

АНИЗОТРОПНОЕ РАССЕИВАНИЕ СВЕТА

М. Г. Аветисян, Д. Р. Мухутдинова

*Сургутский государственный университет
avetisjan56@gmail.com, mdr_kvm@mail.ru*

В работе рассмотрена модель диффузного отражения частицы от анизотропной среды. Автором решен вопрос о нахождении вероятности отражения частицы от среды. Дана математическая постановка этой задачи, приведены математические решения нахождения вероятности отражения частицы от неоднородной среды. Математическое описание обозначенных задач позволяет решить более сложные задачи случайных блужданий в непрерывной анизотропной среде. Также в работе рассмотрен случай чистого рассеяния и получены соответствующие формулы.

Ключевые слова: анизотропное рассеяние, случайное блуждание, вероятность.

ANISOTROPIC SCATTERING OF LIGHT

M. G. Avetisyan, D. R. Mukhutdinova

*Surgut State University
avetisjan56@gmail.com, mdr_kvm@mail.ru*

The article considers the model of particle diffuse reflection from the anisotropic medium. The author resolved an issue of finding a particle reflection probability from the medium. Mathematical simulation of this task is given, mathematical solutions of finding a particle reflection probability from the nonuniform medium are provided. The mathematical description of the designated tasks allows solving more complex problems of random walks in the continuous anisotropic medium. Pure scattering is also considered and the corresponding formulas are obtained.

Keywords: anisotropic scattering, random walk, probability.

Введение. В теории переноса излучения широко применяются вероятностные методы исследования. К ним относятся вероятностный метод Соболева [1], вероятностная трактовка операторов отражения и пропускания, применяемая в сочетании с принципом инвариантности Амбарцумяна [2–4].

В указанных работах эти методы использовались на физическом уровне строгости, математическая подстановка и решение таких задач представляет не только чисто математический интерес, но и может способствовать адекватному математическому описанию более сложных задач теории переноса (например, задач переноса в случайно неоднородных средах). С другой стороны, эти задачи соответствуют малоизученному классу задач теории вероятности, а именно: случайному блужданию в непрерывных средах. Этой теме посвящены работы [5–7], в которых рассмотрен один класс задач в одномерной изотропной среде.

Пространство траекторий

Пусть в одномерную среду $[0, \infty)$ со стороны границы $\{0\}$ входит квант, который после многократного рассеяния либо выходит из среды, либо остается там. Рассеяние происходит по следующему закону: квант проходит путь $(0, c)$ с вероятностью e^{-c} . Поглощенный квант излучается с вероятностью λ , а с вероятностью q двигается в сторону границы $\{0\}$, с вероятностью $(1-q)$ двигается в обратную сторону. Если квант входит в среду $[0, \infty)$ через границу $\{0\}$, то он может выйти из среды.

Обозначим через Ω пространство всевозможных траекторий кванта, входящего в одномерную среду $[0, \infty)$ через границу $\{0\}$. Пусть Ω^1 – это множество всех траекторий, которые выходят из среды через границу $\{0\}$, а Ω^2 – это множество тех траекторий, которые заканчиваются в среде $[0, \infty)$.

Ясно, что

$$\Omega = \Omega^1 \cup \Omega^2. \quad (1.1)$$

Обозначим через $N(\omega)$, $\omega \in \Omega$ число точек поглощения в траектории ω , а через $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ точки поглощения кванта.

Положим

$$\Omega_N^i = \{\omega / \omega \in \Omega^i, N(\omega) = N\}, i = 1, 2, \quad (1.2)$$

где Ω_N^i – это те траектории, которые имеют N точек поглощения.

Для каждой траектории $\omega \in \Omega_N^i$, $i = 1, 2$ можно сопоставить конечное упорядоченное множество $(x_1, x_2, \dots, x_N)$, где $x_i \in [0, \infty)$ для всех $1 \leq i \leq N$ т. е.

$$\Omega_N^i = [0, \infty)^N, i = 1, 2, \quad (1.3)$$

где $[0, \infty)^N$ – это N -мерное декартово произведение пространств $[0, \infty)$.

Очевидно, что

$$\Omega^i = \bigcup_{N \geq 0} \Omega_N^i, i = 1, 2, \quad (1.4)$$

где $\Omega_0^i = \emptyset$, $i = 1, 2$.

Из представления (1.3) следует, что в каждом пространстве Ω_N^i , $i = 1, 2$, $N \geq 0$ определена N -мерная мера Лебега $\mu_N(d\omega)$ на борелевской σ -алгебре R_N .

Тогда из представлений (1.1) и (1.4) следует, что на пространствах Ω^i , $i = 1, 2$ и Ω можно ввести соответствующие меры $\mu(d\omega)$ и $m(d\omega)$ на σ -алгебрах:

$$R^i = \bigcup_{N \geq 0} R_N^i \quad (1.5)$$

и

$$R = R^1 \cup R^2, \quad (1.6)$$

Теперь каждой траектории $\omega \in \Omega$ сопоставим некоторое вещественное число $l(\omega)$, где $l(\omega)$ – длина траектории ω и вычисляется по формуле:

$$l(\omega) = \begin{cases} l^1(\omega) = \sum_{i=1}^N |x_i - x_{i-1}| + x_N, & \text{при } \omega \in \Omega^1 \\ l^2(\omega) = \sum_{i=1}^N |x_i - x_{i-1}|, & \text{при } \omega \in \Omega^2 \\ 0, & \text{при } N(\omega) = 0 \end{cases}, \quad (1.7)$$

где, $N = N(\omega)$, $x_0 = 0$, а $x_i \in [0, \infty)$, $i = 1, 2, \dots, N$ – точки поглощения в траектории $\omega \in \Omega$. Легко видеть, что функция $l(\omega)$, определенная на пространстве Ω , измерима относительно σ -алгебры R .

Распределение вероятностей на пространстве траекторий. Введем распределение вероятностей на пространстве (Ω, R) , плотность которого относительно меры $m(d\omega)$ задается формулой:

$$p_{\lambda, q}(\omega) = \begin{cases} q^{N^-(\omega)}(1-q)^{N(\omega)-N^-(\omega)} \lambda^{N(\omega)} e^{-l^1(\omega)}, & \text{при } \omega \in \Omega^1 \\ q^{N^-(\omega)-1}(1-q)^{N(\omega)-N^-(\omega)} \lambda^{N(\omega)-1} (1-\lambda) e^{-l^2(\omega)}, & \text{при } \omega \in \Omega^2, \\ 0, & \text{при } N(\omega) = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

где $\lambda, q \in (0, 1)$.

Для каждой траектории $\omega \in \Omega_N^i$, $i = 1, 2$: $N(\omega)$, $\omega \in \Omega$ – число точек поглощения в траектории ω , а $N^-(\omega)$, $\omega \in \Omega$ – число отрицательных разниц $x_{i+1} - x_i$, где $N^-(\omega) \in (0, N)$.

Пусть λ – вероятность, с которой поглощенный квант возрождается.

С вероятностью q квант после поглощения двигается в сторону границы $\{0\}$, а с вероятностью $(1-q)$ квант двигается в обратную сторону.

Покажем корректность такого введения распределения вероятностей на измеримом пространстве (Ω, R) . Для этого в [8] доказана следующая теорема:

Теорема 1. При $\forall \lambda, q \in (0, 1)$

$$\int_{\Omega} p_{\lambda, q}(\omega) m(d\omega) = 1. \quad (1.9)$$

Вероятность выхода кванта из среды

Теорема 2. При $\lambda \in (0, 1]$ имеет место следующая формула:

$$P_{\lambda, q}(\Omega^1) = \frac{(2-\lambda) - \sqrt{\lambda^2(1-2q)^2 - 4\lambda + 4}}{2\lambda(1-q)}. \quad (2.1)$$

Для доказательства этой теоремы сначала докажем несколько лемм.

Лемма 1. (см. [4])

$$A^1 = \{\omega \in \Omega^1, x_i \notin (0, \Delta\tau)\}, i = 1, 2, \dots, N(\omega), \Delta\tau > 0, \lambda \in [0, 1]. \quad (2.2)$$

Тогда

$$P_{\lambda, q}(A^1) = e^{-2\Delta\tau} P_{\lambda, q}(\Omega^1). \quad (2.3)$$

Доказательство. Пусть $A_N^1 = \{\omega / \omega \in \Omega^1, N(\omega) = N\}$, тогда

$$\begin{aligned} P(A^1) &= \int_{A^1} q^{N^-(\omega)}(1-q)^{N(\omega)-N^-(\omega)} \lambda^{N(\omega)} e^{-l^1(\omega)} \mu(d\omega) = \\ &= \sum_{N \geq 0} \sum_{k=1}^N \int_{A_N^1} q^k (1-q)^{N-k} \lambda^N e^{-l^1(\omega)} \mu(d\omega). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Перепишем $l^1(\omega)$ следующим образом:

$$l^1(\omega) = 2\Delta\tau + x_1 - \Delta\tau + \sum_{i=2}^{N-1} |x_i - x_{i-1}| + x_N - \Delta\tau, \quad (2.5)$$

подставим в формулу (2.4). Получим

$$P_{\lambda,q}(A^1) = e^{-2\Delta\tau} \sum_{N \geq 0} \int_{\Omega_N^1} q^{N^-(\omega)} (1-q)^{N(\omega)-N^-(\omega)} \lambda^{N(\omega)} e^{-l^1(\tilde{\omega})} \mu(d\tilde{\omega}), \quad (2.6)$$

где $l^1(\tilde{\omega}) = \sum_{i=1}^{N-1} |\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i-1}| + \tilde{x}_N$, $\tilde{x}_i = x_i - \Delta\tau$, $\tilde{x}_0 = 0$, $\tilde{\omega} \in \Omega^1$.

После замены переменных $\tilde{x}_i = x_i - \Delta\tau$ получим равенство (2.3). Так как для функции $e^{\Delta\tau}$ ряд Тейлора можно записать в виде:

$$e^{\Delta\tau} = 1 + \Delta\tau + \frac{\Delta\tau^2}{2!} + o(\Delta\tau)^2,$$

то $1 - e^{-2\Delta\tau} = 1 - (1 - 2\Delta\tau + o(\Delta\tau)^2) = 2\Delta\tau + o(\Delta\tau)$.

Тогда формулу (2.3) можно представить в виде:

$$P_{\lambda,q}(A^1) = P_{\lambda,q}(\Omega^1) + 2\Delta\tau P_{\lambda,q}(\Omega^1) + o(\Delta\tau).$$

Лемма 2.

Пусть $A^2 = \{\omega \in \Omega^1, N(\omega) = 1, x_1 \in (0, \Delta\tau)\}$.

(2.7)

Тогда

$$P_{\lambda,q}(A^2) = \lambda q \Delta\tau + o(\Delta\tau). \quad (2.8)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} P(A^2) &= \int_{A^2} q^{N^-(\omega)} (1-q)^{N(\omega)-N^-(\omega)} \lambda^{N(\omega)} e^{-l^1(\omega)} \mu(d\omega) = \\ &= \int_0^{\Delta\tau} q \lambda e^{-2x_1} dx_1 = q \lambda \left(-\frac{1}{2} e^{-2x_1} \Big|_0^{\Delta\tau} \right) = q \lambda \left(-\frac{1}{2} e^{-2\Delta\tau} + \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{\lambda q}{2} (1 - e^{-2\Delta\tau}) = \frac{\lambda q}{2} 2\Delta\tau + o(\Delta\tau)^2 = \lambda q \Delta\tau + o(\Delta\tau). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Лемма 3.

Пусть $A^3 = \{\omega \in \Omega^1, x_1 \in (0, \Delta\tau), x_i \notin (0, \Delta\tau), N(\omega) > 1\}$.

(2.10)

Тогда

$$P_{\lambda,q}(A^3) = (1-q) \lambda \Delta\tau P_{\lambda,q}(\Omega^1) + o(\Delta\tau). \quad (2.11)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} P(A^3) &= \int_{A^3} q^{N^-(\omega)} (1-q)^{N(\omega)-N^-(\omega)} \lambda^{N(\omega)} e^{-l^1(\omega)} \mu(d\omega) = \\ &= \sum_{N \geq 0} \sum_{k=1}^N \int_{A_N^3} q^k (1-q)^{N-k} \lambda^N e^{-l^1(\omega)} \mu(d\omega) + \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^{\Delta\tau} \int_{\Delta\tau}^{\infty} q(1-q)\lambda^2 e^{-(x_1+x_2-x_1+|x_3-x_2|+x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 + \\
 & + \int_0^{\Delta\tau} \int_{\Delta\tau}^{\infty} \int_{\Delta\tau}^{x_2} q^2(1-q)\lambda^3 e^{-(x_1+x_2-x_1+|x_3-x_2|+x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 + \dots
 \end{aligned}$$

Во всех этих интегралах интегрируем по первой переменной x_1 .

Используем замену переменных, описанную в лемме 1. Так как $x_1 < x_2$, то при раскрытии модуля переменная x_1 сокращается. Поэтому, интегрируя по переменной x_1 , во всех интегралах получаем $\Delta\tau$.

Из формулы (2.12) следует:

$$\begin{aligned}
 P(A^3) &= \int_{A^3} q^{N^-(\omega)} (1-q)^{N(\omega)-N^-(\omega)} e^{-I^1(\omega)} \mu(d\omega) = \\
 &= \sum_{N \geq 0} \sum_{k=1}^N \int_{A_N^3} q^k (1-q)^{N-k} \lambda^N e^{-I^1(\omega)} \mu(d\omega) = \\
 &= (1-q)\lambda\Delta\tau e^{-2\Delta\tau} \int_0^{\infty} q\lambda e^{-2x_2} dx_2 + \\
 &+ (1-q)\lambda\Delta\tau e^{-2\Delta\tau} \int_{\Delta\tau}^{\infty} \int_{x_2}^{\infty} q(1-q)\lambda^2 e^{-(x_2+|x_3-x_2|+x_3)} dx_2 dx_3 + \\
 &+ (1-q)\lambda\Delta\tau e^{-2\Delta\tau} \int_{\Delta\tau}^{\infty} \int_{\Delta\tau}^{x_2} q\lambda^2 e^{-(x_2+|x_3-x_2|+x_3)} dx_2 dx_3 + \dots
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Если из каждого слагаемого вынести за скобки $(1-q)\lambda\Delta\tau e^{-2\Delta\tau}$, то в скобках останется $P_{\lambda,q}(\Omega^1)$. Тогда

$$\begin{aligned}
 P(A^3) &= (1-q)\lambda\Delta\tau e^{-2\Delta\tau} \left[\int_0^{\infty} q\lambda e^{-2x_2} + \right. \\
 &+ \int_{\Delta\tau}^{\infty} \int_{x_2}^{\infty} (1-q)q\lambda^2 e^{-(x_2+|x_3-x_2|+x_3)} dx_2 dx_3 + \\
 &\left. + \int_{\Delta\tau}^{\infty} \int_{\Delta\tau}^{x_2} q\lambda^2 e^{-(x_2+|x_3-x_2|+x_3)} dx_2 dx_3 \right] + \dots
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Из выражения (2.14) следует, что

$$P_{\lambda,q}(A^3) = (1-q)\lambda\Delta\tau e^{-2\Delta\tau} P_{\lambda,q}(\Omega^1) = (1-q)\lambda\Delta\tau P_{\lambda,q}(\Omega^1) + o(\Delta\tau). \tag{2.15}$$

Лемма 4. Пусть $A^4 = \{\omega \in \Omega^1, x_{N(\omega)} \in (0, \Delta\tau), x_i \in (0, \Delta\tau), i \neq N(\omega)\}$. (2.16)

Тогда

$$P_{\lambda,q}(A^4) = \lambda q \Delta\tau P_{\lambda,q}(\Omega^1) + o(\Delta\tau). \tag{2.17}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 P(A^4) &= \int_{A^4} q^{N^-(\omega)} (1-q)^{N(\omega)-N^-(\omega)} \lambda^{N(\omega)} e^{-l^1(\omega)} \mu(d\omega) = \\
 &= \sum_{N \geq 0} \sum_{k=1}^N \int_{A_N^4} q^k (1-q)^{N-k} \lambda^N e^{-l^1(\omega)} \mu(d\omega) = \\
 &= \int_{\Delta\tau}^\infty \int_0^{\Delta\tau} q^2 \lambda^2 e^{-(x_1+|x_1-x_2|+x_2)} dx_1 dx_2 + \\
 &+ \int_0^\infty \int_{x_1}^\infty \int_0^{\Delta\tau} (1-q) q^2 \lambda^3 e^{-(x_1+|x_2-x_1|+|x_2-x_3|+x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 + \\
 &+ \int_0^\infty \int_0^{x_1} \int_0^{\Delta\tau} q^3 \lambda^3 e^{-(x_1+|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 + \dots
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Во всех этих интегралах интегрируем по последней переменной x_N .

Используем замену переменных, описанную в лемме 1. Так как $x_N x_{N-1}, x_N \in (0, \Delta\tau)$, то при раскрытии модуля переменная x_N сокращается. Поэтому, интегрируя по переменной x_N , во всех интегралах получаем $\Delta\tau$.

Из формулы (2.18) следует:

$$\begin{aligned}
 P(A^4) &= \int_{A^4} q^{N^-(\omega)} (1-q)^{N(\omega)-N^-(\omega)} \lambda^{N(\omega)} e^{-l^1(\omega)} \mu(d\omega) = \\
 &= \sum_{N \geq 0} \sum_{k=1}^N \int_{A_N^4} q^k (1-q)^{N-k} \lambda^N e^{-l^1(\omega)} \mu(d\omega) = \\
 &= \lambda q \Delta\tau e^{-2\Delta\tau} \int_0^\infty \lambda q e^{-2x} dx_1 + \\
 &+ \lambda q \Delta\tau e^{-2\Delta\tau} \int_0^\infty \int_{x_1}^\infty (1-q) q \lambda^2 e^{-(x_1+|x_2-x_1|+x_2)} dx_1 dx_2 + \\
 &+ \lambda q \Delta\tau e^{-2\Delta\tau} \int_0^\infty \int_0^{x_1} q^2 \lambda^2 e^{-(x_1+|x_1-x_2|+x_2)} dx_1 dx_2 + \dots
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Если из каждого слагаемого вынести за скобки $\lambda q \Delta\tau e^{-2\Delta\tau}$, то в скобках останется $P_{\lambda,q}(\Omega^1)$. Тогда

$$\begin{aligned}
 P(A^4) &= \lambda q \Delta\tau e^{-2\Delta\tau} \left[\int_0^\infty \lambda q e^{-2x_1} dx_1 + \right. \\
 &+ \int_0^\infty \int_{x_1}^\infty (1-q) q \lambda^2 e^{-(x_1+|x_2-x_1|+x_2)} dx_1 dx_2 + \\
 &\left. + \int_0^\infty \int_0^{x_1} q^2 \lambda^2 e^{-(x_1+|x_1-x_2|+x_2)} dx_1 dx_2 \right] + \dots
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Из выражения (2.20) следует:

$$P_{\lambda,q}(A^4) = \lambda q \Delta\tau e^{-2\Delta\tau} P_{\lambda,q}(\Omega^1) = \lambda q \Delta\tau P_{\lambda,q}(\Omega^1) + o(\Delta\tau). \tag{2.21}$$

Лемма 5.

Пусть $A^5 = \{\omega \in \Omega^1, x_i \neq 1, i \neq N(\omega), x_i \in (0, \Delta\tau), x_i \notin (0, \Delta\tau), i \neq j\}$. (2.22)

Тогда

$$P_{\lambda,q}(A^5) = (1-q)\lambda\Delta\tau P_{\lambda,q}^2(\Omega^1) + o(\Delta\tau). \quad (2.23)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} P(A^5) &= \int_{A^5} q^{N^-(\omega)} (1-q)^{N(\omega)-N^-(\omega)} \lambda^{N(\omega)} e^{-l^1(\omega)} \mu(d\omega) = \\ &= \sum_{N \geq 0} \sum_{k=1}^N \int_{A_N^5} q^k (1-q)^{N-k} \lambda^N e^{-l^1(\omega)} \mu(d\omega) = \\ &= \int_0^{\Delta\tau} \int_0^{\Delta\tau} \int_0^{\Delta\tau} (1-q) q^2 \lambda^3 e^{-(x_1+|x_1-x_2|+|x_3-x_2|+x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 + \\ &+ \int_0^{\Delta\tau} \int_0^{\Delta\tau} \int_0^{x_3} (1-q) q^3 \lambda^4 e^{-(x_1+|x_1-x_2|+|x_3-x_2|+|x_4-x_3|+x_4)} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 + \\ &+ \int_0^{\Delta\tau} \int_0^{\Delta\tau} \int_0^{x_3} (1-q)^2 q^2 \lambda^4 e^{-(x_1+|x_1-x_2|+|x_3-x_2|+|x_4-x_3|+x_4)} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 + \\ &+ \int_0^{x_1} \int_0^{\Delta\tau} \int_0^{\Delta\tau} (1-q) q^3 \lambda^4 e^{-(x_1+|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+|x_4-x_3|+x_4)} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 + \\ &+ \int_0^{\Delta\tau} \int_0^{x_1} \int_0^{\Delta\tau} (1-q)^2 q^2 \lambda^4 e^{-(x_1+|x_2-x_1|+|x_2-x_3|+|x_4-x_3|+x_4)} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 + \dots \end{aligned} \quad (2.24)$$

Во всех этих интегралах интегрируем по переменной x_i .

Используем замену переменных, описанную в лемме 1. Так как $x_i \in (0, \Delta\tau)$, то при раскрытии модуля переменная x_i сокращается. Поэтому, интегрируя по переменной x_i , во всех интегралах получаем $\frac{1}{2}(1-e^{-2\Delta\tau})$, т. е. :

$$\int_0^{\Delta\tau} e^{-2x_i} dx_i = \frac{1}{2}(1-e^{-2\Delta\tau}).$$

Из формулы (2.24) следует:

$$\begin{aligned} P(A^5) &= \int_{A^5} q^{N^-(\omega)} (1-q)^{N(\omega)-N^-(\omega)} \lambda^{N(\omega)} e^{-l^1(\omega)} \mu(d\omega) = \\ &= \sum_{N \geq 0} \sum_{k=1}^N \int_{A_N^5} q^k (1-q)^{N-k} \lambda^N e^{-l^1(\omega)} \mu(d\omega) = \\ &= (1-q) \frac{\lambda}{2} (1-e^{-2\Delta\tau}) e^{-2\Delta\tau} \int_0^{\Delta\tau} \lambda q e^{-2x} dx_1 \cdot \\ &\cdot \int_0^{x_3} q^2 \lambda^2 e^{-(x_3+|x_4-x_3|+x_4)} dx_3 dx_4 + \\ &+ (1-q) \frac{\lambda}{2} (1-e^{-2\Delta\tau}) e^{-2\Delta\tau} \int_0^{\Delta\tau} \lambda q e^{-2x_1} dx_1 \cdot \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \int_0^\infty \int_{x_3}^\infty (1-q)q \lambda^2 e^{-(x_3+|x_4-x_3|+x_4)} dx_3 dx_4 + \\
 & + (1-q) \frac{\lambda}{2} (1-e^{-\Delta\tau}) e^{-\Delta\tau} \int_0^\infty \int_0^{x_1} q^2 \lambda^2 e^{-(x_1+|x_1-x_2|+x_2)} dx_1 dx_2 \cdot \\
 & \cdot \int_0^\infty q \lambda e^{-2x_4} dx_4 + \\
 & + (1-q) \frac{\lambda}{2} (1-e^{-2\Delta\tau}) e^{-2\Delta\tau} \int_0^\infty \int_{x_1}^\infty q \lambda^2 e^{-(x_1+|x_2-x_1|+x_2)} dx_1 dx_2 \cdot \\
 & \cdot \int_0^\infty q \lambda e^{-2x_4} dx_4 + \dots
 \end{aligned}$$

Если из каждого слагаемого вынести за скобки $(1-q) \frac{\lambda}{2} (1-e^{-2\Delta\tau}) e^{-2\Delta\tau}$, то в скобках останется $P(\Omega^1)$. Тогда

$$\begin{aligned}
 P(A^5) &= \int_{A^5} q^{N^-(\omega)} (1-q)^{N(\omega)-N^-(\omega)} \lambda^{N(\omega)} e^{-I^1(\omega)} \mu(d\omega) = \\
 &= \sum_{N \geq 0} \sum_{k=1}^N \int_{A_N^5} q^k (1-q)^{N-k} \lambda^N e^{-I^1(\omega)} \mu(d\omega) = \\
 &= (1-q) \frac{\lambda}{2} (1-e^{-2\Delta\tau}) e^{-2\Delta\tau} \left[\int_0^\infty \lambda q e^{-2x_1} dx_1 \int_0^\infty \lambda q e^{-2x_3} dx_3 + \right. \\
 & \quad + \int_0^\infty \lambda q e^{-2x_1} dx_1 \int_0^\infty \int_0^{x_3} q^2 \lambda^2 e^{-(x_3+|x_4-x_3|+x_4)} dx_3 dx_4 + \\
 & \quad + \int_0^\infty \lambda q e^{-2x_1} dx_1 \int_0^\infty \int_0^\infty (1-q)q \lambda^2 e^{-(x_3+|x_4-x_3|+x_4)} dx_3 dx_4 + \\
 & \quad + \int_0^\infty \int_0^{x_1} q^2 \lambda^2 e^{-(x_1+|x_1-x_2|+x_2)} dx_1 dx_2 \int_0^\infty q \lambda e^{-2x_4} dx_4 + \\
 & \quad \left. + \int_0^\infty \int_{x_1}^\infty q \lambda^2 e^{-(x_1+|x_2-x_1|+x_2)} dx_1 dx_2 \int_0^\infty q \lambda e^{-2x_4} dx_4 \right] + \dots
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Используя формулу произведения рядов $\left(\sum_{i=1}^\infty a_i \right) \left(\sum_{j=1}^\infty a_j \right) = \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty a_i a_j$,

получаем формулу:

$$\begin{aligned}
 P_{\lambda, q}(A^5) &= (1-q) \frac{\lambda}{2} (1-e^{-2\Delta\tau}) e^{-2\Delta\tau} P_{\lambda, q}^2(\Omega^2) = \\
 &= (1-q) \lambda \Delta\tau P_{\lambda, q}^2(\Omega^2) + o(\Delta\tau).
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

После доказательства всех лемм докажем теорему.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что $B = \Omega^1 \setminus \bigcup_{i=1}^5 A^i$.

Тогда $B = \{\omega \in \Omega^1, \exists x_i, x_j, i \neq j, x_i, x_j \in (0, \Delta\tau)\}$ и

$$P_{\lambda, q}(B) = o(\Delta\tau), \Delta\tau \rightarrow 0. \quad (2.28)$$

Используя леммы 1–5 и то, что $\Omega^1 = A^1 + A^2 + \dots + B$, получим:

$$\begin{aligned} P_{\lambda, q}(\Omega^1) &= e^{-2\Delta\tau} P_{\lambda, q}(\Omega^1) + \lambda q \Delta\tau + (1-q) \lambda \Delta\tau P_{\lambda, q}(\Omega^1) + \\ &+ \lambda q \Delta\tau P_{\lambda, q}(\Omega^1) + (1-q) \lambda \Delta\tau P_{\lambda, q}^2(\Omega^1). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Упростим выражение (2.29):

$$\begin{aligned} P_{\lambda, q}(\Omega^1) &= (1-2\Delta\tau) P_{\lambda, q}(\Omega^1) + \lambda q \Delta\tau + (1-q) \lambda \Delta\tau P_{\lambda, q}(\Omega^1) + \\ &+ \lambda q \Delta\tau P_{\lambda, q}(\Omega^1) + (1-q) \lambda \Delta\tau P_{\lambda, q}^2(\Omega^1) = \\ &= P_{\lambda, q}(\Omega^1) - 2\Delta\tau P_{\lambda, q}(\Omega^1) + \lambda q \Delta\tau + (1-q) \lambda \Delta\tau P_{\lambda, q}(\Omega^1) + \\ &+ \lambda q \Delta\tau P_{\lambda, q}(\Omega^1) + (1-q) \lambda \Delta\tau P_{\lambda, q}^2(\Omega^1). \end{aligned}$$

В результате получим квадратичное уравнение:

$$\begin{aligned} -2P_{\lambda, q}(\Omega^1) + \lambda q + \lambda P_{\lambda, q}(\Omega^1) + (1-q) \lambda P_{\lambda, q}^2(\Omega^1) &= 0 \\ (1-q) \lambda P_{\lambda, q}^2(\Omega^1) + (\lambda-2)P_{\lambda, q}(\Omega^1) + \lambda q &= 0 \\ \lambda(1-q) P_{\lambda, q}^2(\Omega^1) - (2-\lambda)P_{\lambda, q}(\Omega^1) + \lambda q &= 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Решая это уравнение, получим:

$$P_{\lambda, q}(\Omega^1) = \frac{(2-\lambda) \pm \sqrt{\lambda^2(1-2q)^2 - 4\lambda + 4}}{2\lambda(1-q)}. \quad (2.31)$$

Учитывая, что $P_{\lambda, q} \leq 1$, мы получили решение:

$$P_{\lambda, q}(\Omega^1) = \frac{(2-\lambda) - \sqrt{\lambda^2(1-2q)^2 - 4\lambda + 4}}{2\lambda(1-q)}.$$

В случае чистого рассеяния, когда $\lambda=1$, получим, что решение нашего уравнения следующее:

$$P_{2q}(\Omega^1) = \frac{1-|1-2q|}{2(1-q)} = \begin{cases} \frac{q}{1-q}, & q < \frac{1}{2} \\ \frac{2-2q}{2(1-q)} = \frac{2(1-q)}{2(1-q)} = 1, & q > \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (2.32)$$

Литература

1. Соболев В. В. Курс теоретической астрофизики. М. : Наука, 1985. 503 с.
2. Амбарцумян В. А. Научные труды. Т. 1. Ереван : Изд-во АН Арм. ССР, 1960. 360 с.
3. Chandrasekhar S. R. Transfer. Oxford, 1950. 393 p.
4. Ширяев А. Н. Вероятность. М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. 574 с.
5. Халмош П. Теория меры. М. : Изд-во иностранной литературы, 1953. 291 с.
6. Avetisian M. G. A Mathematical model for one transfer problem // Integral Eq. Math. Phys. Vol. 1. № 1, 1992. P.146–151.
7. Иванов В. В. Перенос излучения и спектры небесных тел. М. : Наука, 1969. 472 с.
8. Аветисян М. Г. Диффузное отражение света // Вестник кибернетики. 2017. № 3 (27). С. 113–118.