

УДК 622.276.66:519.87

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА

Д. А. Пестов^{1,2}, А. В. Акулич², А. В. Звягин¹,
А. А. Шамина¹, В. В. Тюренкова^{1,2}

¹Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

²Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт
системных исследований Российской академии наук
dapmitry@gmail.com

В данной статье рассмотрены некоторые аспекты вычислительного моделирования трещины гидроразрыва, в частности предложены методы моделирования роста трещины гидроразрыва в изначально неоднородно напряженной среде, описаны результаты тестовых параметрических исследований. Также представлен метод моделирования произвольно ориентированных плоских трещин в трехмерном пространстве с учетом их взаимодействия между собой.

Ключевые слова: моделирование гидроразрыва, метод разрывных смещений, метод граничного элемента, неоднородные напряжения.

BASIC ASPECTS OF HYDRAULIC FRACTURING CRACK NUMERICAL MODELING

D. A. Pestov^{1,2}, A. V. Akulich², A. V. Zvyagin¹,
A. A. Shamina¹, V. V. Tyurenkova^{1,2}

¹Lomonosov Moscow State University

²System Research Institute, Russian Academy of Sciences
dapmitry@gmail.com

The paper discusses some aspects of hydraulic fracturing crack numerical modeling. In particular, methods for modeling fracture growth in a non-uniformly stressed medium are suggested, and results of test simulations aimed at parametric studies are presented. The method for mathematical modeling of arbitrary oriented flat cracks interaction in 3D space is also developed.

Keywords: hydraulic fracture modeling, displacement discontinuity method, boundary element method, non-uniform stresses.

Введение. В настоящее время гидроразрыв пласта – один из основных методов интенсификации добычи на нефтяных и газовых месторождениях. Эффективность процесса гидроразрыва зависит от полученной формы трещины, полноты очистки после процесса гидроразрыва и прочих факторов [1–3]. Важным аспектом для точного моделирования гидроразрыва является учет имеющихся в среде неоднородностей и естественных разломов. На данный момент существуют модели, которые учитывают, например, неоднородные напряжения, возникающие в результате взаимного влияния нескольких трещин гидроразрыва [4–8]. Большинство подобных моделей обладают значительной вычислительной сложностью из-за необходимости решать трехмерную задачу упругости. В данной работе представлен принцип моделирования роста трещины гидроразрыва в изначально неоднородно напряженной среде, а также метод, позволяющий моделировать полностью трехмерные трещины и их взаимодействие и снизить за счет использования аналитических решений вычислительную размерность задачи.

Постановка задачи. Рассмотрим решение упругой задачи для трехмерной линейно-упругой среды с имеющимися в ней одной или несколькими трещинами.

Рассмотрим плоскую вертикальную трещину, раскрытие (ширина) которой много меньше ее высоты и длины, а высота постоянна. Через скважину, находящуюся в начале ко-

ординат, в трещину подается жидкость гидроразрыва, которую при решении полагаем несжимаемой. Окружающую породу считаем линейно упругой. Трещина распространяется в направлении, перпендикулярном направлению минимального главного напряжения σ^3 . Само напряжение σ^3 , в свою очередь, может меняться вдоль направления роста трещины, которое мы принимаем за ось x . При этом следует отметить, что $\sigma^3(x)$ в данной ситуации – напряжения, изначально заданные на оси Ox или в некоторой окрестности. Согласно принципу Сен-Венана, распределение напряжений вдали от трещины не должно оказывать существенного влияния на ее поведение.

Таким образом, система уравнений, определяющих рост трещины, состоит из уравнений, описывающих движение жидкости:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial wV}{\partial x} = -V_{leak},$$

$$\frac{\partial p_f}{\partial x} = -F(V, w)$$

и уравнений, описывающих поведение упругой среды, в которой распространяется трещина:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}],$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}],$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy},$$

где w – это раскрытие трещины;

V – скорость жидкости в трещине;

V_{leak} – скорость утечки жидкости в породу;

p_f – давление жидкости;

F – сила вязкого трения;

E и ν , соответственно, – модуль Юнга и коэффициент Пуассона для среды;

u – вектор смещений;

σ – тензор напряжений.

Эти две системы уравнений связаны между собой граничными условиями. Для простоты вычислений принимаем, что граничные условия на стенках трещины ставятся на оси x при $y = 0^\pm$. На рис. 1 схематично изображены граничные условия для данной задачи.

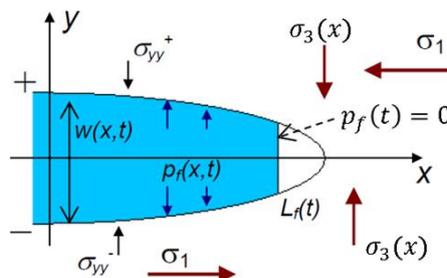


Рис. 1. Граничные условия на берегах трещины и на бесконечности

При $y = 0^\pm$; $|x| < L(t)$ задается связь между неизвестными упругой задачи и задачи течения жидкости $u_{y^\pm} = \pm \frac{w}{2}$, $\sigma_{xy}^\pm = 0$, $\sigma_{yy}^\pm = -p_f(x, t)$.

На «бесконечности» заданы напряжения $\sigma_{yy} = \sigma_3(x)$, $\sigma_{xx} = \sigma_2$, $\sigma_{xy} = 0$.

Кроме того, в начале координат задается расход жидкости Q , а на границе жидкости $x = L_f(t)$, определяемой из закона сохранения массы, ставится условие $p_f = 0$.

Отметим, что в таком случае условия на «бесконечности» заданы математически некорректно и, следовательно, методы, использующие аналитические решения задачи теории упругости, к такой постановке не применимы. Для того чтобы метод можно было применить, для начала следует избавиться от неоднородности напряжений на бесконечности. Для этого, пользуясь линейностью задачи, раскладываем напряжения в среде на две составляющие: σ_0 – начальные неоднородные напряжения в среде, не зависящие от наличия трещины, и σ_f – напряжения, вызванные наличием трещины. В таком случае для σ_0 известно или получено начальное распределение, для которого $\sigma_{xx}^0(x, 0) = \sigma_1$, $\sigma_{xy}^0(x, 0) = 0$, $\sigma_{yy}^0(x, 0) = \sigma_3(x)$. Граничные условия на берегах трещины изменяются соответственно, и для напряжения σ_f получаем задачу о распространении трещины под действием внутреннего давления в ненапряженной среде.

Упругая задача решается с помощью метода разрывных смещений, позволяющего снизить вычислительную размерность задачи. Более детально этот метод будет изложен ниже.

Результаты численного счета. Рассмотрим следующую задачу: рост трещины гидроразрыва в среде, в которой напряжение σ'_3 на участке $x_0 < x < x_1$ отличается от напряжения σ_3 в остальных местах. Утечку жидкости в породу не учитываем. На рис. 2 представлены профили раскрытия трещин одинаковой длины при различных напряжениях σ'_3 .

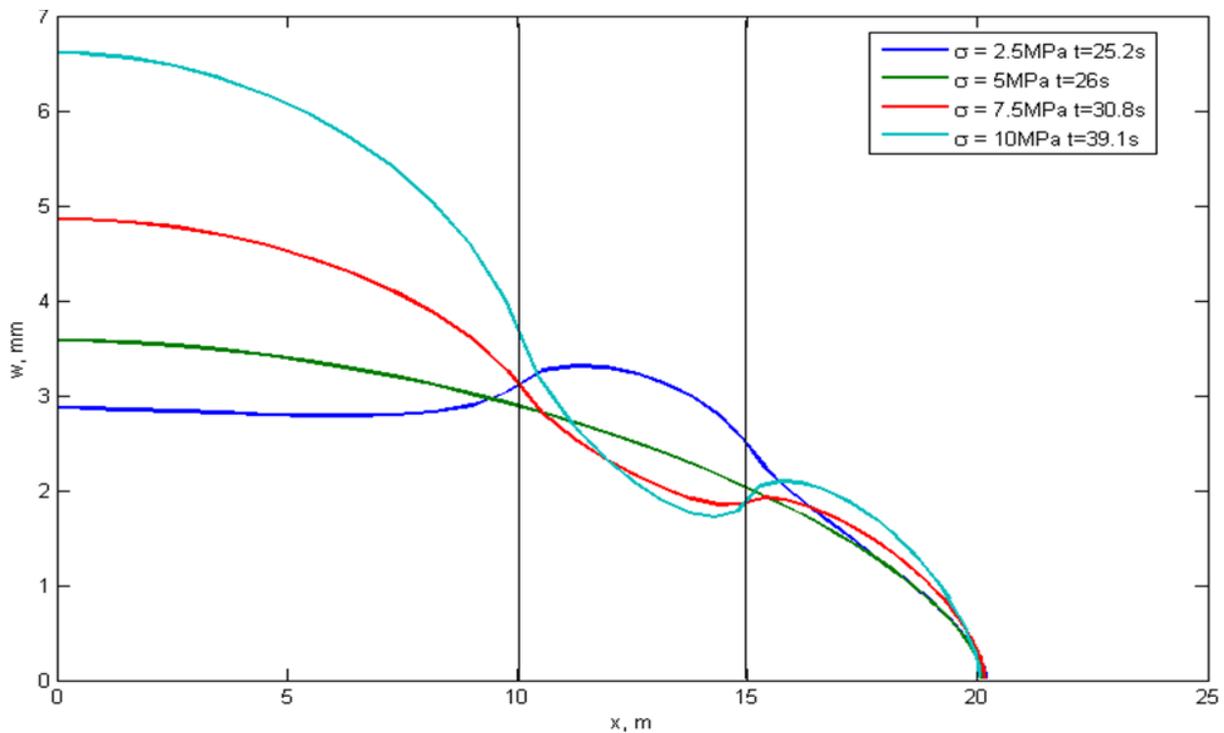


Рис. 2. Профили раскрытия при различных напряжениях в породе

Из рис. 2 видно, что более или менее напряженный участок оказывает заметное влияние на раскрытие трещины как на самом участке, так и вне его. Часть различий обусловлена

тем, что данные профили раскрытия трещины взяты в разное время и, соответственно, в трещинах находится различный объем жидкости. Но тем не менее достаточная разница в напряжении между областями обеспечивает немонотонное раскрытие трещины, что может существенно повлиять на распространение проппанта через такую трещину.

Далее на рис. 3 показаны графики зависимости длины трещины от времени для различных значений напряжения на участке $x_0 < x < x_1$.

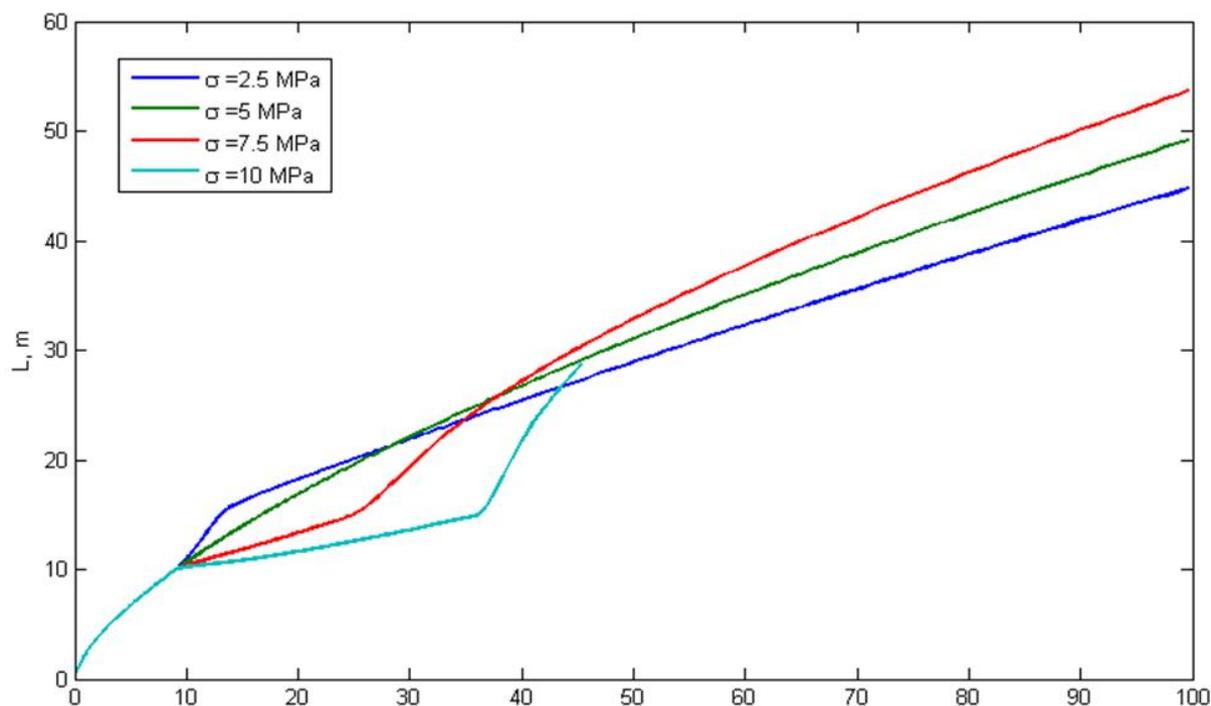


Рис. 3. Графики роста трещины при различных напряжениях в ограниченной области

Из представленных графиков хорошо видно, что трещина, преодолевающая участок повышенного напряжения, через некоторое время обгоняет как трещину, растущую в однородно напряженной среде, так и трещину, преодолевшую менее напряженный участок. А если учесть тот факт, что в этих трещинах находится одинаковый объем жидкости гидроразрыва, то из этого следуют два вывода. Во-первых, конечная область неоднородного напряжения существенно влияет на скорость распространения трещины гидроразрыва, причем не только во время преодоления этой области, но и в дальнейшем. Во-вторых, сужение трещины в области повышенных напряжений вкупе с общим утоньшением трещины ввиду большей скорости распространения может привести к тому, что трещина будет куда менее пригодна для закачивания туда проппанта. Таким образом, учет даже относительно непротяженных неоднородностей в среде может существенно повлиять на точность применяемой модели.

Моделирование поворота трещины. Как было сказано ранее, трещина гидроразрыва распространяется в направлении, перпендикулярном минимальному главному напряжению. Но в случае распространения трещины в изначально неоднородно напряженной среде нельзя ожидать, что это направление будет всегда оставаться неизменным. Далее мы представим решения, позволяющие определить вероятное направление распространения трещины при известных коэффициентах интенсивности напряжений и изначальных напряжениях в среде для шага заданной длины.

Для определения нужного направления следует определить значения напряжений $\sigma_{y'y'}$, нормальных к выбранному направлению. Как известно, напряжения в кончике трещины определяются коэффициентами интенсивности KI и KII по следующим формулам:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x^I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y^I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy}^I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x^{II} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y^{II} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy}^{II} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right). \end{array} \right.$$

Здесь x и y направлены, соответственно, вдоль и поперек изначальной трещины. После некоторых преобразований мы можем получить формулу зависимости напряжений вдоль выбранного направления при известных K_I и K_{II} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{x'x'}^f = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[\sin \left(\frac{3\theta}{2} \right) - \sin^3 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right], \\ \sigma_{y'y'}^f = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos^3 \left(\frac{\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[5 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right], \\ \sigma_{x'y'}^f = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[\sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) + \cos \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right], \end{array} \right.$$

где $x' u y'$ – оси системы координат с началом в кончике трещины, повернутой на угол θ относительно изначальной (рис. 4).

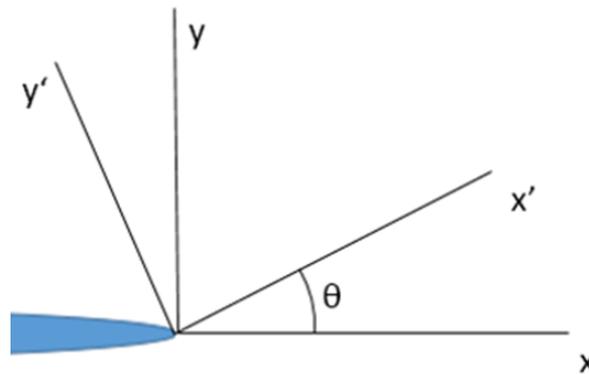


Рис. 4. Поворот системы координат перед трещиной

Далее, чтобы получить суммарное напряжение, добавим к этому известное начальное напряжение σ_0 . Итоговое напряжение будет выглядеть как сумма $\sigma = \sigma_0 + \sigma_f$.

Таким образом мы можем определить угол, при котором напряжение на заданном расстоянии r от кончика трещины будет максимальным.

Моделирование трещины в трехмерном пространстве. Теперь остановимся подробнее на методе решения упругой задачи. Пусть у нас есть плоская трещина, представляющая собой поверхность, на которой возможны сильные разрывы перемещений. Предположим, что трещина ориентирована перпендикулярно оси x_3 . В таком случае в среде должны выполняться следующие уравнения:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)u_{k,ki} + \mu u_{i,jj} &= 0 \\ \sigma_{ji} &= \lambda \delta_{ji} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \nabla^2 \nabla^2 u_i &= 0 \end{aligned}$$

Для статических задач (гидроразрыв во многих ситуациях можно считать квазистатической задачей с точки зрения теории упругости) справедливо представление Треффца для поля перемещений $u_i = \varphi_i + x_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$, где $\Delta \varphi_i = 0, \Delta \psi = 0$, подставляя которое в уравнения, получим поле деформаций и напряжений, задаваемое функциями φ_i . Чтобы удовлетворить условиям, на трещине будем искать функции φ_i в форме потенциала двойного слоя:

$$W(x) = \iint_S \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta \xi} \frac{1}{|x - \xi|} dS_\xi,$$

$$\Delta W = 0, \quad W : \frac{1}{r^2},$$

$$W + (\xi_0) - W - (\xi_0) = 4\pi\mu(\xi_0).$$

Таким образом, найдя подобные функции для прямоугольной области, получаем аналитическое решение влияния одиночного плоского прямоугольного разрыва на окружающее пространство. С помощью замены координат это решение обобщается на произвольно ориентированный элементарный разрыв. Далее, если разбить всю поверхность трещины на N-граничных элементов (рис. 5), получаем следующую систему:

$$\sum_{m=1}^N A_{mn}^{(1)} D_1^m + \sum_{m=1}^N B_{mn}^{(1)} D_2^m + \sum_{m=1}^N C_{mn}^{(1)} D_3^m = b_1^n,$$

$$\sum_{m=1}^N A_{mn}^{(2)} D_1^m + \sum_{m=1}^N B_{mn}^{(2)} D_2^m + \sum_{m=1}^N C_{mn}^{(2)} D_3^m = b_2^n,$$

$$\sum_{m=1}^N A_{mn}^{(3)} D_1^m + \sum_{m=1}^N B_{mn}^{(3)} D_2^m + \sum_{m=1}^N C_{mn}^{(3)} D_3^m = b_3^n,$$

$$n = 1, 2, \dots, N,$$

где b_1^n, b_2^n, b_3^n – компоненты вектора напряжений в центре N-го граничного элемента;

$A_{mn}^{(i)}, B_{mn}^{(i)}, C_{mn}^{(i)}$ – полученные в результате предыдущих вычислений функции влияния элемента m на элемент n;

D_i^m – неизвестные коэффициенты, которые находятся из решения получившейся системы.

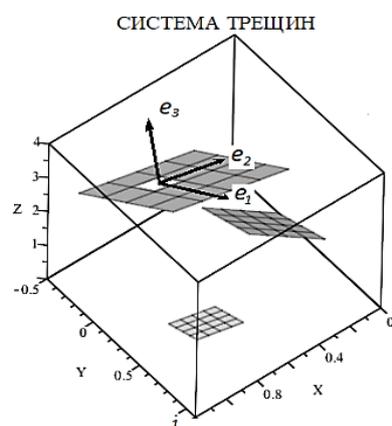


Рис. 5. Разбиение системы трещин на элементы

Таким образом, задача взаимодействия произвольного количества произвольно ориентированных трещин в трехмерном пространстве сводится к решению системы из $3N$ линейных уравнений, где N – количество элементов, на которые разбиты поверхности трещин, что понижает размерность задачи на единицу. С точки зрения математической теории данный подход является одной из реализаций метода разложения решения по неортогональным функциям [9–12], но, в отличие от предыдущих работ, использует новые фундаментальные решения [13].

Результаты моделирования. В качестве примера приведем результаты моделирования взаимодействия двух трещин, расположенных в параллельных плоскостях. Активная трещина под внутренним давлением в два раза длиннее пассивной трещины.

На рис. 6в видно, что активная трещина слабо действует на трещины, находящиеся в ее «тени», но активно действует на трещину, находящуюся снаружи.

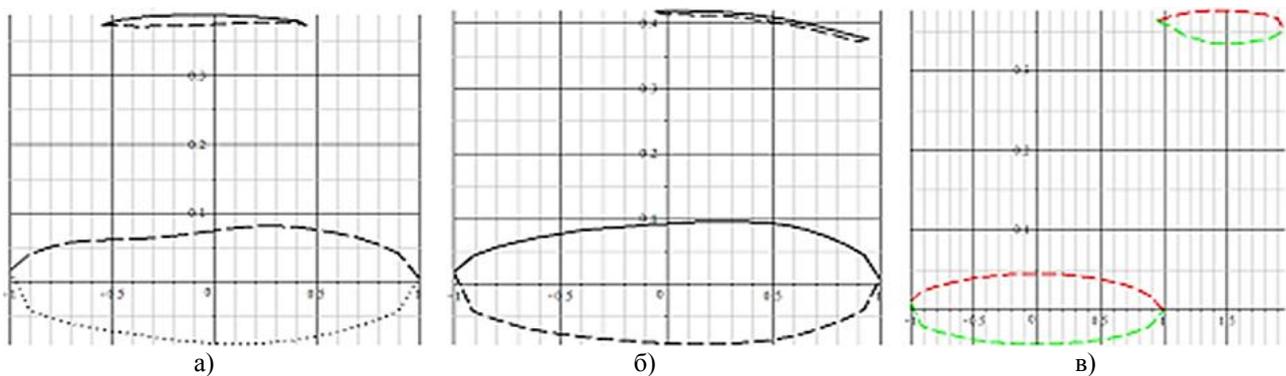


Рис. 6. Две взаимодействующие трещины при различном взаимном расположении верхний и нижний берег трещин в сечении $y = 0$

Выводы. Представленные результаты показывают важность учета неоднородности среды при моделировании гидроразрыва ввиду заметного влияния участка неоднородного напряжения на дальнейший рост трещины, а также на ее раскрытие. Представленный метод граничных элементов дает возможность сократить вычислительные затраты численных методов на решение задач взаимодействия трещин в трехмерном пространстве, а из результатов расчетов видно, что приближение трещины гидроразрыва способствует раскрытию неактивных трещин перед ее фронтом и практически не влияет на трещины, находящиеся в ее «тени».

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ и 18-07-00513.

Литература

1. Smirnov N. N., Kisselev A. B., Nikitin V. F., Smirnova M. N., Tyurenkova V. V. Underground Hydraulic Fracturing Technology Computer Simulations // Proc. The IACGE International Symposium on Geotechnical and Earthquake Engineering (IACGE-2016). Beijing, China. October 11–13. 2016. P. 194–202.
2. Пестов Д. А., Смирнов Н. Н., Акулич А. В., Тюренкова В. В. Математическое моделирование задачи распространения трещины гидроразрыва // Вестник кибернетики. 2017. № 1. С. 74–83.
3. Бетелин В. Б., Смирнов Н. Н. О проблеме импортнезависимости в нефтегазовой отрасли. Вычислительное моделирование активных воздействий на нефтяные пласты // Математика и информационные технологии в нефтегазовом комплексе : избранные труды 2-й (7-й) Междунар. конф., посвящ. дню рождения акад. П. Л. Чебышева. Сургут, 2017. С. 6–43.

4. Wu K., Olson J. E., 2015. Simultaneous Multifracture Treatments: Fully Coupled Fluid Flow and Fracture Mechanics for Horizontal Wells // Soc. Pet. Eng. Vol. 20, № 02. P. 337–346. URL: <http://dx.doi.org/10.2118/167626-PA>. (дата обращения: 20.12.2018).
5. Xu G., Wong S.-W., 2013. Interaction of Multiple Non-Planar Hydraulic Fractures in Horizontal Wells // International Petroleum Technology Conference, 26–28 March, Beijing, China. URL: <https://doi.org/10.2523/IPTC-17043-MS> (дата обращения: 20.12.2018).
6. Акулич А. В., Звягин А. В., Пестов Д. А., Тюренкова В. В., Жуй Ли Кай. Взаимодействие статической трещины гидроразрыва, находящейся под постоянным давлением жидкости, с природным разломом // *Мат. моделирование*. 2018. Т. 30. № 7. С. 79–92.
7. Weng X., Kresse O., Chuprakov D., Cohen C.-E., Prioul R., Ganguly U. Applying Complex Fracture Model and Integrated Workflow in Unconventional Reservoirs // *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Vol. 124. 2014. P. 468–483. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920410514003039>. (дата обращения: 20.12.2018).
8. Roussel N. P., Sharma M. M., 2011. Optimizing Fracture Spacing and Sequencing in Horizontal-Well Fracturing // Soc. Pet. Eng. Vol. 26, № 02. P. 173–184.
9. Алексидзе М. А. Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. М. : Наука, 1978. 352 с.
10. Shou K. J. A high order three-dimensional displacement discontinuity method with application to bonded half-space problems : dis. ... Ph.D.: University of Minnesota. Minneapolis, 1993. 212 p.
11. Shou K. J., Siebrits E., Crouch S. L. A high order displacement discontinuity method for three-dimensional elastostatic problems // *Int J Rock Mech Min Sci*. 1997. № 34 (2). P. 317–322.
12. Wu K. Numerical Modeling of Complex Hydraulic Fracture Development in Unconventional Reservoirs : dis. ... Ph.D. University of Texas at Austin. Austin, 2014. 224 p.
13. Звягин А. В., Смирнов Н. Н., Панфилов Д. И., Шамина А. А. Метод граничных элементов для численного решения трехмерных задач механики трещин // *Вестник кибернетики*. 2018. № 2. С. 20–31.