

ФИЗИКА КАК ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ КОД

С. Л. Лебедев

Сургутский государственный университет, lebedev_sl@surgu.ru

Существуют частные физические принципы, устанавливающие взаимосвязи между экспериментально различными ситуациями. Может оказаться, что в сравниваемых процессах соответствующие наблюдаемые величины представлены разными математическими выражениями. Тем самым обнаруживаются численные соответствия между разными математическими функциями. Использование современных пакетов по компьютерной алгебре в значительной степени стирает различия между элементарными и трансцендентными функциями. Тем не менее программные реализации алгоритмов вычисления этих функций все еще сохраняют некоторые различия, которые могут проявиться при многократных рекурсиях. В любом случае численная близость между разными аналитическими выражениями может представлять интерес для приложений. Здесь мы приводим несколько примеров интерполяций, основанных на физических соображениях.

Ключевые слова: функции Бесселя, функции Эйри, универсальность скрещенного поля, масса фотона, дисперсионные соотношения, сдвиг массы.

PHYSICS AS A COMPUTATIONAL CODE

S. L. Lebedev

Surgut State University, lebedev_sl@surgu.ru

Between experimentally different situations, exist special physical interrelations. The corresponding observables of the compared processes may occur to be expressed by dissimilar mathematical expressions. Hence, numerical correspondences appear between different mathematical functions. To a large measure, the use of the present-day computer algebra packages removes the distinction between elementary and transcendental functions. Nevertheless, the software implementation of algorithms for computation of these functions retain some differences that may manifest themselves, e.g., in multiple recursions. In any case, the numerical likelihood of the different analytical expressions could be of interest for applications. Here we point at several examples of physically based interpolations.

Keywords: Bessel functions, Airy functions, crossed-field universality, photon mass, dispersion relations, mass shift.

Существуют частные физические принципы, устанавливающие связи между физическими процессами, протекающими в разных экспериментальных условиях. Может оказаться, что соответствующие наблюдаемые величины, характеризующие эти процессы, выражаются посредством разных аналитических функций. Между этими функциями таким образом устанавливается (приближенное) численное равенство. Ниже будут приведены два примера соответствий, основу которых составляют физические аналогии. Особенностью «физической интерполяции» является сохранение равенства математических выражений в широком диапазоне значений скейлинговых параметров (см. ниже). Важно также и то, что в новом представлении сохраняются аналитические свойства физической величины. Таким образом, не обладая универсальностью обычных интерполяционных процедур, физическая интерполяция может сохранять те свойства интерполируемых функций, которые связаны с качественными особенностями физической задачи.

1. В работах [1, 2] авторы отмечают близкое численное соответствие между характеристиками синхротронного излучения (далее – СИ) и излучения, возникающего при рассея-

нии электронов на сгустках встречных частиц (тоже электронов). Этот эксперимент получил название *beamstrahlung*. Указанное совпадение позволило авторам работы [2] предположить, что эффекты квантовой электродинамики интенсивных полей с напряженностью поля, приближающейся к критическому («Швингеровскому») значению $F_c = m^2 c^3 / e \hbar \simeq 4,3 \cdot 10^{13} \text{Gs}$, в скором времени можно будет наблюдать на встречных пучках электронов с энергией $E_e \geq 500 \text{GeV}$. Мы обращаем внимание на то, что в основе упомянутого соответствия лежит универсальный характер взаимодействия релятивистских частиц с внешним электромагнитным полем. Универсальность имеет место благодаря тому, что почти для всех направлений движения релятивистская частица в собственной системе отсчета «видит» любое внешнее поле как скрещенное ($|\vec{E}| = |\vec{H}|$, $\vec{E} \cdot \vec{H} = 0$) [3]. Это свойство выразилось в совпадении асимптотических выражений для мощности излучения релятивистского электрона во внешних полях различных конфигураций [4].

Мощность СИ, выраженная в единицах своего классического ($\hbar \rightarrow 0$) предела, имеет вид [5]:

$$\frac{W}{W_{cl}} = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \int_0^\infty \frac{y dy}{(1 + \xi y)^3} \left[\int_y^\infty K_{5/3}(x) dx + \frac{\xi^2 y^2}{1 + \xi y} K_{2/3}(y) \right]. \quad (1)$$

Здесь динамический параметр $\xi = \frac{3}{2} \chi$,

$$\chi = \gamma \frac{H}{F_c}, \quad (2)$$

γ – Лоренц-фактор, а H – величина лабораторного магнитного поля. Аналогичная величина (δ) в теории *beamstrahlung* [1] определяет радиационные потери энергии электроном в результате рассеяния на bunch'e (т. е. на сгустке; в формуле (4) R, L – поперечный и продольный размеры банча в собственной системе):

$$\frac{\delta}{\delta_{cl}} = \frac{9}{4} \int_0^\infty \frac{w dw}{(1 + w^{3/2} / C)^2} \left(1 + \frac{1}{(1 + w^{3/2} / C)^2} \right) \int_w^\infty dx \left(\frac{3}{2} x - w - \frac{w^4}{2x^3} \right) Ai(x). \quad (3)$$

$K_\nu(x)$ и $Ai(x)$ в уравнениях (1) и (3) – это функции Макдональда и Эйри. Скейлинговые параметры χ и C находятся в соответствии:

$$\chi \leftrightarrow C^{-1} = \frac{4Ne^2 \gamma^2 \hbar}{m^2 c^3 RL}, \quad (4)$$

а N – число частиц в банче (обычно $N \sim 10^{10}$). Численное совпадение между интегралами (1) и (3) становится практически идеальным, если в качестве параметра соответствия в левой части (4) взять $(\chi/1,3)$ [1, 2]. Поразительно, что это совпадение выдерживается в диапазоне значений параметров (4), охватывающем восемь порядков. Разумеется, вычислительного преимущества нет ни у одной из формул (1) или (3), так как функция Эйри $Ai(x)$ выражается

через ту же функцию Макдональда: $Ai(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{x/3} K_{1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right)$. Заметим, что интеграл (3)

можно представить в другой форме, если воспользоваться приведенной выше связью между функциями Макдональда и Эйри, а также рекуррентными соотношениями для функций Макдональда с разными индексами [6]:

$$\frac{\delta}{\delta_{cl}} = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \int_0^\infty \frac{y dy}{(1 + \xi y)^2} \left(1 + \frac{1}{(1 + \xi y)^2} \right) \left[-\frac{2}{3} \int_y^\infty \left(1 + \frac{y}{2x^2} \right) K_{1/3}(x) dx + K_{2/3}(y) \right], \quad (5)$$

(здесь $\xi \equiv 3/2C$). Несмотря на внешнее сходство и численное соответствие этого выражения с (1), интеграл (5) представляет другую аналитическую функцию ξ .

II. Второй пример соответствия использует аналогию между массивным фотоном и волноводными модами электромагнитного поля. Законы дисперсии для поля Прока [7],

$$\omega = \sqrt{k^2 + \mu_{ph}^2 c^2 / \hbar^2}, \quad (6)$$

и для n -й моды плоского резонатора,

$$\omega = \sqrt{k^2 + (n\pi/b)^2}, \quad (7)$$

очевидно, совпадают. Здесь: μ_{ph} – масса фотона, а b – расстояние между идеально проводящими плоскими границами. Рассмотрим самодействие равноускоренного (далее – РУ) заряда в условиях, когда: а) собственное поле заряда обладает массой (μ_{ph}); б) заряд совершает движение вблизи одной проводящей границы, тогда как вторая удалена ($R/2$ – расстояние от заряда до границы; w_0 – ускорение заряда в собственной системе отсчета, и $b \gg R$). Определяемый самодействием сдвиг массы электрического заряда Δm_{el} для двух указанных случаев имеет вид [8, 9]:

$$\Delta m_{el} = \frac{\alpha w_0}{2\pi} S_{el}(\Lambda), \quad \Lambda \equiv \frac{\mu_{ph} c}{\hbar w_0}, \quad (8a)$$

$$\Delta m_{el} = \frac{\alpha w_0}{2\pi} V_{el}(\bar{\Lambda}), \quad \bar{\Lambda} \equiv \frac{2c^2}{R w_0 \gamma_E}. \quad (8b)$$

Здесь $\gamma_E = 0,577 \dots$ – постоянная Эйлера. Подобно (4), мы имеем скейлинговое соответствие:

$$\Lambda \leftrightarrow \bar{\Lambda}. \quad (9)$$

Вещественные части комплексных функций $S_{el}(\Lambda)$ и $V_{el}(\bar{\Lambda})$ демонстрируют реактивные свойства собственного поля ускоряемой частицы и могут быть представлены следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \text{Re } S_{el}(\Lambda) = -\pi\Lambda \left[I_1(\sqrt{\Lambda})K_1(\sqrt{\Lambda}) + \frac{1}{2}I_0(\sqrt{\Lambda})K_2(\sqrt{\Lambda}) + \frac{1}{2}I_2(\sqrt{\Lambda})K_0(\sqrt{\Lambda}) \right] + \\ + \pi\sqrt{\Lambda}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\operatorname{Re} V_{el}(\bar{\Lambda}) = \pi \left(-\coth \vartheta + \frac{1}{2 \sinh(\vartheta / 2)} \right), \quad (11)$$

где параметр ϑ связан с $\bar{\Lambda}$ соотношением:

$$\cosh \vartheta = 1 + \frac{2}{(\bar{\Lambda} \gamma_E)^2}. \quad (12)$$

Мнимые части функций $S_{el}(\Lambda)$ и $V_{el}(\bar{\Lambda})$ равны:

$$\operatorname{Im} S_{el}(\Lambda) = \Lambda \left[K_1^2(\sqrt{\Lambda}) - K_0(\sqrt{\Lambda}) K_2(\sqrt{\Lambda}) \right], \quad (13)$$

$$\operatorname{Im} V_{el}(\bar{\Lambda}) = 1 - \vartheta \coth \vartheta, \quad (14)$$

и определяют скорость излучения РУ заряда.

Удивительно, что соответствие (9) между массой фотона и расстоянием имеет место и для гипотетического случая скалярного РУ заряда (источника скалярного поля). Полагая, что на границе собственное поле скалярного заряда подчиняется условию Дирихле, можно получить аналог формулы (8б). Функции $S_{el}(\Lambda)$ и $V_{el}(\bar{\Lambda})$ должны быть теперь заменены на $S_{sc}(\Lambda)$ и $V_{sc}(\bar{\Lambda})$ соответственно [8, 9]:

$$\operatorname{Re} S_{sc}(\Lambda) = \pi \Lambda \left[I_0(\sqrt{\Lambda}) K_0(\sqrt{\Lambda}) + I_1(\sqrt{\Lambda}) K_1(\sqrt{\Lambda}) \right] - \pi \sqrt{\Lambda}, \quad (15)$$

$$\operatorname{Im} S_{sc}(\Lambda) = \Lambda \left[K_0^2(\sqrt{\Lambda}) - K_1^2(\sqrt{\Lambda}) \right], \quad (16)$$

$$V_{sc}(\bar{\Lambda}) = \pi \left(\frac{1}{\sinh \vartheta} - \frac{1}{2 \sinh(\vartheta / 2)} \right) + i \left(-1 + \frac{\vartheta}{\sinh \vartheta} \right). \quad (17)$$

Здесь, как и в (10), (13), $I_\nu(\sqrt{\Lambda})$ и $K_\nu(\sqrt{\Lambda})$ обозначают модифицированные функции Бесселя [6].

В качестве иллюстрации приведем графики (рис. 1), демонстрирующие численное соответствие функций $S_{sc}(\Lambda)$ и $V_{sc}(\bar{\Lambda})$ при $0 \leq \Lambda, \bar{\Lambda} \leq 8$. Графики функций $S_{el}(\Lambda)$ и $V_{el}(\bar{\Lambda})$ в том же диапазоне значений параметров см. в [10].

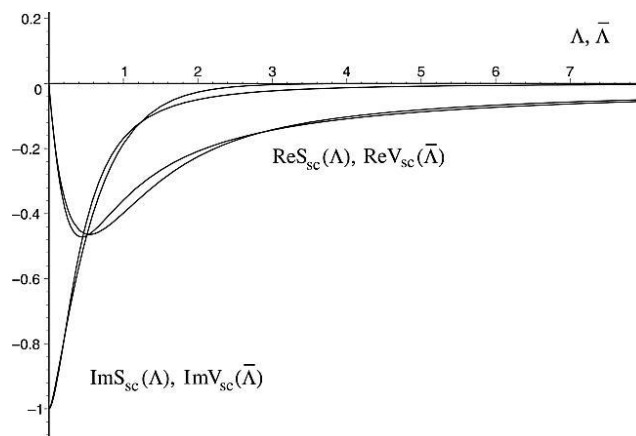


Рис. 1. Вещественная и мнимая части сдвига массы скалярного заряда как функции параметров (8а) и (8б)

Функции $S_{el}(\Lambda)$, $V_{el}(\bar{\Lambda})$ и $S_{sc}(\Lambda)$, $V_{sc}(\bar{\Lambda})$ допускают аналитическое продолжение в комплексную плоскость значений аргумента. Это следует из существования для каждой из них дисперсионных соотношений следующего вида [8, 9]:

$$f(\Lambda) = -\frac{2\Lambda}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im } f(\lambda) d\lambda}{\lambda^2 - \Lambda^2 + i0}. \quad (18)$$

Дисперсионные соотношения выражают причинную связь между реактивными и радиационными процессами при движении РУ заряда. Тем самым физическая интерполяция, основанная на соотношении (9), позволила не только установить численное соответствие между трансцендентными и элементарными функциями, но и сохранить важные в качественном отношении аналитические свойства сдвига массы. Нетрудно заметить, например, что при мнимых значениях аргумента $\Lambda \rightarrow i|\Lambda|$ интеграл (18) – чисто мнимый, т. е. вещественные части всех четырех функций обращаются в нуль.

Литература

1. Blankenbecler R., Drell S. Quantum Treatment of Beamstrahlung // Phys. Rev. 1987. V. 36, № 1. P. 277–288.
2. Esberg J., Uggerhoj U. I. Does Experiment Show that Beamstrahlung Theory – Strong Field QED – can be trusted? // J. Phys: Conference Series. 2009. V. 198. P. 1–15.
3. Никишов А. И., Ритус В. И. Квантовые процессы в поле плоской электромагнитной волны и в постоянном поле // ЖЭТФ. 1964. Т. 46. Вып. 2. С. 776–796.
4. Ритус В. И. Квантовые эффекты взаимодействия элементарных частиц с интенсивным внешним полем // Труды ФИАН. 1979. Т. 111. С. 5–151.
5. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М.: Наука, 1983. 304 с.
6. Бейтмен Г., Эрдейи Д. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974. Т. II. 295 с.
7. Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля. М.: Мир, 1984. Т. 1. 448 с.
8. Ритус В. И. Изменение массы ускоренного заряда как динамическое проявление парадокса часов // ЖЭТФ. 1982. Т. 82, № 5. С. 1375–1387.
9. Лебедев С. Л. Сдвиг массы классического заряда при наличии границ // ЖЭТФ. 1989. Т. 96. Вып. 1. С. 44–52.
10. Lebedev S. L. The Mass-Shift method and the Self-Action of Classical Charge // 3rd Intern Sakharov Conference on Physics. Proceedings. Vol. I. Scientific World. Moscow, 2002. P. 748–756.