УДК 519.863+519.711.7
DOI 10.34822/1999-7604-2020-1-85-90

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ В ТЕРМИНОЛОГИИ СЕТЕЙ ПЕТРИ

А. Н. Сочнев
Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия
E-mail: asochnev@sfu-kras.ru

Статья содержит описание формальной постановки задачи оптимизации в терминах и обозначениях, принятых в теории сетей Петри. Постановка содержит как целевую функцию, так и описание множества ограничений на варьируемые параметры. Обоснована необходимость определения в сетевой модели статистики функционирования переходов. Предложен возможный способ учета ограничений задачи при выполнении имитационного эксперимента, а также обобщенный алгоритм оптимизации на основе поисковых процедур.

Ключевые слова: задача оптимизации, сеть Петри, вектор состояния переходов, правила приоритета.

OPTIMIZATION PROBLEM STATEMENT IN THE PETRI NETS TERMINOLOGY

A. N. Sochnev
Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia
E-mail: asochnev@sfu-kras.ru

The article presents a description of the formal optimization problem in terms and notations adopted in the Petri net theory. The statement includes both the objective function and the description of the set of constraints on the varying parameters. The necessity of determining the transition functioning in a network model of statistics is substantiated. A possible way of taking into account the constraints of the problem when performing a simulation experiment, as well as a generalized optimization algorithm based on search procedures, are proposed.

Keywords: optimization task, Petri net, transition state vector, priority rules.

Введение. В настоящее время имитационное моделирование систем является базовым инструментом исследования, идентификации и оптимизации процессов. Одним из популярных методов модельного отображения систем является дискретно-событийное моделирование на основе математического аппарата сетей Петри, которые позволяют с требуемой точностью представлять процессы дискретной природы и исследовать их характеристики.

Это мнение находит свое подтверждение в отчетах, опубликованных по результатам практических работ многих исследователей [1–3]. Степень автоматизации производства становится все выше, и задача его организации в автоматизированном (автоматическом) режиме актуальна для всех уровней и стадий управления. Различные модификации сетей Петри позволяют вводить такие характеристики динамических процессов, как временная и пространственная упорядоченность, иерархичность. Возможно задание различных атрибутов составляющих компонент процесса, что позволяет определять их взаимный приоритет. Удобство программирования на ЭВМ имеет большое значение и является преимуществом этих сетей. При этом требования к точности и детализации результатов моделирования могут быть различными. Кроме того, часть исходных данных для планирования нередко имеет полудетерминированный или стохастический характер. В сетях Петри существуют возможности для представления таких данных.

Вместе с тем аппарат сетей Петри имеет ряд объективных недостатков, среди которых можно выделить отсутствие эффективных механизмов оптимизации представляемых процессов. Основной оптимизационной методикой является использование эвристических процедур на основе правил приоритета. Использование правил предпочтения не позволяет говорить об оптимальности найденного решения, доказана лишь причинно-следственная связь между выбором приоритетного правила и соответствующим изменением значения критерия. По этой причине при использовании сетей Петри, как правило, целевая функция явным образом в процессе оптимизации не используется.

Современные задачи исследования и оптимизации систем становятся все более сложными. Особенно это заметно при анализе задач оптимального планирования производства, которые используют самые различные критерии оптимальности. С учетом этих обстоятельств, по мнению автора, решению задачи оптимизации должна предшествовать ее формальная постановка [4–5]. Поскольку основным инструментом моделирования выбираются сети Петри, то необходима формулировка задачи в терминах и обозначениях, принятых в теории сетей Петри.

Постановка задачи оптимизации. В общем виде задачу поиска оптимального решения можно сформулировать следующим образом: требуется минимизировать (максимизировать) целевую функцию с учетом заданных функциональных и количественных ограничений.

Введем обозначения. В теории сетей Петри принято состояние (маркировку) сети обозначать μ, матрицу инциденций – D, вектор срабатывания переходов – q. В работе [6] предлагается указанные обозначения приблизить к классической теории управления и обозначить состояние (маркировку) – x, матрицу инциденций – B, вектор срабатываний – u. Далее принимаются такие обозначения.

Типичная формулировка задачи оптимизации представлена двумя элементами:

1) целевая функция или критерий оптимальности $Q(x)$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ – вектор параметров, определяющих ее значения;

2) множество допустимых решений X, задаваемое условиями и ограничениями исходной задачи. Поиск решения осуществляется из элементов множества X.

Формальная постановка задачи оптимизации: требуется найти такой вектор x^* из множества допустимых решений X, который обращает в минимальное (или максимальное) значение целевую функцию на этом множестве: $Q(x) = \min\limits_{x \in X} Q(x)$.

Формирование набора параметров, от которых функционально зависит целевая функция. В сетях Петри вектор состояния модели образуется количественным распределением маркеров в позициях

$$x = (x(p1) \quad x(p2) \quad \ldots \quad x(pn)), \tag{1}$$

где $p1,\ p2,\ \ldots,\ pn$ – позиции сети Петри.

В таком случае можно определить целевую функцию от вектора маркировки. Постановка задачи оптимизации примет вид:

$$\begin{cases} Q(x) \to \max(\min) \\ f_i(x) \le a_i,\ i = \overline{1,c} \\ x_j^- \le x_j \le x_j^+,\ x_j \ge 0,\ x_j \in \{0,1,2,3,\ldots\},\ j = \overline{1,n} \end{cases}, \tag{2}$$

где a_i – элементы вектора параметров ограничений;

c – количество ограничений;

n – количество позиций сети.

В такой постановке целевая функция должна быть функционально связана с количеством маркеров в сети. Основной недостаток данной формулировки в том, что к ней, как показывает опыт, сводится очень ограниченный перечень задач.

Во многих практических задачах для составления целевой функции недостаточно только позиций сетевой модели. Часто критерий оптимальности связан с количественными и качественными показателями срабатывания переходов, отражающими операции моделируемого процесса. В таких случаях требуется определять также и состояния переходов.

Для формализации таких целевых функций предлагается ввести вектор состояния (маркировки) переходов [6]. Вектор состояния переходов для различных классов сетей Петри должен формироваться по-разному.

Для класса обобщенных сетей Петри может быть определено количество срабатываний перехода. Обозначив его y, получим следующие уравнения состояния сети:

$$\begin{cases} x[k+1] = x[k] - B^{-} \cdot u[k] + B^{+} \cdot u[k] \\ y[k+1] = y[k] + u[k] \end{cases}. \tag{3}$$

Постановка задачи оптимизации в этом случае примет вид:

$$\begin{cases} Q(x, y) \to \max(\min) \\ f_i(x) \le a_i,\ i = \overline{1, c} \\ x_j^{-} \le x_j \le x_j^{+},\ x_j \ge 0,\ x_j \in \{0,1,2,3,...\},\ j = \overline{1, c} \end{cases}. \tag{4}$$

Временн*ы*е сети Петри позволяют определить не только количественные, но и качественные характеристики работы сети. Уравнения состояния сети в этом случае примут форму, в которой качественными характеристиками являются коэффициенты занятости переходов, обозначенные $z[k]$:

$$\begin{cases} x[k+1] = x[k] - B^{-} \cdot u[k] + B^{+} \cdot u[k] \\ y[k+1] = y[k] + u[k] \\ z[k+1] = z[k] + y[k]/k \end{cases}. \tag{5}$$

Постановка задачи оптимизации в этом случае примет вид:

$$\begin{cases} Q(x, y, z) \to \max(\min) \\ f_i(x) \le a_i, i = \overline{1, c} \\ x_j^{-} \le x_j \le x_j^{+},\ x_j \ge 0,\ x_j \in \{0,1,2,3,...\}\ ,\ j = \overline{1, n} \end{cases}. \tag{6}$$

Уравнение изменения состояний сети Петри позволяет отнести ее к классу линейных дискретных систем. Исходя из этого, а также из результатов анализа практических задач можно перейти от наиболее общей постановки задачи оптимизации к более точной, линейного типа.

Постановка линейной задачи оптимизации имеет следующий вид:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i \cdot x_i \to \min(\max),$$
$$\sum_{j=1}^{n} l_{ji} \cdot x_i \le a_j,\ j = \overline{1, c},\ x_i \ge 0, x_i \in \{0,1,2,3,...\}, i = \overline{1, n}. \tag{7}$$

Критерии оптимальности для задачи планирования производства. Одной из наиболее типичных сфер применения сетей Петри является предварительное планирование производственного процесса. Задача планирования производства требует описания временных характеристик процессов [5], исходя из этого приведены формулировки некоторых критериев оптимизации, выполненные для класса временных сетей Петри:

1. Минимизация времени выпуска заданного объема продукции:

$$Q = n\tau \to \min_{P \in \Omega_P}, \tag{8}$$

где n – количество тактов моделирования от начального до конечного состояния сети;
τ – постоянная времени временной сети;
P – производственный план;
Ω_P – множество допустимых планов.

Очевидно, что постоянная времени не минимизируется, поэтому критерий оптимальности можно переформулировать проще:

$$Q^* = n \to \min_{P \in \Omega_P}. \tag{9}$$

2. Минимизация максимального времени простоя.

Для формального определения указанного критерия необходимо определить количественные характеристики функционирования переходов, а именно периоды занятости и простоя:

$$Q = \max\left(\frac{n - n_i}{n}\right) \to \min_{P \in \Omega_P}, \tag{10}$$

где n_i – количество тактов моделирования, в течение которых переход t_i срабатывает.

3. Максимизация загрузки оборудования:

$$Q = \min\left(\frac{n_i}{n}\right) \to \max_{P \in \Omega_P}. \tag{11}$$

4. Минимизация количества ресурсов:

$$Q = \sum_{i=1}^{r} x_i \to \min_{P \in \Omega_P}, \tag{12}$$

где x_i – маркировка позиций, моделирующих ресурсы системы;
r – количество позиций сети, отображающих ресурсы системы.

Основные подходы к решению задачи оптимизации. Решение задачи оптимизации в сетевых моделях в общем случае затруднено тем, что для оценки значения целевой функции при текущем наборе параметров необходимо выполнить имитационный эксперимент. Из этого следует, что варианты оптимизации должны предполагать достижение оптимума за один шаг либо за ограниченное число шагов.

Представим некоторые возможные методы решения задачи оптимизации в сетевых моделях:

1. Использование приоритетных правил. Применение статических приоритетных правил в процессе имитационного эксперимента представляет собой традиционный подход, описанный в литературе [3, 5]. Основной проблемой при таком способе оптимизации является обеспечение выполнения заданных в постановке задачи ограничений. Учет ограничений маркировки позиций может быть обеспечен, например, методом, описанным в [7]. Он предполагает автоматизированный синтез дополнительных позиций и переходов сети на основе формальных правил.

Формально область допустимых значений параметров задается неравенствами:

$$L \cdot x \leq a, \tag{13}$$

где L – матрица коэффициентов ограничений размера $l \times n$;

x – n-мерный вектор маркировки сети;

a – l-мерный вектор параметров множества ограничений;

l – число ограничений;

n – количество позиций сети.

Множество является ограниченным сверху, поскольку рассматривается типичная ситуация ограниченности ресурсов. В общем случае ограничения могут иметь вид неравенств типа «больше или равно».

В течение имитационного эксперимента задача обеспечения ограниченности маркировки решается созданием дополнительной части сети Петри, оказывающей влияние на срабатывание переходов в исходной сети. Матрица инциденций дополнительной сети находится на основе правила поиска позиционных инвариантов сетей Петри:

$$[L \;\; I] \cdot \begin{bmatrix} B' \\ B \end{bmatrix} = 0, \Rightarrow B' = -L \cdot B. \tag{14}$$

Синтез дополнительной сети предполагает также определение начальной маркировки добавленных позиций. Она может быть определена по следующему формальному правилу, полученному из выражения (1) простым приведением его в равенство:

$$x'[0] = a - L \cdot x[0]. \tag{15}$$

2. Использование выделенных позиций, оказывающих влияние на целевую функцию. Некоторые формулировки задачи оптимизации позволяют определить позиции, маркировка которых оказывает непосредственное влияние на конечное значение целевой функции. Процесс оптимизации в таком случае может представляться итерационной процедурой, в которой на каждом шаге реализуются два действия: определение начальной маркировки отдельных позиций, имитационный эксперимент с моделью. По итогам эксперимента оценивается значение целевой функции и делается вывод о необходимости продолжения процесса.

Основная проблема при использовании данного подхода состоит в выборе процедуры определения начальной маркировки выделенных позиций $x'[0]$. В практических случаях основным требованием к данной процедуре является скорость работы, позволяющая получить оптимальное или близкое к оптимальному решение за минимальное число шагов. Имеется пример использования в качестве такой процедуры генетического алгоритма [7]. Также в некоторых случаях может быть достаточно более простых поисковых процедур для определения маркировки, например, метода золотого сечения или дихотомии.

3. Применение элементов искусственного интеллекта для управления имитацией. Выбор активируемых переходов сети Петри на каждом шаге имитационного эксперимента оказывает непосредственное влияние на значение целевой функции. Соответственно, внедрив механизмы оптимального выбора переходов, можно добиться ее экстремального или близкого к нему значения. С формальной точки зрения возникает задача классификации состояний сети Петри и принятия решений. Имеется пример решения этой задачи на основе искусственной нейронной сети [7]. Полученные результаты позволяют говорить о лучшем качестве оптимизации данным методом, чем статическими правилами предпочтения.

В целом описанные выше методы развивают методологию оптимизационно-имитационного подхода, сочетающего в рамках процесса имитации эксперименты и оптимизационные процедуры (рис.) [8].

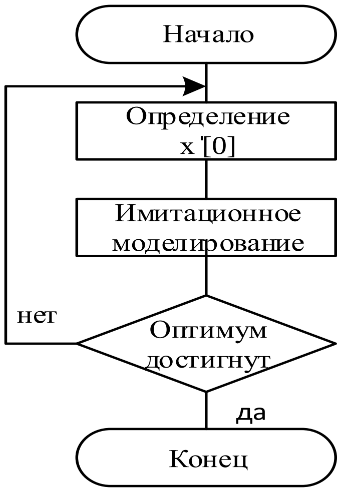

Рисунок. Обобщенный алгоритм оптимизации на основе поисковых процедур
Примечание: составлено автором.

Заключение. В представленной статье описаны следующие основные научные результаты:

1. Обоснована необходимость развития существующих и поиска новых методов оптимизации процессов на основе сетевых моделей.
2. Выявлены основные особенности оптимизации процессов на основе сетевых моделей.
3. Сформулированы постановки задачи оптимизации для обобщенных и временных сетей Петри в терминологии соответствующего математического аппарата.
4. Систематизированы разработанные ранее методы оптимизации с определением их особенностей использования.

Полученные формулировки оптимизационных задач необходимы для создания систем оптимального управления сложными объектами на основе имитационного моделирования их функционирования.

Литература

1. Иванов В. К. Разработка и решение основной задачи управления автоматизированным мелкосерийным машиностроительным производством: дис. … докт. техн. наук. Йошкар-Ола, 2017. 290 с.
2. Мартынов В. Г., Масягин В. Б. Применение сетей Петри при моделировании управления технологическими процессами сборочного производства // Омск. науч. вестн. 2014. № 1 (127). С. 134–137.
3. Шмелев В. В. Решение оптимизационной задачи на сетевой модели технологического процесса // Тр. МАИ. 2016. № 88. С. 3–34.
4. Ивутин А. Н., Ларкин Е. В. Оптимизационные задачи на сетях Петри-Маркова // Современные технологии в науке и образовании – СТНО-2016 : сб. тр. междунар. науч.-техн. и науч.-метод. конф. Рязань, 2016. С. 13–16.
5. Емельянов В. В., Горнев В. Ф., Емельянов В. В., Овсянников М. В. Оперативное управление в ГПС. М. : Машиностроение, 1990. 256 с.
6. Сочнев А. Н., Рубан А. И. Модификация векторно-матричных моделей на основе сетей Петри // Современ. технологии. Систем. анализ. Моделирование. 2016. № 3 (47). С. 98–103.
7. Сочнев А. Н. Сетевые модели в системах управления производством : моногр. Красноярск : Сибир. федерал. ун-т, 2014. 162 с.
8. Антонова Г. М., Цвиркун А. Д. Оптимизационно-имитационное моделирование для решения проблем оптимизациии современных сложных производственных систем // Проблемы упр. № 5. 2005. С. 19–27.