УДК 537.624.7-134

**АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ
О РАЗМАГНИЧИВАНИИ ПРОВОДЯЩЕГО ШАРА***

А. В. Гореликов

Сургутский государственный университет, gorelikov_a@list.ru

Рассмотрена начально-краевая задача с вакуумными граничными условиями о диффузии магнитного поля в проводящем шаре. Получено формальное решение для случая аксиально-симметричных магнитных полей, у которых азимутальная компонента тождественно равна нулю.

Ключевые слова: диффузия магнитного поля, размагничивание, вакуумные граничные условия.

**AXIALLY SYMMETRIC SOLUTION
FOR DEMAGNETIZATION OF CONDUCTING SPHERE**

A. V. Gorelikov

Surgut State University, gorelikov_a@list.ru

The article describes the initial boundary value problem with vacuum boundary conditions on resistive diffusion in a conducting sphere. The formal solution for a case of axially symmetric magnetic fields, where azimuth element is identically zero, is developed.

Keywords: resistive diffusion, demagnetization, vacuum boundary conditions.

В приближении квазистационарного магнитного поля [1–6] рассматривается задача о размагничивании находящегося в вакууме однородного и изотропного проводящего шара D с радиусом a . Магнитная проницаемость считается равной единице. Предполагается, что в вакууме (т. е. в области $R^3 \setminus \bar{D}$) магнитное поле потенциально и его потенциал является регулярной на бесконечности гармонической функцией. На границе шара D все компоненты магнитного поля полагаются непрерывными, т. е. рассматривается задача с так называемыми вакуумными граничными условиями [7, 8].

Задача решается в безразмерном виде. Основные безразмерные переменные: t – время; r, θ, φ – сферические координаты, начало системы координат совпадает с центром шара $D = \{(r, \theta, \varphi) \mid r < 1\}$; $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ – ортонормированный базис в сферических координатах; $\mathbf{B}$ – индукция магнитного поля. Для обезразмеривания используются следующие величины: характерная длина – a (радиус шара); характерное время $t^* = a^2/\nu_m$, где ν_m – магнитная вязкость (коэффициент магнитной диффузии); характерное абсолютное значение индукции магнитного поля – B^* .

Внутри шара D магнитное поле удовлетворяет уравнениям диффузии и неразрывности:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \Delta \mathbf{B}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1)$$

Вне шара D магнитное поле одновременно потенциально и соленоидально:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2)$$

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант: 18-47-860005 p_a.

На границе шара D магнитное поле B непрерывно в любой момент времени. В начальный момент времени $\mathbf{B}|_{t=0} = \mathbf{B}^{(0)}(\mathbf{r})$. Предполагается, что начальное магнитное поле $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$ соленоидально и непрерывно в $\mathbf{R}^3$, потенциально в $R^3 \setminus \bar{D}$ и стремится к нулю на бесконечности. В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая аксиально-симметричных магнитных полей, у которых азимутальная компонента тождественно равна нулю

$$\mathbf{B} = B_r(r, \theta, t)\mathbf{e}_r + B_\theta(r, \theta, t)\mathbf{e}_\theta. \quad (3)$$

Если искать решение в виде:

$$r < 1: \quad \mathbf{B}(r, \theta, t) = \text{rot } \mathbf{A}(r, \theta, t), \quad (4)$$

$$r > 1: \quad \mathbf{B}(r, \theta, t) = \nabla u(r, \theta, t), \quad (5)$$

то рассматриваемую начально-краевую задачу можно сформулировать в терминах векторного $\mathbf{A}(r, \theta, t)$ и скалярного $u(r, \theta, t)$ потенциалов:

$$r < 1: \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \Delta \mathbf{A}, \quad (6)$$

$$r > 1: \quad \Delta u = 0, \quad (u - \text{равномерно стремится к нулю при } r \rightarrow \infty) \quad (7)$$

$$\text{rot } \mathbf{A}|_{r=1} = \nabla u|_{r=1}, \quad (8)$$

$$\mathbf{A}|_{t=0} = \mathbf{A}_0(r, \theta), \quad u|_{t=0} = u_0(r, \theta). \quad (9)$$

Частные решения задачи (6) – (8), описывающие процесс затухания аксиально-симметричного магнитного поля, можно искать в виде:

$$\mathbf{A}(r, \theta, t) = e^{-\lambda t} A(r, \theta)\mathbf{e}_\varphi, \quad (10)$$

$$u(r, \theta, t) = e^{-\lambda t} w(r, \theta), \quad (11)$$

где $\lambda > 0$ [1]. Подставляя выражения (10) и (11) в систему (6) – (8), получаем, что функции $A(r, \theta)$ и $w(r, \theta)$ являются решением следующей вспомогательной задачи:

$$r < 1: \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) + \left[\lambda - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right] A = 0, \quad (12)$$

$$r > 1: \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (13)$$

(w – равномерно стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$)

$$\left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A)}{\partial \theta} \right] \Big|_{r=1} = \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (14)$$

$$\left[-\frac{1}{r} \frac{\partial(rA)}{\partial r} \right] \Big|_{r=1} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \Big|_{r=1}. \quad (15)$$

Полагая $A(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$ и разделяя переменные в уравнении (12), приходим к тождеству:

$$\frac{1}{R}(r^2 R')' + \lambda r^2 \equiv -\frac{(\Theta' \sin \theta)'}{\Theta \sin \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} = \chi. \quad (16)$$

Из (16) следует, что функция $\Theta(s)$, (где $s = \cos \theta$, $s \in [-1, 1]$) удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d}{ds} \left((1-s^2) \frac{d\Theta}{ds} \right) + \left(\chi - \frac{1}{1-s^2} \right) \Theta = 0. \quad (17)$$

Известно [4, 5], что уравнение (17) имеет ограниченные решения при

$$\chi = n(n+1), \quad n = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Соответствующие собственным значениям $\chi = n(n+1)$ собственные функции уравнения (17) – это присоединенные функции Лежандра 1-го порядка $P_n^{(1)}(s)$ [4, 5], следовательно:

$$\Theta_n(\theta) = P_n^{(1)}(\cos \theta), \quad n = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Таким образом, частные решения уравнения (12) имеют вид:

$$A(r, \theta) = R(r) P_n^{(1)}(\cos \theta), \quad n = 1, 2, \dots \quad (20)$$

где $R(r)$, как это следует из (16) и (18), удовлетворяет уравнению:

$$(r^2 R')' + [\lambda r^2 - n(n+1)] R = 0. \quad (21)$$

Если $A(r, \theta)$ найдено, то потенциал $w(r, \theta)$ является аксиально-симметричным, регулярным на бесконечности решением внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа (13) с граничным условием (14). Частные решения данной задачи имеют вид [9]:

$$w(r, \theta) = c_n \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}}, \quad (22)$$

где $P_n(\cos \theta)$ – полиномы Лежандра, c_n – постоянные, значения которых определяются из граничного условия (14).

Подставим $A(r, \theta)$ (20) и $w(r, \theta)$ (22) в граничные условия (14), (15):

$$R(1) \frac{1}{\sin \theta} \frac{d(\sin \theta P_n^{(1)}(\cos \theta))}{d\theta} = -c_n (n+1) P_n(\cos \theta), \quad (23)$$

$$-\frac{d}{dr} (rR(r)) \Big|_{r=1} P_n^{(1)}(\cos \theta) = c_n \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}. \quad (24)$$

Учитывая, что $P_n^{(1)}(\cos \theta) = -\frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}$ и $P_n(\cos \theta)$ удовлетворяют уравнению Лежандра:

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \right) + n(n+1) \sin \theta P_n(\cos \theta) = 0,$$

из условия (21) можно выразить коэффициенты c_n :

$$c_n = -n R(1). \quad (25)$$

Подставляя выражение (25) в (24), получаем, что $R(r)$ удовлетворяет следующему однородному граничному условию третьего рода:

$$R'(r) + (n+1)R(r)|_{r=1} = 0. \quad (26)$$

Используя в уравнении (21) и граничном условии (26) замену $y(r) = \sqrt{r}R(r)$ и учитывая естественное условие ограниченности $R(r)$ при $r=0$, получаем следующую задачу Штурма – Лиувилля для уравнения Бесселя полуцелого порядка:

$$r^2 y''(r) + ry''(r) + [\lambda r^2 - (n+1/2)^2] y(r) = 0, \quad (27)$$

$$y(0) = 0, \quad (28)$$

$$y'(r) + (n+1/2)y(r)|_{r=1} = 0. \quad (29)$$

Решениями данной задачи Штурма – Лиувилля являются функции Бесселя первого рода полуцелого порядка [10]:

$$y(r) = J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}r). \quad (30)$$

Обозначая $\mu = \sqrt{\lambda}$, из граничного условия (29) получаем уравнение на собственные значения:

$$\mu J'_{n+1/2}(\mu) + (n+1/2)J_{n+1/2}(\mu) = 0. \quad (31)$$

Используя известные рекуррентные соотношения [9]:

$$J_{\nu+1}(\mu) + J_{\nu-1}(\mu) = \frac{2\nu}{\mu} J_{\nu}(\mu), \quad J_{\nu+1}(\mu) - J_{\nu-1}(\mu) = -2J'_{\nu}(\mu), \quad (32)$$

уравнение (31) можно привести к виду:

$$J_{n-1/2}(\mu) = 0. \quad (33)$$

Собственные значения задачи Штурма – Лиувилля (27) – (29):

$$\lambda_{nm} = (\mu_m^{(n)})^2, \quad (34)$$

где $\mu_m^{(n)}$ – положительные корни уравнений (33) и (31), а соответствующие собственные функции имеют вид:

$$y_{nm} = J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)}r). \quad (35)$$

Собственные функции (35) ортогональны с весом r [10]:

$$\int_0^1 J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)}r) J_{n+1/2}(\mu_l^{(n)}r) r dr = 0 \text{ при } \mu_m^{(n)} \neq \mu_l^{(n)}, \quad (36)$$

а квадрат нормы $J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)}r)$ равен:

$$\|J_{n+1/2}\|^2 = \int_0^1 J_{n+1/2}^2(\mu_m^{(n)}r) r dr = \frac{1}{2} \left(J_{n+1/2}'^2(\mu_m^{(n)}) + \left(1 - \frac{(n+1/2)^2}{(\mu_m^{(n)})^2} \right) J_{n+1/2}^2(\mu_m^{(n)}) \right) = \quad (37)$$

$$= \frac{1}{2} J_{n+1/2}^2(\mu_m^{(n)}).$$

Таким образом, ограниченные частные решения вспомогательной задачи (12) – (15) имеют вид:

$$r < 1: \quad A_{nm}(r, \theta) = a_{nm} \frac{J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)} r)}{\sqrt{r}} P_n^{(1)}(\cos \theta), \quad (38)$$

$$r > 1: \quad w_{nm}(r, \theta) = -n a_{nm} J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)}) \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}}, \quad (39)$$

где a_{nm} – произвольные постоянные, $n = 1, 2, \dots$; $m = 1, 2, \dots$

В общем случае система базисных полоидальных и тороидальных полей для геомагнитного поля получена в работе [11].

Решение начально-краевой задачи для потенциалов (6) – (9) имеет можно искать в виде:

$$r < 1: \quad \mathbf{A}(r, \theta, t) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t} \frac{J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)} r)}{\sqrt{r}} P_n^{(1)}(\cos \theta) \right) \mathbf{e}_\varphi, \quad (40)$$

$$r > 1: \quad u(r, \theta, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} n a_{nm} J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)}) e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t} \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}}. \quad (41)$$

Если в начальный момент времени известно значение азимутальной компоненты векторного потенциала

$$A_\varphi(r, \theta, t) \Big|_{t=0} = A_0(r, \theta), \quad (42)$$

то коэффициенты a_{nm} в (40) и (41) находятся по формуле:

$$a_{nm} = \frac{1}{N^2} \int_0^\pi \int_0^1 A_0(r, \theta) \frac{J_{n+1/2}(\mu_n^{(m)} r)}{\sqrt{r}} P_n^{(1)}(\cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta, \quad (43)$$

$$N^2 = \|J_{n+1/2}\|^2 \|P_n^{(1)}\|^2 = \frac{n(n+1)}{2n+1} J_{n+1/2}^2(\mu_n^{(m)}).$$

Если ряды (40), (41) можно почленно дифференцировать, то аксиально-симметричное решение исходной начально-краевой задачи (1), (2) о размагничивании проводящего шара записывается следующим образом:

$$r < 1: \quad \mathbf{B}(r, \theta, t) = \text{rot } \mathbf{A}(r, \theta, t) = \text{rot}(A_\varphi(r, \theta, t) \mathbf{e}_\varphi) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \mathbf{e}_\theta,$$

$$B_r(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} n(n+1) a_{nm} e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t} \frac{J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)} r)}{r^{3/2}} P_n(\cos \theta), \quad (44)$$

$$\begin{aligned} B_\theta(r, \theta, t) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\sqrt{r} J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)} r) \right) P_n^{(1)}(\cos \theta) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t} \left(n \frac{J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)} r)}{r^{3/2}} - \mu_m^{(n)} \frac{J_{n-1/2}(\mu_m^{(n)} r)}{\sqrt{r}} \right) P_n^{(1)}(\cos \theta). \end{aligned} \quad (45)$$

$$r > 1: \quad \mathbf{B}(r, \theta, t) = \nabla u(r, \theta, t) = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta,$$

$$B_r(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} n(n+1) a_{nm} J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)}) e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t} \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+2}}, \quad (46)$$

$$B_\theta(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} n a_{nm} J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)}) e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t} \frac{P_n^{(1)}(\cos \theta)}{r^{n+2}} \quad (47)$$

Заметим, что функции:

$$\frac{J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)} r)}{\sqrt{r}}, \quad \frac{J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)} r)}{r^{3/2}}, \quad \frac{J_{n-1/2}(\mu_m^{(n)} r)}{\sqrt{r}},$$

входящие в общие элементы рядов (40), (44), (45), ограничены при $r = 0$ для $n = 1, 2, \dots$ [12].

Коэффициенты a_{nm} в (44) – (47) также могут быть найдены из начальных условий для магнитного поля $\mathbf{B}$. Пусть в начальный момент времени радиальная компонента индукции магнитного поля:

$$B_r(r, \theta, t) \Big|_{t=0} = f(r, \theta), \quad (48)$$

полагая в (44) $t = 0$ и учитывая (48), приходим к равенству

$$f(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} n(n+1) a_{nm} \frac{J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)} r)}{r^{3/2}} P_n(\cos \theta). \quad (49)$$

Для нахождения коэффициентов a_{nm} умножим левую и правую части (49) на $(\sqrt{r} J_{k+1/2}(\mu_l^{(k)} r) P_k(\cos \theta)) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ и проинтегрируем по шару D . В результате получаем:

$$a_{nm} = \frac{1}{N_1^2} \int_0^\pi \int_0^1 f(r, \theta) J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)} r) P_n(\cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta,$$

$$N_1^2 = n(n+1) \|J_{n+1/2}\|^2 \|P_n\|^2 = \frac{n(n+1)}{2n+1} J_{n+1/2}^2(\mu_n^{(m)}).$$

В заключение приведем пример задачи о размагничивании шара с вакуумными граничными условиями, она имеет простое решение в элементарных функциях. Данный пример можно использовать для тестирования программного обеспечения моделирования геодинами. Если задать начальное магнитное поле $\mathbf{B}^{(0)}(r, \theta) = B_r^{(0)} \mathbf{e}_r + B_\theta^{(0)} \mathbf{e}_\theta$ в виде:

$$r \leq 1:$$

$$B_r^{(0)} = \frac{\cos \theta}{(\pi r)^2} \left(\frac{\sin \pi r}{\pi r} - \cos \pi r \right), \quad B_\theta^{(0)} = \frac{\sin \theta}{2(\pi r)^2} \left(\frac{\sin \pi r}{\pi r} - \cos \pi r - \pi r \sin \pi r \right); \quad (50)$$

$$r > 1:$$

$$B_r^{(0)} = \frac{\cos \theta}{\pi^2 r^3}, \quad B_\theta^{(0)} = \frac{\sin \theta}{2\pi^2 r^3}, \quad (51)$$

то поле $\mathbf{B}(r, \theta, t) = e^{-\pi^2 t} \mathbf{B}^{(0)}(r, \theta)$ является решением задачи (1) – (2) с начальными условиями (50) – (51).

Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. 656 с.
2. Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля. Методы генерации и физические эффекты, связанные с созданием импульсных полей мегаэрстедного диапазона / пер. с англ. Ф. А. Николаева и Ю. П. Свириденко. М. : Мир, 1972. 392 с.
3. Смайт, Вильям Р. Электростатика и электродинамика / пер. со второго американского изд. А. В. Гапонова и М. А. Миллера. М. : Изд-во иностранной лит., 1954. 604 с.
4. Моффат Г. К. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде / пер. с англ. А. А. Ружмайкина. М. : Мир, 1980. 339 с.
5. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. 3-е изд. М. : Логос, 2011. 324 с.
6. Каулинг Т. Магнитная гидродинамика / пер. с англ. В. Г. Петрова. М. : Атомиздат, 1978. 144 с.
7. Kono M., Roberts P. H. Recent geodynamo simulations and observations of the field // *Reviews of Geophysics*. 2002. Vol. 40. 10. P. B1–B41.
8. Roberts P. H., Glatzmaier G. A. Geodynamo theory and simulations // *Rev. Mod. Phys.* 2000. № 72. 1081–1124.
9. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский . 4-е изд., испр. М. : Наука, 1972. 746 с.
10. Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Лекции по математической физике. М. : Изд-во МГУ, 1993. 352 с.
11. Водинчар Г. М., Крутьева Л. К. Базисные системы для геомагнитного поля // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2010. № 1 (1), С. 24–30.
12. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М. : Наука, 1979. 832 с.