

ИНТЕРВАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КЛИМАТИЧЕСКОЙ ИЗМЕНЧИВОСТИ БИОРАЗНООБРАЗИЯ НА ПРИМЕРЕ РАСТИТЕЛЬНОСТИ СЕВЕРА

И. Г. Соловьев ^{1✉}, В. Р. Цибульский ¹, Д. А. Говорков ^{1,2}, В. П. Новиков ¹

¹ Тюменский научный центр, Тюмень, Россия

² Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия

✉ E-mail: igsolovyev123@gmail.com

С целью развития ранее полученного результата моделирования динамики растительного покрова вследствие вариации температурного фона представлена новая схема интервального анализа динамики флористических образов формаций в случае, если параметр скорости самовосстановления каждого учетного вида растения задан интервалом разброса своих возможных значений. Введение интервальных границ вариабельности функциональных параметров позволяет дать корректную первичную оценку эволюции фиторесурсного потенциала осваиваемых территорий, демонстрирует приемлемую точность интервального оценивания эволюционных процессов, сохраняет не только качественную картину динамики видового разнообразия, но и строгую количественную оценку меры присутствия каждого вида растения.

Ключевые слова: моделирование, растительный покров, формация, интервальный анализ, границы разброса решений, равновесное состояние, динамика самовосстановления.

INTERVAL MODELING OF BIODIVERSITY CLIMATIC VARIABILITY ON THE EXAMPLE OF NORTH VEGETATION

I. G. Solovyev ^{1✉}, V. R. Tsibulsky ¹, D. A. Govorkov ^{1,2}, V. P. Novikov ¹

¹ Tyumen Scientific Centre SB RAS, Tyumen, Russia

² Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russia

✉ E-mail: igsolovyev123@gmail.com

The article presents a new scheme of interval analysis for the dynamics of floristic images of formations in the event of the self-recovering speed parameter of each accounting plant type is specified by the interval of the spread of its possible values. This scheme develops the obtained result in modeling the dynamics of vegetation cover as a result of variations in the temperature background. The introduction of interval limits for the variability of functional parameters makes it possible to give a proper primary assessment of the evolution of the phyto and resource potential of the territories under development, demonstrates an acceptable accuracy of interval assessment of evolutionary processes, preserves not only a qualitative picture of the dynamics of species diversity but also a rigorous quantitative assessment of the extent of the presence of each plant species.

Keywords: modeling, vegetation cover, formation, interval analysis limits for range of solutions, equilibrium state, self-recovering dynamics.

Представленные исследования во многом мотивированы опубликованной ранее работой [1] по моделированию динамики растительного покрова, а также сложностями в определении исходных данных, необходимых для параметрической настройки модели. Проблема заключается не только в установлении максимально полного видового состава растительности, образующей формации, что, в свою очередь, требует определения и оцифровки большого количества настраиваемых параметров, но и в том, что настраиваемый системный показатель – скорость самовосстановления популяции каждого j -го вида растения – в применяемой модели линейной динамики первого порядка не имеет в биоэкологии строгого и однозначно-

го определения [2]. Используемые в научной периодике подобные характеристики, такие как структурная и функциональная устойчивость [3], показатели упругости, реактивности популяций и т. д., в контексте рассматриваемой задачи сами зависят от изменяющегося уровня температурного фона – главного возмущающего фактора в моделировании.

В названных предположениях рассмотренная ранее схема моделирования может быть обобщена посредством перехода от плохо определяемых функциональных параметров к более строгим их интервальным оценкам $\lambda(j) \in [\underline{\lambda(j)}, \overline{\lambda(j)}]$.

Введение факторов неопределенности изменяет технологию моделирования. Более традиционные статистические методы описания неопределенностей воспроизводят динамику поведения моделируемых процессов «в среднем». Методы интервального анализа доставляют результаты модельных исследований в виде трубок возможных решений, перенося интервалы разброса исходных данных на интервалы возможного разброса восстанавливаемых эволюционных траекторий. Строгость результата, доставляемая интервальным анализом, может стать более предпочтительной в вопросах прогнозирования фиторесурсного потенциала обследуемых территорий.

Современные вычислительные технологии интервального анализа [4–5] позволяют строить границы областей разброса решений уравнений с интервальными параметрами на основе алгебры элементарных интервальных операций, когда построение порождающих уравнений для этих границ не требуется [6]. Двустороннее оценивание решений дифференциально-разностных уравнений с интервальными параметрами связано с построением уравнений для границ разброса решений. В основе такого конструирования могут выступать известные теоремы о дифференциальных неравенствах С. А. Чаплыгина и Т. Важевского. Получение ответов в аналитической форме уравнений для верхней и нижней оценок границ решений исходного уравнения оказывается значимым в задачах обоснования асимптотически устойчивых свойств решений [7] для целого множества обследуемых объектов. Такая форма анализа создает строгую основу последующего развития задач управления в условиях неопределенности. В то же время подобное конструирование, как правило, огрубляет результаты анализа, устанавливая существенно завышенные оценки интервалов решений.

Тем не менее, как показано ниже, данный подход оказался эффективным при оценке динамики изменчивости растительного покрова [1] вследствие вариации температурного фактора в условиях, когда параметр скорости самовосстановления каждого j -го вида растения задан интервалом своих возможных значений $\lambda(j) \in [\underline{\lambda(j)}, \overline{\lambda(j)}]$. Отличительная особенность полученного результата заключается в приемлемой точности двусторонних оценок, позволяющих дать не только качественную картину изменчивости видового состава растительного покрова, но и оценить динамику его количества для каждой формации на выделенном временном интервале ретроспективного анализа при заданном графике хождения температурного фактора. Важно заметить, что построенные модели двустороннего оценивания исследуемых процессов, обусловленные интервальной оценкой скоростного параметра $\lambda(j)$ исходного уравнения, порождают асимптотически исчезающий интервал возможных расхождений решений, если возмущающее воздействие исходного уравнения переходит в квазистатическое состояние. Иными словами, график равновесного флористического состояния формации при вариациях температурного фактора не огрубляется построенной схемой двустороннего оценивания.

Кратко напомним основные положения упомянутой ранее работы [1] по методике моделирования растительного покрова обследуемой территории вследствие климатических возмущений температурного фона приземного слоя атмосферы:

1. Пространственная и атрибутивная детальность анализа определяется масштабом используемой геоботанической карты мозаичных образов растительных формаций [8], полнотой атрибутивных данных по видовому составу и степени присутствия популяций растений, образующих каждую формацию [9].

2. Расположение формаций обследуемой территории имеет широтно-ориентированную структуру позиционирования подобно строению природно-климатических зон [10], ортогонально градиенту снижения температурного фактора в сторону севера. Основываясь на данной закономерности, вводится **первое предположение** о том, что с потеплением флористические образы формаций южных широтных зон будут «смещаться» на позиции формаций сопрягаемых северных широтных зон, а с похолоданием имеет место обратное «смещение» с севера на юг.

3. Различие флористических образов формаций в пределах одной температурной зоны указывает на различие ландшафтно-литологических условий произрастания. Ориентированные вдоль градиента температурного фактора формации со сходными ландшафтно-литологическими условиями произрастания образуют ландшафтно-подобную группу (ЛПГ), в рамках которой и реализуются отмеченные выше процессы «смещения» – это **второе предположение**.

4. Пусть пары $\langle \theta(i), \mathbf{w}(i) \rangle$, $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ – опорная температура и опорный вектор флористического состояния i -й формации выделенной ЛПГ – упорядочены по шкале температурного фактора:

$$\theta(1) < \theta(2) < \dots < \theta(i) < \dots < \theta(n),$$

а n – количество формаций в группе. Если N – учетное количество видов растений образующих ЛПГ, то вектор опорных состояний i -й формации имеет представление

$$\mathbf{w}(i) = [\mathbf{w}(1, i) \ \mathbf{w}(2, i) \ \dots \ \mathbf{w}(N, i)]^T,$$

где $\mathbf{w}(j, i) \in [0, 5]$ – степень присутствия популяции j -го вида ($j \in J = \{1, 2, \dots, N\}$) в i -й формации группы, заданная в баллах.

Под опорным значением $\theta(i)$ будем понимать среднее состояние температурного фактора i -й формации за длительные периоды наблюдений. Под опорным вектором состояния i -й формации $\mathbf{w}(i)$ понимается равновесное флористическое состояние при температуре $\theta(i)$, т. е. флористический образ формации, когда температурный фактор $\theta(i)$ остается неизменным произвольно долго.

5. Пусть состояние i -й формации в $k-1$ году соответствует вектору

$$\mathbf{v}(i, k-1) = [\mathbf{v}(1, i, k-1) \ \mathbf{v}(2, i, k-1) \ \dots \ \mathbf{v}(N, i, k-1)]^T,$$

а возмущенные значения температурных факторов в k -м году для всех формаций группы оцениваются по выражению

$$\theta(i, k) = \theta(i) + \delta(k), \quad i \in I,$$

где $\delta(k)$ – уровень температурного возмущения.

Введем вектор $\mathbf{w}(i, k)$ равновесного флористического состояния i -й формации для возмущенного температурного фактора $\theta(i, k)$, тогда **третье предположение** исходной работы формулируется следующим образом: реакция растительного покрова на изменяющиеся равновесные состояния популяций носит асимптотический характер и аппроксимируется динамикой первого порядка [11], представленной для каждого j -го вида растения линейными разностными уравнениями:

$$\mathbf{v}(j, i, k) = \lambda(j) \cdot \mathbf{v}(j, i, k-1) + (1 - \lambda(j)) \cdot \mathbf{w}(j, i, k), \quad j \in J, \quad (1)$$

где $\lambda(j)$ – скорость самовосстановления j -го вида, связанная с периодом $\Delta T(j)$ самовосстановления отношением $\lambda(j)^{\Delta T(j)} \approx 0,02$.

6. **Четвертое предположение** определяет правило формирования вектора $\mathbf{w}(i, k)$ равновесного флористического состояния каждой i -й формации группы для произвольного возмущения $\delta(k)$ температурного фактора $\theta(i, k)$ в виде:

$$\mathbf{w}(j, i, k) = \mu(1, \theta(i, k)) \cdot \mathbf{w}(j, 1) + \dots + \mu(i, \theta(i, k)) \cdot \mathbf{w}(j, i) + \dots + \mu(n, \theta(i, k)) \cdot \mathbf{w}(j, n), \quad (2)$$

где функции сопряжения опорных состояний $\mu(m, \theta(i, k))$ удовлетворяют следующим условиям нормирования:

$$\mu(1, \theta) + \mu(2, \theta) + \dots + \mu(n, \theta) = 1, \quad \mu(i, \theta) \geq 0, \quad \mu(i, \theta(i)) = 1.$$

Без ограничения общности индивидуальные свойства статической устойчивости (сопротивляемости) каждого j -го вида к уровню температурных возмущений, как это было в [1], здесь будем опускать.

Перейдем к анализу динамики флористического состояния формаций в условиях интервальной оценки параметра $\lambda(j) \in [\underline{\lambda}(j), \overline{\lambda}(j)]$ – скорости самовосстановления популяции растений j -го вида в уравнении (1).

Пусть учетное множество видов растений группы $J = \{1, 2, \dots, N\}$ разделено на подгруппы $J = \bigcup_1^{nL} J(l)$, имеющие разную темпоральную динамику самовосстановления, представленную разнесенными интервалами возможных значений своих скоростных параметров:

$$\lambda(j) \in [\underline{\lambda}(l), \overline{\lambda}(l)], \quad j \in J(l), \quad l \in L = \{1, 2, \dots, nL\}. \quad (3)$$

Соответствующие группировки видов растений опорных векторов и состояний формаций обозначим записями $\mathbf{w}_l(i)$, $\mathbf{v}_l(i, k)$.

Применяя линейное преобразование (1) к линейной форме (2) в условиях (3), можно записать

$$\mathbf{v}_l(i, k) = \eta(l, 1, i, k) \cdot \mathbf{w}_l(1) + \dots + \eta(l, m, i, k) \cdot \mathbf{w}_l(m) + \dots + \eta(l, n, i, k) \cdot \mathbf{w}_l(n), \quad (4)$$

где динамические образы $\eta(l, m, i, k)$ функции сопряжения $\mu(m, \theta(i, k))$, для популяций $j \in J(l)$ l -й темпоральной подгруппы, согласно (1) и (2), удовлетворяют включению

$$\eta(l, m, i, k) \in \mu(m, \theta(i, k)) + [\underline{\lambda}(l), \overline{\lambda}(l)] [\eta(l, m, i, k-1) - \mu(m, \theta(i, k))], \quad m \in I, \quad (5)$$

полное множество решений которого оценивается на основании нижеследующего.

Утверждение. Все траектории решений разностного включения (5) $\eta(l, m, i, k)$ удовлетворяют интервальному ограничению

$$\eta(l, m, i, k) \in [\underline{\eta}(l, m, i, k), \overline{\eta}(l, m, i, k)], \quad (6)$$

если данное условие выполняется для начального момента времени $k = 0$, а уравнения для верхней – $\overline{\eta}(l, m, i, k)$ и нижней – $\underline{\eta}(l, m, i, k)$ границ имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\eta}(l, m, i, k) = \mu(m, \theta(i, k)) + \underline{\lambda}(l) \cdot [\overline{\eta}(l, m, i, k-1) - \mu(m, \theta(i, k))] + \\ \quad + \overline{\lambda}(l) \cdot [\overline{\eta}(l, m, i, k-1) - \mu(m, \theta(i, k))]_+ \\ \underline{\eta}(l, m, i, k) = \mu(m, \theta(i, k)) + \underline{\lambda}(l) \cdot [\underline{\eta}(l, m, i, k-1) - \mu(m, \theta(i, k))] + \\ \quad + \overline{\lambda}(l) \cdot [\underline{\eta}(l, m, i, k-1) - \mu(m, \theta(i, k))]_- \end{array} \right. \quad (7)$$

Здесь принято $(x)_+ = (x, \text{если } x \geq 0) \vee (0, \text{если } x < 0)$, а $(x)_- = x - (x)_+$.

Доказательство. Запишем исходные соотношения (1), (3), (5) в упрощенном виде:

$$\eta(k) = \mu(k) + \lambda(\eta(k-1) - \mu(k)), \quad \lambda \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]. \quad (8)$$

Соответствующие упрощения записи системы (7) приводят к уравнениям верхней границы и нижней границы:

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(k) &= \mu(k) + \underline{\lambda}(\bar{\eta}(k-1) - \mu(k))_- + \bar{\lambda}(\bar{\eta}(k-1) - \mu(k))_+ \\ \underline{\eta}(k) &= \mu(k) + \underline{\lambda}(\underline{\eta}(k-1) - \mu(k))_+ + \bar{\lambda}(\underline{\eta}(k-1) - \mu(k))_- \end{aligned} \quad (9)$$

Проведем анализ для уравнения верхней границы. Следует доказать, что если выполнено отношение

$$\bar{\varepsilon}(k-1) = \bar{\eta}(k-1) - \eta(k-1) > 0, \quad (10)$$

то при любых $\mu(k)$ и $\lambda \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}] \geq 0$, будет обеспечено: $\bar{\varepsilon}(k) > 0$.

Пусть $\bar{\eta}(k-1) > \eta(k-1) \geq \mu(k)$. Перейдем к уравнению ошибки (10). Для этого из (9) вычтем уравнение (8). В принятых условиях $\bar{\eta}(k-1) \geq \mu(k)$ имеем:

$$\bar{\varepsilon}(k) = \bar{\lambda} \cdot \bar{\varepsilon}(k-1) + (\bar{\lambda} - \lambda) \cdot (\eta(k-1) - \mu(k)).$$

Все компоненты суммы в правой части уравнения положительны, из чего следует $\bar{\varepsilon}(k) \geq 0$.

Второй случай, когда имеет место отношение $\mu(k) \geq \bar{\eta}(k-1) > \eta(k-1)$. Уравнение верхней границы (9) принимает вид:

$$\bar{\eta}(k) = \mu(k) + \underline{\lambda}(\bar{\eta}(k-1) - \mu(k))_-.$$

Вычитая из полученного уравнения исходное (8), приходим к модели ошибки:

$$\bar{\varepsilon}(k) = \underline{\lambda} \cdot \bar{\varepsilon}(k-1) + (\underline{\lambda} - \lambda) \cdot (\eta(k-1) - \mu(k)).$$

Первое слагаемое правой части – строго положительно, сомножители второго слагаемого не положительны, что в совокупности подтверждает условие $\bar{\varepsilon}(k) > 0$ и тем самым доказывает исходную причинно-следственную связь. Подобная схема вывода справедлива и для уравнения нижней границы, что в совокупности и доказывает исходное утверждение.

Доказанное утверждение позволяет строить интервальные оценки процессов эволюции растительного покрова по темпорально разделенным подгруппам растений (3) при возмущениях температурного фона. Согласно (4), (6) имеем:

$$\mathbf{v}_l(i, k) \in [\underline{\mathbf{v}}_l(i, k), \overline{\mathbf{v}}_l(i, k)], \quad l \in L, \quad (11)$$

где $\underline{\mathbf{v}}_l(i, k) = \underline{\eta}(l, 1, i, k) \cdot \mathbf{w}_l(1) + \dots + \underline{\eta}(l, m, i, k) \cdot \mathbf{w}_l(m) + \dots + \underline{\eta}(l, n, i, k) \cdot \mathbf{w}_l(n)$;

$\overline{\mathbf{v}}_l(i, k) = \bar{\eta}(l, 1, i, k) \cdot \mathbf{w}_l(1) + \dots + \bar{\eta}(l, m, i, k) \cdot \mathbf{w}_l(m) + \dots + \bar{\eta}(l, n, i, k) \cdot \mathbf{w}_l(n)$.

Для иллюстрации свойств решений модели двустороннего оценивания (11) приведем результаты вычислительного анализа реакций возмущенных функций сопряжения при гармонических релаксационных колебаниях температурного фактора. Для простоты последую-

щего анализа, но без ограничения общности, функции сопряжения опорных векторов учетного множества растений введем кусочно-линейными связями, как в [1]:

$$\mu(m, \theta(i, k)) = \frac{1}{\theta(m) - \theta(m-1)} [(\theta(i, k) - \theta(m-1))_+ - (\theta(i, k) - \theta(m))_+] - \frac{1}{\theta(m+1) - \theta(m)} [(\theta(i, k) - \theta(m))_+ - (\theta(i, k) - \theta(m+1))_+] \quad (12)$$

На рисунке 1-1 представлены интервальная реакция динамики функции сопряжения (12) с периодом самовосстановления $\Delta T \in [4, 12]$ лет на релаксационный гармонический сигнал с периодом 6 лет и график ошибки оценивания $\Delta \eta(\bullet, k) = \bar{\eta}(\bullet, k) - \underline{\eta}(\bullet, k)$, а на рисунке 1-2 – реакция и ошибка той же интервальной модели на сигнал с периодом 12 лет. Расчеты подтверждают, что средний уровень ошибки пропорционален росту частоты возмущающего воздействия. Ошибка оценивания асимптотически исчезает, если гармоническое возмущение стремится к квазистационарному состоянию. Как ранее отмечалось, построенная модель двухстороннего оценивания не огрубляет равновесные состояния системы.

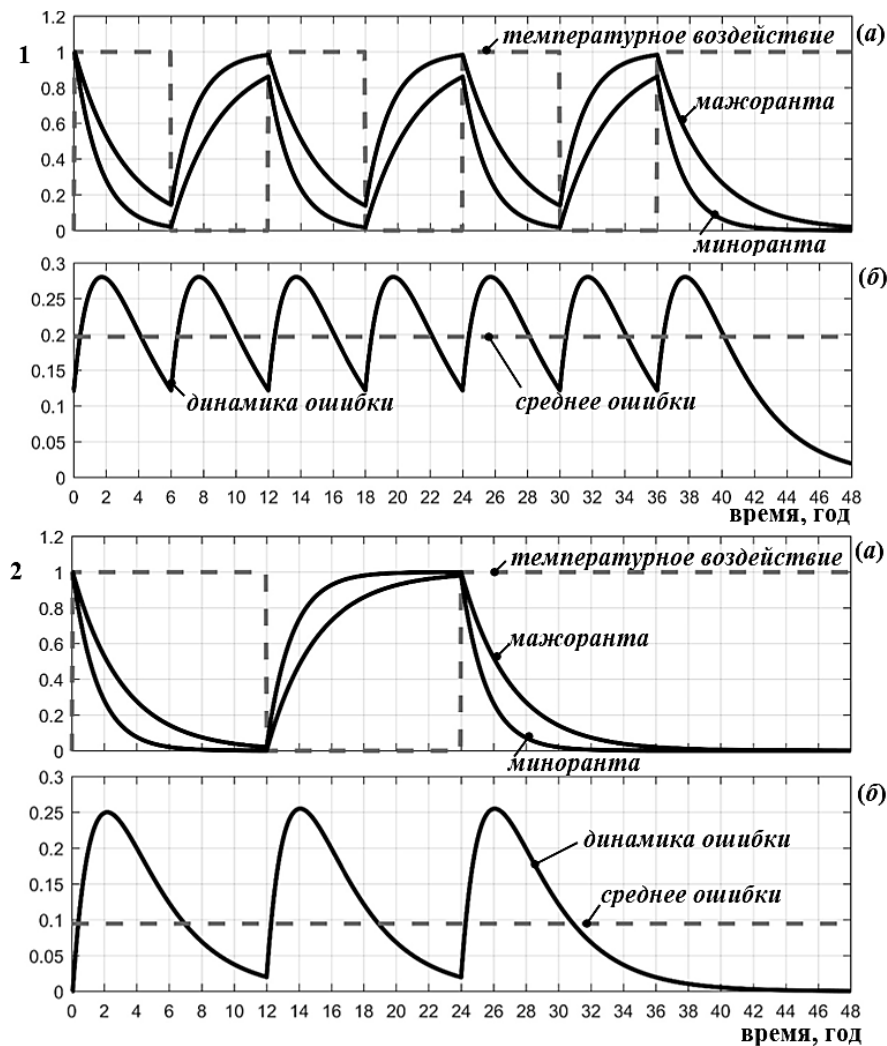


Рис. 1. Графики температурного воздействия и динамика двусторонней оценки функции сопряжения:
 (а) – при высокочастотных (1) и низкочастотных (2) возмущениях;
 (б) – разброс интервальных ошибок оценивания для приведенных примеров
Примечание: составлено авторами.

Рассмотренная схема анализа была использована для ретроспективной оценки динамики растительного покрова полуостровов Ямал и Гыдан на периоде наблюдений летнего температурного фона города Салехарда с 1935 по 2010 г. Основываясь на данных и результатах работы [1], обследуемые территории представлены 48 формациями [9], разбитыми на восемь ЛПГ, которые распределены в четырех температурных широтных зонах. Учетное множество видов растений для группы «верховые», включающей четыре формации, составляет 121 единицу. Для наглядности вычислительного анализа были выделены доминирующие виды с высокой долей присутствия, разделенные в свою очередь на две темпоральные подгруппы с периодами самовосстановления $\Delta T(1) \in [3, 6]$ и $\Delta T(2) \in [6, 12]$ лет. Исходные данные о видовом составе, степени присутствия и принадлежности к темпоральной подгруппе сведены в таблицу, фрагмент которой приводится ниже.

Таблица

Фрагмент таблицы данных по видам группы «верховые»

Наименование вида	Период самовосстанов- ления для подгруппы	Степень присутствия в формациях			
		<i>i</i> = 1	<i>i</i> = 2	<i>i</i> = 3	<i>i</i> = 4
...					
<i>Empetrum subholarcticum</i> V. Vassil.	7,5	0	5	3	3
<i>Salix glauca</i> L.	9,5	0	3	3	2
<i>Betula nana</i> L.	12	0	3	5	3
<i>Ledum decumbens</i> (Ait.) Lodd. ex Steud.	7,5	0	4	5	4
<i>Vaccinium vitis-idaea</i> L.	7,5	0	3	0	5
...					
<i>Carex globularis</i> L.	6	0	3	3	3
<i>Calamagrostis groenlandica</i> (Schränk) Kunth	6	5	4	0	2
<i>Calamagrostis neglecta</i> (Ehrh.) Gaertn., Mey. & Schreb.	6	0	3	2	0
<i>Calamagrostis holmii</i> Lange	6	0	5	4	4
<i>Festuca ovina</i> L.	6	0	5	5	5
...					

Примечание: составлено авторами.

На рисунке 2 приведены результаты ретроспективного интервального анализа для вида *Calamagrostis neglecta* (Ehrh.) Gaertn., Mey. & Schreb из первой темпоральной подгруппы (рис. 2-2) и *Betula nana* L. из второй подгруппы (рис. 2-3). График среднегодового температурного фона для летнего времени представлен на рисунке 2-1. Заметим, что наличие интервальных неопределенностей сохраняет не только качественную картину динамики растительного покрова, но и доставляет количественную оценку степени присутствия для каждого вида популяции.

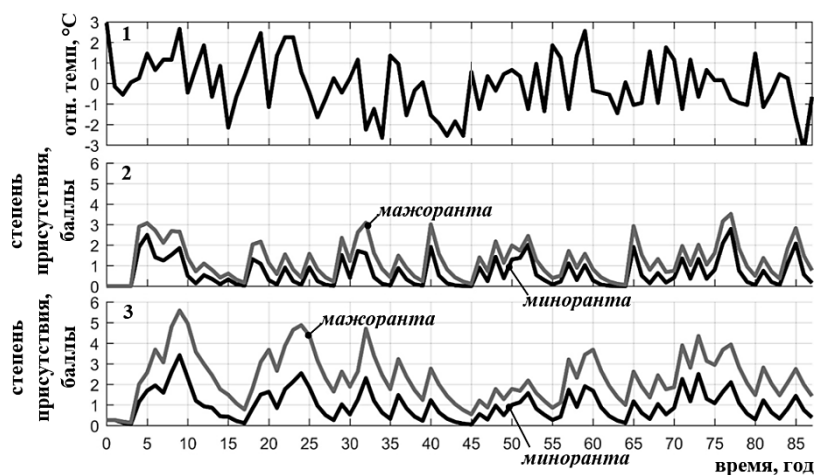


Рис. 2. Графики вариации среднегодового температурного фона для летнего времени (1) и вариации интервальных оценок видов с быстрым (2) и медленным (3) периодами самовосстановления
Примечание: составлено авторами.

Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы:

1. Метод математического моделирования эволюционных процессов ландшафтной биоэкологии является эффективным инструментом анализа и прогнозирования биоразнообразия и ресурсного потенциала осваиваемых территорий [12]. Положенные в основу известных моделей концепции конкурентного взаимодействия видов [13], стадий произрастания популяций [14], генетического отбора [15–16], равно как и рассмотренный подход на основе самоорганизации природно-климатических зон [1, 17], позволяют воспроизводить графики эволюции «живого», отражая фундаментальные закономерности сосуществования экосистем. Однако указанные макрзакономерности не объясняют сущностных причин многообразия поведенческих проявлений реально наблюдаемых процессов. Настраечные параметры макромоделей отражают осредненное действие множества скрытых факторов, детализация описания которых может оказаться проблемной, а в случае оценки эколого-ресурсного потенциала – необязательной. Представленный выше интервальный анализ есть пример строгого двустороннего оценивания эволюционных кривых, если плохо определяемые параметры модели задаются интервалами своих возможных значений.

2. Практическая значимость схем двустороннего оценивания зависит от условий пропорционального соответствия – интервалов разброса параметров исходной модели с интервалами разбросов решений. Следует признать, что желаемое соответствие далеко не всегда достижимо и, помимо прочего, зависит от уровня исходной неопределенности, иначе – от величины исходной зоны параметрической неопределенности.

3. В рамках исходных предположений о модели динамики растительного покрова формаций с интервальными разбросами параметров скорости самовосстановления видов метод двустороннего оценивания оказывается эффективным, т. к. он сохраняет не только качественную картину динамики видового разнообразия, но и дает строгую количественную оценку степени присутствия каждого вида растения. Кроме того, конструкции оценочных уравнений исключают интервальные разбросы решений для равновесных температурных состояний системы.

Литература

1. Арефьев С. П., Глазунов В. А., Говорков Д. А., Московченко Д. В., Соловьев И. Г., Цибульский В. Р. Модель и анализ климатогенной динамики растительного покрова на примере данных полуострова Ямал // Матем. биология и биоинформатика. 2017. Т. 12, № 2. С. 256–272.
2. Светлосанов В. А. Устойчивость природных систем к природным и антропогенным воздействиям. М., 2009. 100 с.
3. Коломыц Э. Г., Шарая Л. С. Количественная оценка функциональной устойчивости лесных экосистем // Экология. 2015. № 2. С. 83–94.
4. Шарый С. П. Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск : XYZ, 2019. 642 с.
5. Moore R. E., Kearfott R. B., Cloud M. J. Introduction to interval analysis. Philadelphia : SIAM, 2009. 184 p.
6. Жолен Д., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э. Прикладной интервальный анализ. Ижевск : Ин-т компьютер. исслед., 2007. 468 с.
7. Матросов В. М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. 384 с.
8. Растительность Западно-Сибирской равнины : карта / под общ. ред. акад. В. Б. Соचाев. М. : ГУГК. 1976.
9. Ильина И. С., Лапишна Е. И., Лавренко Н. Н., Мельцер Л. И., Романова Е. А., Богоявленский Б. А., Махно В. Д. Растительный покров Западно-Сибирской равнины. Новосибирск : Наука, 1985. 251 с.
10. Коновалов А. А., Московченко Д. В., Глазунов В. А., Тигеев А. А., Гашев С. Н. Аппроксимации климатической зависимости биоты на севере Тюменской области // Вестник кибернетики. 2015. № 2. С. 11–23.

11. Первозванский А. А. Курс теории автоматического управления. М. : Лань, 2015. 624 с.
12. Тарко А. М. Антропогенные изменения глобальных биосферных процессов. Матем. моделирование. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. 232 с.
13. Колобов А. Н. Численно-аналитические исследования роста дерева в условиях конкуренции за свет // Матем. биология и биоинформатика. 2012. Т. 7, Вып. 1. С. 125–138.
14. Логофет Д.О., Белова И.Н. Неотрицательные матрицы как инструмент моделирования динамики популяций: классические модели и современные обобщения // Фундамент. и приклад. математика. 2007. Т. 13, № 4. С. 145–164.
15. Букварева Е. Н., Алещенко Г. М. Принципы оптимального разнообразия биосистем // Успехи соврем. биологии. 2005. Т. 125, № 4. С. 337–348.
16. Алещенко Г. М., Букварева Е. Н. Двухуровневая иерархическая модель оптимизации биологического разнообразия // Известия РАН. Сер. биол. 2010. № 2. С. 5–15.
17. Говорков Д. А., Соловьев И. Г. Геоинформационные инструменты анализа и моделирования трансформации видового и количественного состава растительного покрова полуострова Ямал // Вестник кибернетики. 2015. № 1. С. 24–28.