

УДК 537.876+621.372.82
DOI 10.34822/1999-7604-2020-2-12-19

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В РАВНОМЕРНО ИЗОГНУТОМ ВОЛНОВОДЕ

Д. П. Антипин

Сургутский государственный университет, Сургут, Россия
E-mail: adp1975@rambler.ru

В статье рассматривается распространение электромагнитного поля в равномерно изогнутом волноводе с прямоугольным сечением. В криволинейных координатах, связанных с геометрией волновода, для случая с идеальными граничными условиями найдены компоненты векторного потенциала, а также электрического и магнитного полей. Были определены корни дисперсионного уравнения с учетом первой поправки по кривизне $\frac{1}{R}$ для продольной компоненты электрического поля.

Ключевые слова: электромагнитные поля, волновое уравнение, равномерно изогнутые волноводы, граничные условия, методы разделения переменных в криволинейных координатах, дисперсионное уравнение.

THE ELECTROMAGNETIC FIELD IN A UNIFORMLY CURVED WAVEGUIDE

D. P. Antipin

Surgut State University, Surgut, Russia
E-mail: adp1975@rambler.ru

The paper describes the propagation of an electromagnetic field in a uniformly curved waveguide with a rectangular cross-section. The components of electromagnetic fields and field potentials with ideal boundary conditions on the waveguide surface are found in the curvilinear coordinates associated with the waveguide geometry. The roots of the dispersion equation are determined with consideration of the first curvature correction $\frac{1}{R}$ for the longitudinal component of the electric field.

Keywords: electromagnetic fields, wave equation, uniformly curved waveguides, boundary conditions, separation of variables in curvilinear coordinates, dispersion equation.

Введение

Многочисленные исследования распространения электромагнитных волн в волноводных каналах с нелинейной средой [1–2] и в слоистых средах [3] (с различными диэлектрическими проницаемостями сред или с положительным и отрицательным показателями преломления слоев), а также поверхностных волн на границе «проводник – диэлектрик» [4] (граница как направляющая структура) находят широкое применение в современной микроэлектронике, оптике, лазерной технике, при создании новых материалов и устройств [5].

Описание нелинейных эффектов приводит к задачам с нелинейными дифференциальными уравнениями (системами дифференциальных уравнений), к нелинейным краевым задачам на собственные значения. В большинстве случаев аналитические решения таких задач сводятся к аппроксимации по уже известным простым функциям с упрощениями, которые не всегда достаточно обоснованы [1]. В начальном приближении почти всегда можно получить дисперсионное уравнение. Нахождение собственных чисел краевой задачи (спектральных параметров) для распространяющейся волны дает возможность решения нелинейных уравнений численно, в противном случае применение численных методов невозможно.

Реальные микро- и макроскопические волноводы часто могут иметь изгибы, искривления, чему, однако, в литературе не уделено достаточного внимания [6–7].

В статье решена задача распространения электромагнитных волн в равномерно изогнутых с прямоугольным сечением каналах.

Общие полевые уравнения в равномерно изогнутом волноводе

Рассмотрим на рисунке прямоугольный равномерно изогнутый волновод [7].

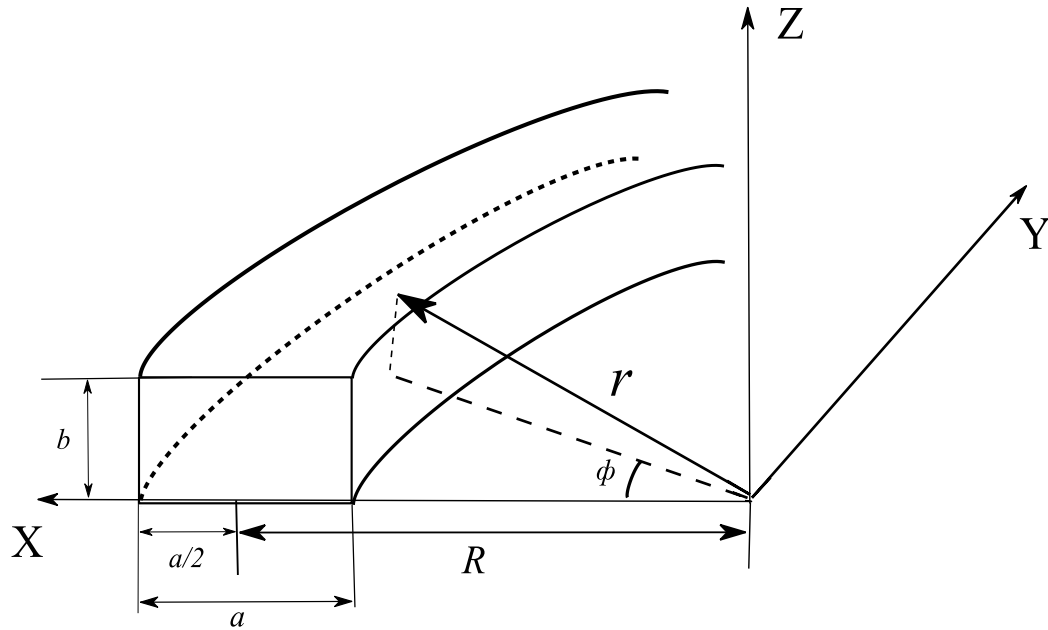


Рисунок. Равномерно изогнутый прямоугольный волновод

Примечание: рисунок автора.

Равномерно изогнутая прямоугольная система координат x, z, s и декартовы координаты x, y, z с началом в центре симметрии тора прямоугольного сечения связаны между собой соотношениями:

$$\begin{aligned} x' &= (R - x) \cos\left(\frac{s}{R}\right), \\ y' &= (R - x) \sin\left(\frac{s}{R}\right), \\ z' &= z \end{aligned} \quad (1.1)$$

со следующими метрическими коэффициентами:

$$h_z = 1, h_x = 1, h_s = \frac{R - x}{R}, \quad (1.2)$$

где R – расстояние от начала координат до оси волновода.

Волновое уравнение для компонент электрического поля в равномерно изогнутой прямоугольной системе координат определяется в виде:

$$\left(\frac{1}{h_s} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(h_s \frac{\partial}{\partial x} \right) + h_s \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{h_s} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (\vec{e}_x E_x + \vec{e}_z E_z + \vec{e}_s E_s) = 0 \quad (1.3)$$

Решение уравнения (1.3) будем искать в виде [7]:

$$E_\alpha(t, s, x, z) = E_\alpha(x) e^{i\beta s} \sin k_z z \sin \omega t, \quad \alpha = x, s, z.$$

Тогда уравнение (1.3) запишем в следующей форме:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} - \frac{1}{Rh_s} \frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\beta^2}{h_s^2} E_x - k_z^2 E_x - \frac{1}{R^2} \frac{E_x}{h_s^2} + k^2 E_x + \frac{2i\beta}{Rh_s^2} E_s \right) \vec{e}_x = 0 \\ & \left(\frac{\partial^2 E_s}{\partial x^2} - \frac{1}{Rh_s} \frac{\partial E_s}{\partial x} - \frac{\beta^2}{h_s^2} E_s - k_z^2 E_s - \frac{1}{R^2} \frac{E_s}{h_s^2} + k^2 E_s - \frac{2i\beta}{Rh_s^2} E_x \right) \vec{e}_s = 0, \\ & \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{1}{Rh_s} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\beta^2}{h_s^2} E_z - k_z^2 E_z + k^2 E_z \right) \vec{e}_z = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ ω – циклическая частота; c – скорость света.

Преобразуем первое и второе уравнения из (1.4) для компонент E_s, E_x :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} - \frac{1}{Rh_s} \frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\beta^2}{h_s^2} E_x - k_z^2 E_x - \frac{1}{R^2} \frac{E_x}{h_s^2} + k^2 E_x = -\frac{2i\beta}{Rh_s^2} E_s, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial^2 E_s}{\partial x^2} - \frac{1}{Rh_s} \frac{\partial E_s}{\partial x} - \frac{\beta^2}{h_s^2} E_s - k_z^2 E_s - \frac{1}{R^2} \frac{E_s}{h_s^2} + k^2 E_s = \frac{2i\beta}{Rh_s^2} E_x. \quad (1.6)$$

Введем оператор следующего вида:

$$\hat{L}_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{h_s R} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\beta^2}{h_s^2} - \frac{1}{R^2} \frac{1}{h_s^2} + k_p^2, \quad (1.7)$$

где $k_p^2 = k^2 - k_z^2$.

Тогда уравнения (1.5), (1.6) образуют систему:

$$\begin{aligned} \hat{L}_1 E_x &= -\frac{2i\beta}{Rh_s^2} E_s \\ \hat{L}_1 E_s &= \frac{2i\beta}{Rh_s^2} E_x \end{aligned} \quad (1.8)$$

Или в матричной форме:

$$\hat{L}_1 \begin{pmatrix} E_x \\ E_s \end{pmatrix} = \frac{2i\beta}{Rh_s^2} \begin{pmatrix} -E_s \\ E_x \end{pmatrix} = \frac{2\beta}{Rh_s^2} \hat{\sigma}_y \begin{pmatrix} E_x \\ E_s \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

где $\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Тогда можно ввести новый матричный оператор:

$$\hat{L}_0 = \hat{L}_1 - \frac{2\beta}{Rh_s^2} \hat{\sigma}_y. \quad (1.10)$$

Решение матричного операторного уравнения (1.9) будем искать для функций вида:

$$E_{\pm} = E_s \pm iE_x, \quad (1.11)$$

умножая на i уравнение (1.5), складывая и вычитая с (1.6), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_+}{\partial x^2} - \frac{1}{Rh} \frac{\partial E_+}{\partial x} - \frac{\beta^2}{h^2} E_+ - \frac{1}{R^2} \frac{E_+}{h^2} + k_p^2 E_+ - \frac{2\beta}{Rh^2} E_+ = 0, \\ \frac{\partial^2 E_-}{\partial x^2} - \frac{1}{Rh} \frac{\partial E_-}{\partial x} - \frac{\beta^2}{h^2} E_- - \frac{1}{R^2} \frac{E_-}{h^2} + k_p^2 E_- + \frac{2\beta}{Rh^2} E_- = 0 \end{cases}, \quad (1.12)$$

замечая, что

$$-\frac{\beta^2}{h^2} - \frac{1}{R^2 h^2} + k_p^2 + \frac{2\beta}{Rh^2} = k_p^2 - \frac{1}{h^2} \left(\beta^2 + \frac{2\beta}{R} + \frac{1}{R^2} \right) = k_p^2 - \frac{1}{h^2} \left(\beta \pm \frac{1}{R} \right)^2 = k_p^2 - \frac{(\nu \pm 1)^2}{R^2 h^2},$$

получим

$$\frac{\partial^2 E_{\pm}}{\partial x^2} - \frac{1}{Rh} \frac{\partial E_{\pm}}{\partial x} + \left(k_p^2 - \frac{(\nu \pm 1)^2}{R^2 h^2} \right) E_{\pm} = 0. \quad (1.13)$$

Таким образом, решение системы (1.4) с учетом (1.12) для компонент поля $E_{\pm}$, E_z определяется известными выражениями:

$$E_{\pm}(t, s, x, z) = \left\{ a_{\nu \pm 1} J_{\nu \pm 1}(k_p(R \pm x)) + b_{\nu \pm 1} N_{\nu \pm 1}(k_p(R \pm x)) \right\} e^{i\beta s} \sin k_z z \sin \omega t \quad (1.14)$$

$$E_z(t, s, x, z) = \left\{ a_{\nu} J_{\nu}(k_p(R \pm x)) + b_{\nu} N_{\nu}(k_p(R \pm x)) \right\} e^{i\beta s} \sin k_z z \sin \omega t \quad (1.15)$$

Граничные условия определим, считая стенки волновода идеальным проводником:

$$\begin{aligned} H_n|_{\partial G} &= 0 \\ \vec{E}_\tau|_{\partial G} &= 0, \quad \frac{\partial H_\tau}{\partial n}|_{\partial G} = 0, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где $\vec{E}_\tau$ – тангенциальная составляющая вектора напряженности электрического поля;

H_n – нормальная составляющая вектора напряженности магнитного поля;

$\frac{\partial \vec{H}_\tau}{\partial n}$ – нормальная производная от касательной составляющей вектора напряженности

магнитного поля.

Граничные условия в выбранной системе координат принимают следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z \vec{e}_z + E_x \vec{e}_x + E_s \vec{e}_s \Big|_{\partial G} = 0, \\ H_x \vec{e}_x + H_z \vec{e}_z \Big|_{\partial G} = 0, \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial H_s}{\partial x} \vec{e}_s \Big|_{\partial G} = 0, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} \vec{e}_z + \frac{\partial H_s}{\partial z} \vec{e}_s \Big|_{\partial G} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} E_z \Big|_{\partial G} = 0, \quad E_s \Big|_{\partial G} = 0, \quad E_x \Big|_{\partial G} = 0 \\ H_x \Big|_{\partial G} = 0, \quad H_z \Big|_{\partial G} = 0 \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} \Big|_{\partial G} = 0, \quad \frac{\partial H_s}{\partial x} \Big|_{\partial G} = 0 \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} \Big|_{\partial G} = 0, \quad \frac{\partial H_s}{\partial z} \Big|_{\partial G} = 0 \end{array} \right. . \quad (1.17)$$

Окончательно определяя значения координат границ области, сформулируем краевые условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x \Big|_{z=0,b} = 0, \quad E_s \Big|_{z=0,b} = 0, \quad E_z \Big|_{x=R \pm a/2} = 0, \quad E_s \Big|_{x=R \pm a/2} = 0 \\ H_x \Big|_{x=R \pm a/2} = 0, \quad H_z \Big|_{z=0,b} = 0 \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} \Big|_{x=R \pm a/2} = 0, \quad \frac{\partial H_s}{\partial x} \Big|_{x=R \pm a/2} = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} \Big|_{z=0,b} = 0, \quad \frac{\partial H_s}{\partial z} \Big|_{z=0,b} = 0 \end{array} \right. \quad (1.18)$$

Из условий $E_s \Big|_{z=0,b} = 0, E_x \Big|_{z=0,b} = 0$ можно показать, что z – компонента волнового числа – определяется набором чисел $k_z = \frac{\pi n}{b}$.

Из краевого условия $E_z(t, s, x = R \pm \frac{a}{2}, z) = 0$ имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 J_\nu \left(k_p \left(R + \frac{a}{2} \right) \right) + b_1 N_\nu \left(k_p \left(R + \frac{a}{2} \right) \right) = 0 \\ a_1 J_\nu \left(k_p \left(R - \frac{a}{2} \right) \right) + b_1 N_\nu \left(k_p \left(R - \frac{a}{2} \right) \right) = 0 \end{array} \right. s, \quad (1.19)$$

где $k_\parallel^m$ – есть решение трансцендентного уравнения:

$$\frac{J_\nu \left(k_p \left(R + \frac{a}{2} \right) \right)}{J_\nu \left(k_p \left(R - \frac{a}{2} \right) \right)} = \frac{N_\nu \left(k_p \left(R + \frac{a}{2} \right) \right)}{N_\nu \left(k_p \left(R - \frac{a}{2} \right) \right)}. \quad (1.20)$$

Таким образом, общее решение для компоненты E_z с учетом граничных условий можно записать в виде:

$$E_z(t, s, x, z) = \left\{ a_\nu J_\nu \left(k_p^m \left(R \pm x \right) \right) + b_\nu N_\nu \left(k_p^m \left(R \pm x \right) \right) \right\} e^{i\beta s} \sin \frac{\pi n}{b} z \sin \omega t \quad (1.21)$$

Дисперсионное уравнение

Рассмотрим z-компоненту электрического поля. После подстановки решения для E_z в третье уравнение системы (1.4) получим следующее уравнение:

$$k_p^2(m, \nu) = k^2 - k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2, \quad (2.1)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$, $k_p^2(m, \nu)$ – корни трансцендентного уравнения (1.20). При условии, что радиус изгиба $R \gg a$, определим $k_{\parallel}(m, \nu)$.

Используя равномерно пригодное разложение Лангера для функций Бесселя и Неймана с точностью до $\frac{1}{R}$, получим [8–9]:

$$J_{\nu} \left(k_p \left(R + \frac{a}{2} \right) \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_p \alpha_+}} \left\{ \begin{aligned} &\cos \left(\beta \alpha_+ \operatorname{tg} \varphi_0 - \beta \alpha_+ \varphi_0 + \beta \frac{a}{2} \varphi_0 - \pi/4 \right) + \\ &+ \sin \left(\beta \alpha_+ \operatorname{tg} \varphi_0 - \beta \alpha_+ \varphi_0 + \beta \frac{a}{2} \varphi_0 - \pi/4 \right) \left(\frac{1}{8 \beta \alpha_+ \operatorname{tg} \varphi_0} \right) + O \left(\frac{\beta^2}{\nu^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

$$J_{\nu} \left(k_p \left(R - \frac{a}{2} \right) \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_p \alpha_-}} 2 \left\{ \begin{aligned} &\cos \left(\beta \alpha_- \operatorname{tg} \varphi_0 - \beta \alpha_- \varphi_0 - \beta \frac{a}{2} \varphi_0 - \pi/4 \right) + \\ &+ \sin \left(\beta \alpha_- \operatorname{tg} \varphi_0 - \beta \alpha_- \varphi_0 - \beta \frac{a}{2} \varphi_0 - \pi/4 \right) \left(\frac{1}{8 \beta \alpha_- \operatorname{tg} \varphi_0} \right) + O \left(\frac{\beta^2}{\nu^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

$$N_{\nu} \left(k_p \left(R + \frac{a}{2} \right) \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_p \alpha_+}} \left\{ \begin{aligned} &\sin \left(\beta \alpha_+ \operatorname{tg} \varphi_0 - \beta \alpha_+ \varphi_0 + \beta \frac{a}{2} \varphi_0 - \pi/4 \right) + \\ &+ \cos \left(\beta \alpha_+ \operatorname{tg} \varphi_0 - \beta \alpha_+ \varphi_0 + \beta \frac{a}{2} \varphi_0 - \pi/4 \right) \left(\frac{1}{8 \beta \alpha_+ \operatorname{tg} \varphi_0} \right) + O \left(\frac{\beta^2}{\nu^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

$$N_{\nu} \left(k_p \left(R - \frac{a}{2} \right) \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_p \alpha_-}} \left\{ \begin{aligned} &\sin \left(\beta \alpha_- \operatorname{tg} \varphi_0 - \beta \alpha_- \varphi_0 - \beta \frac{a}{2} \varphi_0 - \pi/4 \right) + \\ &+ \cos \left(\beta \alpha_- \operatorname{tg} \varphi_0 - \beta \alpha_- \varphi_0 - \beta \frac{a}{2} \varphi_0 - \pi/4 \right) \left(\frac{1}{8 \beta \alpha_- \operatorname{tg} \varphi_0} \right) + O \left(\frac{\beta^2}{\nu^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

где $\alpha_{\pm} = \frac{\nu}{\beta} \pm \frac{a}{2}$; β – фиксировано.

Подставляя разложения (2.2)–(2.5) в (1.20) и оставляя слагаемые первого порядка малости по $\frac{1}{\nu^2}$, получим:

$$\sqrt{k_p^2(m, \nu) - \beta^2} = \frac{\pi m}{a} - \frac{a(\beta)^2}{8\nu^2 R^2 \pi m} + O \left(\frac{\beta^4}{\nu^4} \right), \quad (2.6)$$

где $m = 1, 2, \dots$ – порядок корня

$$k_p^2(m, \nu) = \beta^2 + \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4\nu^2} + \left(\frac{a(\beta)^2}{8\nu^2 R^2 \pi m}\right)^2 + \frac{\pi m}{a} O\left(\frac{\beta^4}{\nu^4}\right) + O\left(\frac{\beta^6}{\nu^6}\right) \quad (2.7)$$

$$k_p^2(m, \nu) = \beta^2 + \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4\nu^2} + O\left(\frac{\beta^4}{\nu^4}\right) \quad (2.8)$$

$$k_p(m, \nu) = \sqrt{\beta^2 + \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4\nu^2} + O\left(\frac{\beta^4}{\nu^4}\right)} \quad (2.9)$$

Или с учетом, что $\nu = R\beta$, получим:

$$k_p(m, R) = \sqrt{\beta^2 + \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2} - \frac{1}{8R^2 \left(\sqrt{\beta^2 + \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2}\right)} + O\left(\frac{1}{R^4}\right). \quad (2.10)$$

Таким образом, дисперсионное уравнение примет вид:

$$\begin{aligned} \beta^2 + \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 - \frac{1}{4R^2} + O\left(\frac{1}{R^4}\right) &= k_p^2(m, R) = k^2 - k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 \\ k^2 - \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 - \beta^2 - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \frac{1}{4R^2} + O\left(\frac{1}{R^4}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Уравнение (2.10) показывает, что поправка к собственным значениям уравнения Гельмгольца для прямого волновода имеет порядок $\frac{1}{R^2}$, при этом она уменьшается с ростом номера m корня для любого фиксированного β .

Из условия $\beta = 0$ для дисперсионного уравнения (2.11) определим критическую длину волны и частоту:

$$\lambda_{kp} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n}{2b}\right)^2 + \left(\frac{m}{2a}\right)^2}} + \frac{1}{32\pi^2 R^2 \left(\sqrt{\left(\left(\frac{n}{2b}\right)^2 + \left(\frac{m}{2a}\right)^2\right)^3}\right)} + O\left(\frac{1}{R^4}\right) \quad (2.12)$$

$$\omega_{kp} = c \sqrt{\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2} - \frac{c}{8R^2 \left(\sqrt{\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2}\right)} + O\left(\frac{1}{R^4}\right). \quad (2.13)$$

Для малых размеров волноводного канала (или хотя бы одной из его сторон) из (2.13) следует, что незатухающими, то есть когда $\beta > 0$, являются волны, лежащие в высокочастотной области.

Таким образом, в области высоких частот (максимум частоты определяется физическими условиями на излучение [10]) корни трансцендентного уравнения (1.20) с учетом первой поправки по кривизне для волноводов малых поперечных размеров с фиксированным большим равномерным изгибом определяются выражением (2.10).

Вывод

Получены точные решения для компонент электрического поля в системе координат, связанной с геометрией волновода с идеальными граничными условиями на стенках. Анализ найденного дисперсионного уравнения показывает, что число собственных значений данной краевой задачи, которые, в свою очередь, определяют волновые числа распространяющихся вдоль канала мод, конечно и вполне счетно, поэтому результаты могут быть использованы при исследованиях нелинейных эффектов в искривленных структурах.

Литература

1. Валовик Д. В., Смирнов Ю. Г. Распространение электромагнитных волн в нелинейных слоистых средах : моногр. Пенза : Изд-во ПГУ, 2010. 264 с.
2. Геворкян Э. А. Распространение электромагнитных волн в волноводе с анизотропным модулированным заполнением // ЖТФ. 2006. Т. 76, вып. 5. С. 134–137.
3. Дунаевский Г. Е., Жуков А. А., Мещеряков В. А. Особенности распространения электромагнитных волн в двухслойном цилиндрическом волноводе с правой и левой средами. Ч. 2 // Известия высших учебных заведений. Сер.: Физика. 2014. Т. 57, № 9. С. 68–71.
4. Князев Б. А., Кузьмин А. В. Поверхностные электромагнитные волны: от видимого диапазона до микроволн // Вестник НГУ. Сер.: Физика. 2007. Т. 2, вып. 1. С. 108–122.
5. Metal-Organic Frameworks // Chem Rev. Special Issue. 2012. No. 112. P. 673–1268.
6. Сидоренко А. Е. Особенности распространения СНЧ-волн на малых и средних расстояниях : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Мурманск : ФГБНУ «Полярный геофизический институт», 2016. 121 с.
7. Левин Р. Теория волноводов : моногр. Москва : Радио и связь, 1981. 415 с.
8. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Т. 1. Москва : ИЛ, 1949. 799 с.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов произведений. Москва : Наука, 1971. 1108 с.
10. Багров В. Г., Бисноватый-Коган Г. С., Бордовицын В. А., Борисов А. В., Дорофеев О. Ф., Жуковский В. Ч., Пивоваров Ю. Л., Шорохов О. В., Эпп В. Я. Теория излучения релятивистских частиц : моногр. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002. 576 с.