

УДК 517.518.122
DOI 10.34822/1999-7604-2019-3-6-13

ОБ ОДНОМ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ИНТЕГРАЛЕ

М. Г. Аветисян, И. В. Шапошникова
Сургутский государственный университет,
avetisjan56@gmail.com, i-v-sh@mail.ru

В статье представлена математическая модель одного из типов задач теории переноса лучистой энергии. Математическое определение основных понятий этой теории дает сумма интегралов, где размерность интеграла стремится к бесконечности. Доказывается корректность такой постановки. При доказательстве теоремы предложен метод решения бесконечномерного интеграла.

Ключевые слова: теория переноса излучений, вероятностные пространства, бесконечномерные интегралы, N -мерная мера Лебега, борелевская σ -алгебра, распределение вероятностей на N -мерном пространстве, плотность распределения вероятностей.

ONE INFINITE-DIMENSIONAL INTEGRAL

M. G. Avetisyan, I. V. Shaposhnikova
Surгут State University,
avetisjan56@gmail.com, i-v-sh@mail.ru

The article presents a mathematical model of one of the types of problems in the radiative energy transfer theory. The mathematical definition of basic concepts gives a sum of integrals where the dimension of integral tends to infinity. The correctness of such a statement is proved. In proving the theorem, a method for solving the infinite-dimensional integral is proposed.

Keywords: radiative transfer theory, probability space, infinite-dimensional lie integrals, N -dimensional Lebesgue measure, Borel σ -algebra, probability distribution on the N -dimensional space, the density of probability distribution.

Введение. Теория переноса лучистой энергии представляет собой важнейший раздел теоретической астрофизики и используется при описании переноса излучений в физических процессах, происходящих в небесных телах. С проблемами переноса излучений можно встретиться и в геофизике, при изучении земной атмосферы и водных бассейнов. В теории переноса излучений используются такие понятия как: вероятность выхода кванта из среды, вероятность отражения кванта от среды [1–3]. В последнее время рассматриваются задачи, где параметры среды являются случайными величинами, поэтому возникает необходимость в более точном и математически обоснованном изложении основных понятий этой теории. Математическое определение этих понятий дает сумма интегралов, где размерность интеграла стремится к бесконечности [5–8].

Цель исследования. В пункте 1 представлена математическая модель одного из типов задач рассматриваемой теории, а в пункте 2 доказывается корректность такой постановки.

Пункт 1. Пусть

$$X_N^j = [0, \infty)^N, j = 1, 2, \quad (1)$$

где $[0, \infty)^N$ – это N -мерное декартово произведение пространств $[0, \infty)$.

Обозначим через

$$X^j = \bigcup_{N \geq 0} X_N^j, j = 1, 2. \quad (2)$$

Тогда

$$X = X^1 \times X^2 \quad (3)$$

декартово произведение пространств X^1 и X^2 .

Из представления (1) следует, что в каждом пространстве $X_N^j, j=1,2, N \geq 0$ определена N -мерная мера Лебега $\mu_N(d\bar{x})$ на борелевской σ -алгебре $\mathfrak{R}_N$. Из выражений (2) и (3) следует, что на пространствах $X^j, j = 1,2$ и X можно ввести соответствующие меры $\mu(d\bar{x})$ и $m(d\bar{x})$ на σ -алгебре $\mathfrak{R}^j = \bigcup_{n \geq 0} \mathfrak{R}_N^j$ и $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^1 \cup \mathfrak{R}^2$.

Каждой траектории $\bar{x} \in X$ сопоставим некоторое вещественное число $h(\bar{x})$, где $h(\bar{x})$ – длина траектории $\bar{x}$, которая вычисляется по формуле:

$$h(\bar{x}) = \begin{cases} h^1(\bar{x}) = \sum_{i=1}^N |x_i - x_{i-1}| + x_N, & \text{при } \bar{x} \in X^1 \\ h^2(\bar{x}) = \sum_{i=1}^N |x_i - x_{i-1}|, & \text{при } \bar{x} \in X^2 \\ 0, & \text{при } N(\bar{x}) = 0 \end{cases}, \quad (4)$$

где $N = N(\bar{x})$, $x_0 = 0$, а $x_i \in [0, \infty), i=1, 2, \dots, N$ – состояния точки в траектории $\bar{x} \in X$. Функция $h(\bar{x})$, определенная на пространстве X , измерима относительно σ -алгебры $\mathfrak{R}$.

Введем распределение вероятностей на пространстве $(X, \mathfrak{R})$, плотность которого относительно меры $m(d\bar{x})$ задается формулой:

$$p_{\lambda,q}(\bar{x}) = \begin{cases} q^{N(\bar{x})} (1-q)^{N(\bar{x})-N^-(\bar{x})} \lambda^{N(\bar{x})} e^{-h^1(\bar{x})}, & \text{при } \bar{x} \in X^1 \\ q^{N^-(\bar{x})-1} (1-q)^{N(\bar{x})-N^-(\bar{x})} \lambda^{N(\bar{x})-1} (1-\lambda) e^{-h^2(\bar{x})}, & \text{при } \bar{x} \in X^2, \\ 0, & \text{при } N(\bar{x}) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

где $\lambda, q \in (0, 1)$, а $N^-(\bar{x}), \bar{x} \in X$ – число отрицательных разностей $(x_{i+1} - x_i)$, $N^-(\bar{x}) \in (0, N)$.

Покажем корректность такого введения распределения вероятностей на измеримом пространстве $(X, \mathfrak{R})$.

Пункт 2. Докажем теорему: при $\forall \lambda, q \in (0, 1)$:

$$\int_X p_{\lambda,q}(\bar{x}) m(d\bar{x}) = 1.$$

Доказательство.

Материал и методы исследования. По определению

$$\int_X p_{\lambda,q}(\bar{x}) m(d\bar{x}) = \int_{X^1} q^{N(\bar{x})} (1-q)^{N(\bar{x})-N^-(\bar{x})} \lambda^{N(\bar{x})} e^{-h^1(\bar{x})} \mu(d\bar{x}) + \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{X^2} q^{N^-(\bar{x})-1} (1-q)^{N(\bar{x})-N^-(\bar{x})} \lambda^{N(\bar{x})-1} (1-\lambda) e^{-h^2(\bar{x})} \mu(d\bar{x}) = \\
 & = \sum_{N \geq 0} \sum_{k=1}^N \int_{X_N^1} q^k (1-q)^{N-k} \lambda^N e^{-h^1(\bar{x})} \mu_N(d\bar{x}) + \\
 & + \sum_{N \geq 0} \sum_{k=1}^N \int_{X_N^2} q^{k-1} (1-q)^{N-k} \lambda^{N-1} (1-\lambda) e^{-h^2(\bar{x})} \mu_N(d\bar{x}).
 \end{aligned}$$

Представим первую сумму в формуле (6) в виде последовательных сумм:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{N \geq 0} \sum_{k=1}^N \int_{X_N^1} q^k (1-q)^{N-k} \lambda^N e^{-h^1(\bar{x})} \mu_N(d\bar{x}) = \int_0^\infty q^1 (1-q)^0 \lambda^1 e^{-h^1(\bar{x})} \mu(d\bar{x}) + \\
 & + \left(\int_0^\infty \int_0^\infty q^1 (1-q)^1 \lambda^2 e^{-h^1(\bar{x})} \mu(d\bar{x}) + \int_0^\infty \int_0^\infty q^2 (1-q)^0 \lambda^2 e^{-h^1(\bar{x})} \mu(d\bar{x}) \right) + \\
 & + \left(\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty q^1 (1-q)^2 \lambda^3 e^{-h^1(\bar{x})} \mu(d\bar{x}) + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty q^2 (1-q)^1 \lambda^3 e^{-h^1(\bar{x})} \mu(d\bar{x}) + \right. \\
 & \left. + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty q^3 (1-q)^0 \lambda^3 e^{-h^1(\bar{x})} \mu(d\bar{x}) \right) + \sum_{N \geq 4} \sum_{k=1}^N \int_{X_N^1} q^k (1-q)^{N-k} \lambda^N e^{-h^1(\bar{x})} \mu_N(d\bar{x}).
 \end{aligned} \tag{7}$$

Так как подынтегральные функции интегрируемы по Риману и, учитывая формулу (4), заменим интегралы Лебега в равенстве (7) на соответствующие определенные интегралы:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{N \geq 0} \sum_{k=1}^N \int_{X_N^1} q^k (1-q)^{N-k} \lambda^N e^{-h^1(\bar{x})} \mu_N(d\bar{x}) = \left(\int_0^\infty q^1 (1-q)^0 \lambda^1 e^{-2x_1} dx_1 \right) + \\
 & + \left(\int_0^\infty \int_{x_1}^\infty q^1 (1-q)^1 \lambda^2 e^{-(x_1+|x_2-x_1|+x_2)} dx_1 dx_2 + \int_0^\infty \int_0^{x_1} q^2 (1-q)^0 \lambda^2 e^{-(x_1+|x_1-x_2|+x_2)} dx_1 dx_2 \right) + \\
 & + \left(\int_0^\infty \int_{x_1}^\infty \int_{x_2}^\infty q^1 (1-q)^2 \lambda^3 e^{-(x_1+|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 + \right. \\
 & + \int_0^\infty \int_{x_1}^\infty \int_0^{x_2} q^2 (1-q)^1 \lambda^3 e^{-(x_1+|x_2-x_1|+|x_2-x_3|+x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 + \\
 & \left. + \int_0^\infty \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} q^3 (1-q)^0 \lambda^3 e^{-(x_1+|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 \right) + \\
 & + \sum_{N \geq 4} \sum_{k=1}^N \int_{X_N^1} q^k (1-q)^{N-k} \lambda^N e^{-h^1(\bar{x})} \mu_N(d\bar{x}).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Выражения в скобках обозначим $S_1(N)$ – суммы N -мерных ($N = 1, 2, 3$) интегралов первого вида. Тогда первую сумму в формуле (6) можно коротко записать в виде:

$$\sum_{N \geq 0} \sum_{k=1}^N \int_{X_N^1} q^k (1-q)^{N-k} \lambda^N e^{-h^1(\bar{x})} \mu_N(d\bar{x}) = S_1(1) + S_1(2) + S_1(3) +$$

$$+ \sum_{N \geq 4} \sum_{k=1}^N \int_{X_N^1} q^k (1-q)^{N-k} \lambda^N e^{-h^1(\bar{x})} \mu_N(d\bar{x}).$$

Аналогично вторую сумму в формуле (6) представим в виде разности, затем в виде последовательных сумм, а затем заменим интегралами Лебега, которые, в свою очередь, представим через определенные интегралы в виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{N \geq 0} \sum_{k=1}^N \int_{X_N^2} q^{k-1} (1-q)^{N-k} \lambda^{N-1} (1-\lambda) e^{-h^2(\bar{x})} \mu_N(d\bar{x}) = \\ & \sum_{N \geq 0} \sum_{k=1}^N \int_{X_N^2} q^{k-1} (1-q)^{N-k} \lambda^{N-1} e^{-h^2(\bar{x})} \mu_N(d\bar{x}) - \\ & - \lambda \sum_{N \geq 0} \sum_{k=1}^N \int_{X_N^2} q^{k-1} (1-q)^{N-k} \lambda^{N-1} e^{-h^2(\bar{x})} \mu_N(d\bar{x}) = \\ & = \left(\int_0^\infty q^0 (1-q)^0 \lambda^0 e^{-x_1} dx_1 \right) - \lambda \left(\int_0^\infty q^0 (1-q)^0 \lambda^0 e^{-x_1} dx_1 \right) + \\ & + \left(\int_0^\infty \int_{x_1}^\infty q^0 (1-q)^1 \lambda^1 e^{-(x_1+|x_2-x_1|)} dx_1 dx_2 + \int_0^\infty \int_0^{x_1} q^1 (1-q)^0 \lambda^1 e^{-(x_1+|x_1-x_2|)} dx_1 dx_2 \right) - \\ & - \lambda \left(\int_0^\infty \int_{x_1}^\infty q^0 (1-q)^1 \lambda^1 e^{-(x_1+|x_2-x_1|)} dx_1 dx_2 + \int_0^\infty \int_0^{x_1} q^1 (1-q)^0 \lambda^1 e^{-(x_1+|x_1-x_2|)} dx_1 dx_2 \right) + \\ & + \left(\int_0^\infty \int_{x_1}^\infty \int_{x_2}^\infty q^0 (1-q)^2 \lambda^2 e^{-(x_1+|x_2-x_1|+|x_3-x_2|)} dx_1 dx_2 dx_3 + \right. \\ & + \int_0^\infty \int_{x_1}^\infty \int_0^{x_2} q^1 (1-q)^1 \lambda^2 e^{-(x_1+|x_2-x_1|+|x_2-x_3|)} dx_1 dx_2 dx_3 + \\ & + \left(\int_0^\infty \int_{x_1}^\infty \int_{x_2}^\infty q^0 (1-q)^2 \lambda^2 e^{-(x_1+|x_2-x_1|+|x_3-x_2|)} dx_1 dx_2 dx_3 + \right. \\ & + \int_0^\infty \int_{x_1}^\infty \int_0^{x_2} q^1 (1-q)^1 \lambda^2 e^{-(x_1+|x_2-x_1|+|x_2-x_3|)} dx_1 dx_2 dx_3 + \\ & + \int_0^\infty \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} q^2 (1-q)^0 \lambda^2 e^{-(x_1+|x_1-x_2|+|x_2-x_3|)} dx_1 dx_2 dx_3 + \\ & + \int_0^\infty \int_0^{x_1} \int_{x_2}^\infty q (1-q) \lambda^2 e^{-(x_1+|x_1-x_2|+|x_3-x_2|)} dx_1 dx_2 dx_3 - \\ & - \lambda \left(\int_0^\infty \int_{x_1}^\infty \int_{x_2}^\infty q^0 (1-q)^2 \lambda^2 e^{-(x_1+|x_2-x_1|+|x_3-x_2|)} dx_1 dx_2 dx_3 + \right. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{x_2} q^1 (1-q)^1 \lambda^2 e^{-(x_1+|x_2-x_1|+|x_2-x_3|)} dx_1 dx_2 dx_3 + \\
& + \int_0^\infty \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} q^2 (1-q)^0 \lambda^2 e^{-(x_1+|x_1-x_2|+|x_2-x_3|)} dx_1 dx_2 dx_3 + \\
& + \int_0^\infty \int_0^{x_1} \int_0^\infty q (1-q) \lambda^2 e^{-(x_1+|x_1-x_2|+|x_3-x_2|)} dx_1 dx_2 dx_3 + \\
& + \sum_{N \geq 4} \sum_{k=1}^N \int_{X_N^1} q^k (1-q)^{N-k} \lambda^N e^{-h^1(\bar{x})} \mu_N(d\bar{x}).
\end{aligned}$$

Двойные интегралы из (9), входящие в формулу со знаком «+», интегрируем по переменной x_2 , а тройные, входящие в формулу (9) со знаком «+», – по последнему параметру x_3 .

Тогда формула (9) примет вид:

$$\begin{aligned}
& \sum_{N \geq 0} \sum_{k=1}^N \int_{X_N^2} q^{k-1} (1-q)^{N-k} \lambda^{N-1} (1-\lambda) e^{-h^2(\bar{x})} \mu_N(d\bar{x}) = (1-\lambda) + \lambda \int_0^\infty e^{-x_1} dx_1 - \lambda \int_0^\infty q e^{-2x_1} dx_1 - \\
& - \lambda \int_0^\infty \int_0^\infty q^0 (1-q)^1 \lambda^1 e^{-(x_1+|x_2-x_1|)} dx_1 dx_2 - \lambda \int_0^\infty \int_0^{x_1} q^1 (1-q)^0 \lambda^1 e^{-(x_1+|x_1-x_2|)} dx_1 dx_2 + \\
& + (1-q) \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda^2 e^{-(x_1+|x_2-x_1|)} dx_1 dx_2 - (1-q) \int_0^\infty \int_0^{x_1} \lambda^2 q e^{-(x_1+|x_2-x_1|+x_2)} dx_1 dx_2 + \\
& + \int_0^\infty \int_0^{x_1} \lambda^2 q e^{-(x_1+|x_1-x_2|)} dx_1 dx_2 - \int_0^\infty \int_0^{x_1} \lambda^2 q^2 e^{-(x_1+|x_1-x_2|+x_2)} dx_1 dx_2 - \\
& - \lambda \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty q^0 (1-q)^2 \lambda^2 e^{-(x_1+|x_2-x_1|+|x_3-x_2|)} dx_1 dx_2 dx_3 - \\
& - \lambda \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{x_2} q^1 (1-q)^1 \lambda^2 e^{-(x_1+|x_2-x_1|+|x_2-x_3|)} dx_1 dx_2 dx_3 - \\
& - \lambda \int_0^\infty \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} q^2 (1-q)^0 \lambda^2 e^{-(x_1+|x_1-x_2|+|x_2-x_3|)} dx_1 dx_2 dx_3 - \\
& - \lambda \int_0^\infty \int_0^{x_1} \int_0^\infty q (1-q) \lambda^2 e^{-(x_1+|x_1-x_2|+|x_3-x_2|)} dx_1 dx_2 dx_3 + \\
& + \sum_{N \geq 4} \sum_{k=1}^N \int_{X_N^1} q^k (1-q)^{N-k} \lambda^N e^{-h^1(\bar{x})} \mu_N(d\bar{x}).
\end{aligned} \tag{10}$$

Теперь формулы (8) и (10) подставим в (6):

$$\int_X p_{\lambda,q}(\bar{x}) m(d\bar{x}) = \int_{X^1} q^{N^-(\bar{x})} (1-q)^{N(\bar{x})-N^-(\bar{x})} \lambda^{N(\bar{x})} e^{-h^1(\bar{x})} \mu(d\bar{x}) + \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{X^2} q^{N^-(\bar{x})-1} (1-q)^{N(\bar{x})-N^-(\bar{x})} \lambda^{N(\bar{x})-1} (1-\lambda) e^{-h^2(\bar{x})} \mu(d\bar{x}) = \int_0^\infty q \lambda e^{-2x_1} dx_1 + \\
& + \int_0^\infty \int_{x_1}^\infty q(1-q) \lambda^2 e^{-(x_1+|x_2-x_1|+x_2)} dx_1 dx_2 + \int_0^\infty \int_0^{x_1} q^2 \lambda^2 e^{-(x_1+|x_1-x_2|+x_2)} dx_1 dx_2 + \\
& + \int_0^\infty \int_{x_1}^\infty \int_{x_2}^\infty q(1-q)^2 \lambda^3 e^{-(x_1+|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 + \\
& + \int_0^\infty \int_{x_1}^\infty \int_0^{x_2} q^2 (1-q) \lambda^3 e^{-(x_1+|x_2-x_1|+|x_2-x_3|+x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 + \\
& + \int_0^\infty \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} q^3 \lambda^3 e^{-(x_1+|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 + \\
& + (1-\lambda) + \lambda \int_0^\infty e^{-x_1} dx_1 - \lambda \int_0^\infty q e^{-2x_1} dx_1 - \lambda \int_0^\infty \int_{x_1}^\infty q^0 (1-q)^1 \lambda^1 e^{-(x_1+|x_2-x_1|)} dx_1 dx_2 - \\
& - \lambda \int_0^\infty \int_0^{x_1} q^1 (1-q)^0 \lambda^1 e^{-(x_1+|x_1-x_2|)} dx_1 dx_2 + (1-q) \int_0^\infty \int_{x_1}^\infty \lambda^2 e^{-(x_1+|x_2-x_1|)} dx_1 dx_2 - \\
& - (1-q) \int_0^\infty \int_{x_1}^\infty \lambda^2 q e^{-(x_1+|x_2-x_1|+x_2)} dx_1 dx_2 + \int_0^\infty \int_0^{x_1} \lambda^2 q e^{-(x_1+|x_1-x_2|)} dx_1 dx_2 - \\
& - \int_0^\infty \int_0^{x_1} \lambda^2 q^2 e^{-(x_1+|x_1-x_2|+x_2)} dx_1 dx_2 - \lambda \int_0^\infty \int_{x_1}^\infty \int_{x_2}^\infty q^0 (1-q)^2 \lambda^2 e^{-(x_1+|x_2-x_1|+|x_3-x_2|)} dx_1 dx_2 dx_3 - \\
& - \lambda \int_0^\infty \int_{x_1}^\infty \int_0^{x_2} q^1 (1-q)^1 \lambda^2 e^{-(x_1+|x_2-x_1|+|x_2-x_3|)} dx_1 dx_2 dx_3 - \\
& - \lambda \int_0^\infty \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} q^2 (1-q)^0 \lambda^2 e^{-(x_1+|x_1-x_2|+|x_2-x_3|)} dx_1 dx_2 dx_3 - \\
& - \lambda \int_0^\infty \int_0^{x_1} \int_{x_2}^\infty q(1-q) \lambda^2 e^{-(x_1+|x_1-x_2|+|x_3-x_2|)} dx_1 dx_2 dx_3 + \\
& + \sum_{N \geq 4} \sum_{k=1}^N \int_{X_N^1} q^k (1-q)^{N-k} \lambda^N e^{-h^1(\bar{x})} \mu_N(d\bar{x}).
\end{aligned}$$

Во втором слагаемом формулы (6) при $N = 1$ одномерный интеграл равен $(1 - \lambda)$. Тогда (6) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}
\int_X p_{\lambda, q}(\bar{x}) m(d\bar{x}) = & 1 - \lambda + \sum_{N \geq 0} \sum_{k=1}^N \int_{X_N^1} q^k (1-q)^{N-k} \lambda^N e^{-h^1(\bar{x})} \mu(d\bar{x}) + \\
& + \sum_{N \geq 0} \sum_{k=2}^N \int_{X_N^2} q^{k-1} (1-q)^{N-k} \lambda^{N-1} (1-\lambda) e^{-h^2(\bar{x})} \mu_N(d\bar{x}) -
\end{aligned} \tag{12}$$

$$-\lambda \sum_{N \geq 0} \sum_{k=2}^N \int_{X_N^2} q^{k-1} (1-q)^{N-k} \lambda^{N-1} (1-\lambda) e^{-h^2(\bar{x})} \mu_N(d\bar{x}).$$

С учетом выражения (10) получаем, что

$$\begin{aligned} & \sum_{N \geq 0} \sum_{k=2}^N \int_{X_N^2} q^{k-1} (1-q)^{N-k} \lambda^{N-1} (1-\lambda) e^{-h^2(\bar{x})} \mu_N(d\bar{x}) = \\ & - \sum_{N \geq 0} \sum_{k=1}^N \int_{X_N^1} q^k (1-q)^{N-k} \lambda^N e^{-h^1(\bar{x})} \mu_N(d\bar{x}) + \\ & + \lambda \int_0^\infty e^{-x_1} dx_1 + \lambda \sum_{N \geq 0} \sum_{k=2}^N \int_{X_N^2} q^{k-1} (1-q)^{N-k} \lambda^{N-1} (1-\lambda) e^{-h^2(\bar{x})} \mu_N(d\bar{x}). \end{aligned} \quad (13)$$

Если выражение (13) подставить в (12), то получим:

$$\begin{aligned} \int_X p_{\lambda,q}(\bar{x}) m(d\bar{x}) &= \int_{X^1} q^{N^-(\bar{x})} (1-q)^{N(\bar{x})-N^-(\bar{x})} \lambda^{N(\bar{x})} e^{-h^1(\bar{x})} \mu(d\bar{x}) + \\ & + \int_{X^2} q^{N^-(\bar{x})-1} (1-q)^{N(\bar{x})-N^-(\bar{x})} \lambda^{N(\bar{x})-1} (1-\lambda) e^{-h^2(\bar{x})} \mu(d\bar{x}) = \\ & = \sum_{N \geq 0} \sum_{k=1}^N \int_{X_N^1} q^k (1-q)^{N-k} \lambda^N e^{-h^1(\bar{x})} \mu_N(d\bar{x}) + \\ & + \sum_{N \geq 0} \sum_{k=1}^N \int_{X_N^2} q^{k-1} (1-q)^{N-k} \lambda^{N-1} (1-\lambda) e^{-h^2(\bar{x})} \mu_N(d\bar{x}) = \\ & = 1 - \lambda + \lambda + \sum_{N \geq 0} \sum_{k=1}^N \int_{X_N^1} q^k (1-q)^{N-k} \lambda^N e^{-h^1(\bar{x})} \mu_N(d\bar{x}) - \\ & - \sum_{N \geq 0} \sum_{k=1}^N \int_{X_N^1} q^k (1-q)^{N-k} \lambda^N e^{-h^1(\bar{x})} \mu_N(d\bar{x}) + \\ & + \lambda \sum_{N \geq 0} \sum_{k=2}^N \int_{X_N^2} q^{k-1} (1-q)^{N-k} \lambda^{N-1} (1-\lambda) e^{-h^2(\bar{x})} \mu_N(d\bar{x}) - \\ & - \lambda \sum_{N \geq 0} \sum_{k=2}^N \int_{X_N^2} q^{k-1} (1-q)^{N-k} \lambda^{N-1} (1-\lambda) e^{-h^2(\bar{x})} \mu_N(d\bar{x}). \end{aligned}$$

Вывод. Из вышесказанного следует, что $\int_X p_{\lambda,q}(\bar{x}) m(d\bar{x}) = 1$. Справедливость данного

утверждения подтверждает корректность предложенной модели распределения вероятностей на измеримом пространстве $(X, \mathfrak{R})$.

Литература

1. Соболев В. В. Курс теоретической астрофизики. М. : Наука, 1985. 503 с.
2. Амбарцумян В. А. Научные труды. Ереван : Изд-во АН Арм. ССР, 1960. Т. 1. 360 с.
3. Channdrusekhar S. R. Trunser. Oxford, 1950. 393 p.
4. Халмош П. Теория меры. М. : Изд-во иностр. лит-ры, 1953. 291 с.
5. Avetisian M. G. A Mathematical Model for One Transfer Problem // Integral Eg. Math. Phys. 1992. Vol. 1, No. 1. P. 146–151.
6. Аветисян М. Г. Диффузное отражение света // Вестник кибернетики. 2017. № 3 (27). С. 113–118.
7. Ширяев А. Н. Вероятность. М. : Книга по требованию, 2013. 580 с.
8. Иванов В. В. Перенос излучения и спектры небесных тел. М. : Наука, 1969. 472 с.