самым доказано, что в указанных точках значение характеристической производной

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial f_i}{\partial x} = -\infty, \quad i \in \mathbb{N},$$

т. е. возникает градиентная катастрофа, причем в этих точках

$$\sum_{i \in N} S_i(f) = -\infty.$$

Теорема доказана.

Возникновение структуры течения по линиям особенностей решения уравнения (2.1), установленное в теореме 1, обусловлено тем, что значения скорости свободного переноса частиц $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ различные при бесконечном наборе индексов $i \in \mathbb{N}$. В противном случае, утверждение теоремы не имеет место, поскольку задача становится практически пространственно-однородной (за исключением конечного набора индексов i), и указанный эффект, связанный с перемешиванием частиц из различных точек пространства, взятых в бесконечном количестве, не возникает. Таким образом, рассмотренное явление связано с существенной пространственной неоднородностью кинетической системы и основано на дисперсии скоростей свободного переноса частиц.

Остановимся на построении начальных данных для теоремы 1. Отметим, что значения $\overline{I}$ отыскиваются по формуле

$$\overline{I}_i(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{i,j} | v_i - v_j | \varphi_j(x - v_i t).$$

Пусть функции $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ являются гладкими, неотрицательными, финитными, причем $\overline{I}_i(x,0) < \infty \ \ \forall i$. Фиксируем $x_0 \in \mathbb{R},\ t_0 > 0$ и положим, что значения начального распределения подчиняются условию

$$\varphi_i(x_0 + v_i t_0) = 1, \quad i \in \mathbb{N},$$

считая при этом последовательность v_i строго монотонно возрастающей; ширину носителя функции φ_i подберем так, чтобы сходились все интегралы, указанные в формулировке теоремы 1. Очевидно, что при таком выборе начальных данных в точке (x_0, t_0) значение $\overline{I}_i(x_0, t_0) = +\infty$. Естественно, от финитности φ_i можно легко отказаться, заменяя это требование на строгую положительность и достаточно быстрое стремление к нулю $\varphi_i(x)$ при $x \to \infty$. Для ограниченных монотонных скоростей свободного переноса частиц можно указать начальные данные, удовлетворяющие условиям теоремы 1, когда функция $\overline{I} = +\infty$ на линии, выходящей из (x_0, t_0) и трансверсальной к характеристическим направлениям уравнения (2.1).

Подчеркнем еще раз, что приведенная конструкция основана на дисперсии скоростей свободного переноса для бесконечного набора индексов $i \in \mathbb{N}$. Возникающие при этом особенности спектров обусловлены взаимодействием свободного переноса и столкновений частиц, что связано с нарушением соотношения сохранения, что и порождает структурообразование на течении.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты: № 18-42-860004, № 18-01-00343.

Литература

1. Филиппов А. Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями // Матем. сб. 1960. Т. 51. № 4. С. 101–128.

2. Багдасарова И. Р., Галкин В. А. Моделирование периодических структур в распределении дефектов, возникающих в конструкционных материалах ЯЭУ, под действием стационарного источника // Изв. вузов. Ядерная энергетика. 1999. № 1. С. 85–934.

3. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М. : Наука ; ФМЛ, 1966. 687 с.

4. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны / пер. с англ. А. С. Компанейца. М. : ИЛ, 1950. 426 с.

5. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы математической физики. Среда из невзаимодействующих частиц. М. : Наука ; ФМЛ, 1973. 351 с.

6. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М. : Наука, 1978. 687 с.

7. Галкин В. А. Функциональные решения законов сохранения // ДАН СССР. 1990. Т. 310. № 4. С. 834–839.

8. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука, 1972. 572 с.