ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 519.816
DOI 10.34822/1999-7604-2021-1-51-62

МЕТОД АППРОКСИМАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ФОРМИРОВАНИЯ ВЕСОВ ОБЪЕКТОВ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ВЫБОРА

В. П. Корнеенко
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова
Российской академии наук, Москва, Россия
E-mail: vkorn@ipu.ru

В статье представлен оптимизационный метод формирования количественных весов объектов (важности критериев, приоритетов альтернатив) по исходной экспертной матрице суждений в многокритериальных задачах выбора. Поскольку матрицу парных сравнений можно рассматривать как некоторое возмущение мультипликативной матрицы, то предлагаемый метод базируется на аппроксимации исходной матрицы парных сравнений мультипликативной матрицей по матричному критерию минимума расстояний между матрицами. Проведен сравнительный анализ эффективности нового метода с методом аналитической иерархии Т. Саати по критерию близости к исходной матрице суждений мультипликативных матриц, элементы которых восстановлены по найденным нормированным элементам весов объектов. На примере решения задачи формирования весов важности критериев оценена точность приближенного решения метода аналитической иерархии. Данный метод математически обоснован и в связи с простотой вычисления может быть рекомендован вместо метода анализа иерархий Т. Саати при решении прикладных многокритериальных задач.

Ключевые слова: многокритериальный выбор, нормированные веса объектов, мультипликативная матрица, матричный критерий.

APPROXIMATION MATRIX METHOD FOR WEIGHTS FORMATION OF OBJECTS IN MULTICRITERIA PROBLEMS

V. P. Korneenko
V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences,
Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
E-mail: vkorn@ipu.ru

The article presents an optimization method for the formation of quantitative weights of objects (importance of criteria, priorities of alternatives) according to the original expert judgment matrix in multicriteria selection problems. Since the pairwise comparison matrix can be considered as some perturbation of the multiplicative matrix, the proposed method is based on the approximation of the original pairwise comparison matrix by a multiplicative matrix according to the matrix criterion of minimum distances between matrices. A comparative analysis of the effectiveness of the new method with the well-known method of the analytical hierarchy of T. Saaty is carried out according to the criterion of closeness to the original judgment matrix of multiplicative matrices, the elements of which are reconstructed from the found normalized elements of the weights of objects. On the example of solving the problem for weights forming of the importance of criteria, the accuracy of the approximate solution of the analytical hierarchy method is estimated. This method is mathematically substantiated and, due to its computational simplicity, can be recommended instead of T. Saaty's hierarchy analysis method in solving applied multicriteria problems.

Keywords: multicriteria choice, normalized weights of objects, multiplicative matrix, matrix criterion.

Введение

При решении задач многокритериального выбора на множестве объектов (альтернатив, управленческих решений, вариантов), представленных в виде отношений предпочтений, возникает проблема их экспертного оценивания по количественной шкале отношений и аддитивной свертке критериев.

Для решения указанной проблемы предложены подходы и методы, базирующиеся на результирующих отношениях предпочтения для сужения множества недоминируемых альтернатив, а также на парных сравнениях объектов (решений, критериев) [1–3], которые не всегда позволяют выделить единственную альтернативу или управленческое решение без привлечения дополнительной информации.

Однако при решении прикладных задач, связанных с измерением объектов в экспертных шкалах, а также формированием локальных весов критериев, представленных в виде иерархического дерева, обычно используются экспертные методы оценки и ранжирования объектов [4]. Прямые методы экспертного оценивания весов критериев нашли применение в методике планирования посредством относительных показателей технической оценки – PATTERN (Planning Assistanse Throgh Technical Relevance Numbe), – в которой экспертам предлагается оценить по количественной шкале нормированные локальные веса критериев на каждом уровне иерархии для вычисления глобальных весов перемножением локальных весов по ветвям многоуровневого дерева критериев [5].

Другим экспертным подходом к назначению «весов» конечному набору сравниваемых объектов на основе матрицы парных сравнений является метод анализа иерархий (МАИ) (the Analytic Hierarchy Process) Т. Саати [6–7], который в настоящее время прочно вошел в теорию и практику задач многокритериального выбора.

В соответствии с МАИ экспертами формируется так называемая матрица парных сравнений (суждений) объектов $V=\left[v_{ij}\right], i,\ j=\overline{1,n},$ в шкале отношений, а затем находится правый собственный вектор $\vec{w}=\left(w_1,...,w_n\right)^T$ этой матрицы, отвечающий максимальному собственному значению. За искомый принимается вектор, элементы которого нормированы по сумме элементов правого собственного вектора.

Поскольку вычисление векторов весов объектов (критериев и альтернатив) выполняется численным (приближенным) методом, то, отдавая себе в этом отчет, Т. Саати ввел специальный числовой показатель consistency index – индекс совместимости матрицы суждений V и мультипликативной матрицы W, полученной на основе значений собственного вектора, в виде произведения Адамара [8]:

$$S.I.=\frac{1}{n^2}e^T V\circ W^T e,\ e^T=\left(1,1,...,1\right),$$

где V – исходная матрица суждений, а $W=\left[w_{ij}\right]=\left[\frac{\tilde{w}_i}{\tilde{w}_j}\right]$ – мультипликативная квадратная матрица, элементы которой определяются по нормированным элементам правого собственного вектора $\vec{w}$ матрицы суждений V.

При этом имеет место соотношение

$$w_{ij}=\frac{\tilde{w}_i}{\tilde{w}_j}=\frac{w_i/\sum_k^n w_k}{w_j/\sum_k^n w_k}=\frac{w_i}{w_j},\ i,\ j=\overline{1,n}.$$

Индекс $S.I.$ характеризует степень доверия к полученным с помощью МАИ результатам и трактуется как своеобразная мера отклонения исходной возмущенной матрицы суждений V от мультипликативной W.

В работе Т. Саати [7, с. 76] показано, что если выполнить матричное произведение Адамара, то индекс совместимости примет вид $S.I. = \frac{\lambda \max}{n}$, где $\lambda \max > 1$ – максимальное собственное число матрицы *V*. При достаточно близком приближении к единичному значению индекса матрица парных сравнений *V* «близка» к мультипликативной матрице *W*. Если же индекс согласованности превышает некоторое «пороговое» значение, то сделать вывод о близости указанных матриц нельзя, поэтому и применять МАИ в таких случаях не рекомендуется.

В. Д. Ногин утверждает, что «по значению индекса совместности можно лишь опосредованно судить о величине итоговой "модельной" ошибки: точно она никогда и никем не может быть определена. Такова специфика данного эвристического подхода» [9, с. 1262].

В статье предлагается более эффективный, чем метод анализа иерархий Т. Саати, метод аппроксимационной матрицы (МАМ) формирования оптимальных весов объектов по матричному критерию расстояния к исходной матрице суждений.

Постановка задачи аппроксимации матрицы суждений

В многокритериальных прикладных задачах механизм агрегирования обычно представлен в виде аддитивной свертки оценок объектов (альтернатив, вариантов) $a_l, l = \overline{1, n_A}$, по критериям с весами важности в виде [3]:

$$F(y, w) = \sum_{j=1}^{n} w(f_j) \times y_j^{(i)},$$

где $y_j^{(l)} = f_j(a_l)$ – оценка объекта $a_l \in A = \{a_l \mid l = \overline{1, n_A}\}$ в результирующей шкале по критерию $f_j, j = \overline{1, n}; w_j = w(f_j)$ – количественный (нормированный) вес f_j критерия.

Рассмотрим постановку формирования весов объектов по критерию близости к исходной матрице парных сравнений мультипликативной матрицы. Пусть в качестве исходных данных имеем: $V = [V_{ij}]$ – исходная экспертная матрица суждений относительной важности объектов (критериев) $f_j \in F, i, j = \overline{1, n}; W_n$ – множество мультипликативных квадратных матриц *n*-го порядка над полем действительных чисел.

За меру близости $d(V, W)$ между исходной $V = [v_{ij}]$ и мультипликативной $W = [w_{ij}]$ матрицей, где $W \in W_n$, примем квадрат евклидовой матричной l_2-нормы, равной разности этих матриц [8]:

$$d(V, W) = \|V - W\|_E^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (v_{ij} - w_{ij})^2. \quad (1)$$

Тогда математическая постановка задачи выбора мультипликативной матрицы *W*, аппроксимирующей исходную матрицу $V = [v_{ij}]$, т. е. наиболее приближающейся к исходной экспертной матрице суждений, сводится к минимизации показателя (1) в виде:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (v_{ij} - w_{ij})^2 \to \min_{W \in W_n}, \quad (2)$$

при условии мультипликативности между элементами матрицы $W = [w_{ij}]$:

$$w_{ij} = w_{ik} w_{kj}, \forall i, j, k = \overline{1, n}. \quad (3)$$

В силу условия (3) аналитически не удается получить решение исходной задачи одним из классических методов оптимизации, например методом множителей Лагранжа.

Воспользуемся свойствами мультипликативной матрицы и решим данную проблему сведением исходной задачи к эквивалентной.

Особые линейные свойства мультипликативной матрицы

Для решения исходной задачи (2)–(3) необходимо найти элементы мультипликативной $W = [w_{ij}], \forall i,\ j = \overline{1, n}.$ матрицы, обеспечивающие минимум квадратичному критерию $d(V, W)$ (1) при условии (3). Оказывается, для мультипликативной матрицы справедлива взаимосвязь между элементами столбцов матрицы и элементами правого собственного вектора. Для этого рассмотрим два утверждения.

В работе Б. Г. Миркина [10, с. 183–184] доказано, что «матрица $B = [b_{ij}], \forall i,\ j = \overline{1, n}$ является сверхтранзитивной», если существует положительный вектор $x = (x_1, ..., x_N),$ такой, что $b_{ik} = \dfrac{x_i}{x_k}$, и при этом вектор x является точкой равновесия процесса: $\overline{q}^{\,t} = \dfrac{1}{\lambda^t} B \overline{q}^{\,t}$, $t = 1, 2, ...,$ который в пределе приводит к собственному вектору $\overline{q} = \lim\limits_{t\to\infty} \overline{q}^{\,t}$. Покажем, что мультипликативная матрица обладает еще рядом свойств, которые окажутся полезными при сведении исходной, аналитически не решаемой задачи (2)–(3) в рамках классических методов оптимизации к эквивалентной.

Теорема 1 (О взаимосвязи между нормированными элементами столбцов мультипликативной матрицы и элементами правого собственного вектора).

1. Между элементами w_{ij} мультипликативной матрицы $W = [w_{ij}], \forall i,\ j = \overline{1, n}$ и любой парой компонент (w_i, w_j) правого собственного вектора $\vec{w} = (w_1, ..., w_n)^T$ справедливо биективное отображение $\dfrac{w_i}{w_j} \mapsto w_{ij}$, ставящее каждому отношению $\dfrac{w_i}{w_j}$ в однозначное соответствие элемент w_{ij} матрицы W и обратно $w_{ij} \mapsto \dfrac{w_i}{w_j}$, при этом справедливо равенство:

$$w_{ij} = \frac{w_i}{w_j}, \forall i,\ j = \overline{1, n}. \tag{4}$$

2. Нормированные элементы $\tilde{w}_{ij}$ столбцов $\vec{w}_j = (w_{1j}, ..., w_{nj})^T$, $j = \overline{1, n},$ совпадают между собой и равны нормированному правому собственному вектору, т. е.:

$$\tilde{\vec{w}}_j = \begin{pmatrix} \tilde{w}_{1j} \\ ... \\ \tilde{w}_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ ... \\ \tilde{w}_n \end{pmatrix} = \tilde{\vec{w}}, \forall j = \overline{1, n}, \tag{5}$$

где $\tilde{w}_{ij} = \dfrac{w_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} w_{ij}}$ – нормированный элемент j-го столбца $\vec{w}_j$;

$\tilde{w}_i = \dfrac{w_i}{\sum_{k=1}^{n} w_k}$ – нормированный элемент i-й строки правого собственного вектора $\vec{w}$.

3. Мультипликативная матрица имеет один базисный столбец.

Доказательство. 1. Так как по условию матрица $W=[w_{ij}]$ мультипликативная, покажем, что если для любой пары чисел из $\{w_1, ..., w_n\}$ выполняется равенство (4), то в этом случае выполняется условие мультипликативности между элементами матрицы $W=\left[\frac{w_i}{w_j}\right]$, т. е. существует взаимно однозначное отображение между элементами $w_{ij} \leftrightarrow \frac{w_i}{w_j}$.

Действительно, если $w_{ik}=\frac{w_i}{w_k}$ и $w_{kj}=\frac{w_k}{w_j}$, то имеем $w_{ik}w_{kj}=\frac{w_i}{w_k}\times\frac{w_k}{w_j}=\frac{w_i}{w_j}=w_{ij}$, т. е. для всех $i, j, k=\overline{1, n}$ выполняется условие мультипликативности.

2. Пусть для элементов вектора $\vec{w}=(w_1, ..., w_n)^T$ справедливо равенство (4). Покажем, что $\vec{w}=(w_1, ..., w_n)^T$ – правый собственный вектор матрицы $W=\left[\frac{w_i}{w_j}\right]$, $\forall i, j=\overline{1, n}$.

Убедимся, что справедливо $W\vec{w}=\lambda\vec{w}$:

$$W\vec{w}=\begin{pmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \dots & w_2/w_n \\ \dots & \dots\dots & & \dots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & w_n/w_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} nw_1 \\ nw_2 \\ \dots \\ nw_m \end{pmatrix}=n\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_m \end{pmatrix}=n\vec{w},$$

откуда $\lambda \max = n$ – максимальное собственное число.

Для произвольных столбцов $\vec{w}_k$ и $\vec{w}_q (1\le k, q\le n)$ матрицы W, элементы которой удовлетворяют условию мультипликативности w_{ij} (3), выполним нормировку элементов.

Так как $w_{iq}=w_{ik}v_{kq}$, то $w_{ik}=w_{iq}/w_{kq}$, откуда имеем для любых номеров столбцов k, q:

$$\tilde{w}_{ik}=\frac{w_{ik}}{\sum_{i=1}^{n} w_{ik}}=\frac{w_{iq}/w_{kq}}{\sum_{i=1}^{n} w_{ik}}=\frac{w_{iq}}{\sum_{i=1}^{n} w_{ik}w_{kq}}=\frac{w_{iq}}{\sum_{i=1}^{n} w_{iq}}=\tilde{w}_{iq}, \forall i=\overline{1, n},$$

т. е. нормированные компоненты столбцов матрицы совпадают между собой. С другой стороны, $w_{iq}=\frac{w_{iq}}{\sum_{i=1}^{n} w_{iq}}=\frac{w_i/w_q}{\sum_{i=1}^{n} w_i/w_q}=\frac{w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}=\tilde{w}_i, \forall i=\overline{1, n}.$

Таким образом, нормированные компоненты столбцов матрицы равны также и нормированным элементам правого вектора мультипликативной матрицы.

3. Так как матрица $W=\left[\frac{w_i}{w_j}\right]$ с помощью линейных преобразований приводится к виду

$$\begin{pmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \dots & w_2/w_n \\ \dots & \dots\dots & & \dots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & w_n/w_n \end{pmatrix}\sim\prod_{k=1}^{n} w_k\begin{pmatrix} 1/w_1 & 1/w_2 & \dots & 1/w_n \\ 1/w_1 & 1/w_2 & \dots & 1/w_n \\ \dots & \dots\dots & & \dots \\ 1/w_1 & 1/w_2 & \dots & 1/w_n \end{pmatrix}\sim\prod_{k=1}^{n} w_k\begin{pmatrix} 1/w_1 & 1/w_2 & \dots & 1/w_n \\ 0 & 0\dots & & 0 \\ \dots & \dots\dots & & \dots \\ 0 & 0\dots & & 0 \end{pmatrix},$$

то ранг мультипликативной матрицы равен единице: $\mathrm{rg}W = 1$, т. е. мультипликативная матрица имеет один базисный столбец (базисную строку). Теорема доказана.

Теорема 2 (О приведении элементов столбцов матрицы к целочисленным значениям и равенству правому собственному вектору). *Пусть элементы* $q_{ik}, i, k = \overline{1, n}$ *мультипликативной матрицы* $W = [q_{ik}], \forall i, k = \overline{1, n}$ *в общем случае представлены целыми и рациональными числами в виде неправильных дробей.*

Тогда, если элементы q_{ik} *любого столбца* $\vec{q}_k, k = \overline{1, n},$ *матрицы умножить на наименьшее общее кратное* n_k *знаменателей рациональных элементов столбца, то полученные в результате этой процедуры целочисленные элементы* $z_{ik} = n_k q_{ik}, \forall k = \overline{1, n},$ *столбцов матрицы совпадут между собой по любому номеру строки и будут равны целочисленным элементам* w_i *правого собственного вектора* $\vec{w} = (w_1, ..., w_n)T,$ *соответствующего собственному максимальному числу* $\lambda_{\max} = n$*:*

$$\begin{pmatrix} z_{1k} \\ ... \\ z_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ ... \\ w_n \end{pmatrix}, 1 \le k \le n. \qquad (6)$$

Доказательство. Так как элементы любой мультипликативной обратно-симметричной матрицы в соответствии с утверждением теоремы 1 можно привести к виду (4), а именно: $q_{ik} = \dfrac{w_i}{w_k}$, где w_k – положительные целые числа – элементы правого собственного вектора, то наименьшее общее кратное натуральных чисел для знаменателей рациональных элементов такой мультипликативной матрицы будет равно $n_k = w_k, \forall k = \overline{1, n}.$

В результате чего для k-го столбца $\vec{q}_k = \left(\dfrac{w_1}{w_k}, ..., \dfrac{w_n}{w_k} \right)^T$ находим

$$n_j \vec{q}_k = n_k \times \begin{pmatrix} w_1 / n_k \\ ... \\ w_n / n_k \end{pmatrix} = w_k \times \begin{pmatrix} w_1 / n_k \\ ... \\ w_n / n_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ ... \\ w_n \end{pmatrix} = \vec{w}, \forall k = \overline{1, n},$$

т. е. убедились в справедливости (6). Очевидно, что $\vec{w}$ – правый собственный вектор матрицы W, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим мультипликативную матрицу:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1/2 & 1 & 3/2 & 5/2 \\ 1/3 & 2/3 & 1 & 5/3 \\ 1/5 & 2/5 & 3/5 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Для столбцов матрицы наименьшие общие кратные составят:

$$n_1 = w_1 = 2 \times 3 \times 5 = 30, n_2 = w_2 = 3 \times 5 = 15, n_3 = w_3 = 2 \times 5 = 10, n_4 = 2 \times 3 = 6.$$

Откуда придем к матрице:

$$\hat{W}=\begin{pmatrix}30 & 30 & 30 & 30\\ 15 & 15 & 15 & 15\\ 10 & 10 & 10 & 10\\ 6 & 6 & 6 & 6\end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что правый собственный вектор $\vec{w}=(30,15,10,6)^T$ матрицы W (7), соответствующий собственному числу λ = 4, и нормированные элементы столбцов матрицы совпадают между собой и равны элементам нормированного правого вектора матрицы:

$$\tilde{\vec{w}}=\left(\frac{30}{61},\frac{15}{61},\frac{10}{61},\frac{6}{61}\right)^T.$$

Очевидно, что исходная матрица представима также и в виде $W=\left[\dfrac{w_i}{w_j}\right]$:

$$W=\begin{pmatrix}30/30 & 30/15 & 30/10 & 30/6\\ 15/30 & 15/15 & 15/10 & 15/6\\ 10/30 & 10/15 & 10/10 & 10/6\\ 6/30 & 6/15 & 6/10 & 6/6\end{pmatrix}.$$

Сведение исходной задачи к эквивалентной

Так как в соответствии с (5) элементы i-х строк нормированных вектор-столбцов мультипликативной матрицы равны i-ой нормированной компоненте правого собственного вектора, а именно:

$$\tilde{w}_{i1}=\cdots=\tilde{w}_{ij}=\cdots=\tilde{w}_{in}=\tilde{w}_i, \tag{8}$$

где $\sum_{i=1}^{n}\tilde{w}_i=1,$ то имеем: $w_{ij}=\dfrac{w_i}{w_j}=\dfrac{w_i/\sum_{k=1}^{n}w_k}{w_j/\sum_{k=1}^{n}w_k}=\dfrac{\tilde{w}_i}{\tilde{w}_j},\ \forall i,\ j=\overline{1,n}.$

Убедимся, что условие мультипликативности (3) для нормированных элементов строк (8) матрицы выполняется: $w_{ik}w_{kj}=\dfrac{\tilde{w}_i}{\tilde{w}_k}\times\dfrac{\tilde{w}_k}{\tilde{w}_j}=\dfrac{\tilde{w}_i}{\tilde{w}_j}=w_{ij},\ \forall i,\ j,k=\overline{1,n}.$

Таким образом, нахождение элементов аппроксимирующей матрицы $W=[w_{ij}]$ задачи (2)–(3) равносильно нахождению элементов нормированного вектор-столбца:

$$\tilde{\vec{w}}=(\tilde{w}_1,...,\tilde{w}_i,...,\tilde{w}_n)^T.$$

В качестве целевого показателя задачи аппроксимации примем квадрат разности между нормированными элементами исходной и мультипликативной матрицы в виде:

$$\rho(\tilde{V},\tilde{W})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{V}_{ij}-\tilde{w}_i)^2. \tag{9}$$

Тогда математическая постановка исходной задачи сведется к нахождению нормированного правого вектор-столбца аппроксимирующей матрицы и обеспечивающего минимум критерия (9):

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{v}_{ij}-\tilde{w}_i)^2 \to \min_{(\tilde{w}_1,\dots,\tilde{w}_n)}, \tag{10}$$

где $\tilde{v}_{ij}=\dfrac{v_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}v_{ij}}$ – нормированные элементы матрицы $V=[v_{ij}]$ суждений $j=\overline{1,n}$.

Обоснованность перехода от исходной возмущенной матрицы $V=[v_{ij}]$ к нормированной $\tilde{V}=[\tilde{V}_{ij}]$ базируется на том, что для исходной и нормированной матрицы сохраняются ранг и величина отношения между элементами одного и того же вектор-столбца.

Теорема 3 (Об оптимальном решении). *Оптимальным решением задачи* (10) *является нормированный вектор* $\tilde{\tilde{w}}_*=\begin{pmatrix}\tilde{w}_1^*\\ \dots\\ \tilde{w}_n^*\end{pmatrix}$, *компоненты которого принимаются за коэффициенты важности критериев* $\tilde{w}_i^*=\tilde{w}(f_i)$ *и вычисляются по формуле:*

$$\tilde{w}_i^*=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{v}_{ij},\ \forall i=\overline{1,n},$$

доставляя при этом минимум показателю (9). Элементы оптимальной аппроксимирующей матрицы $W_*=\left[w_{ij}^*\right]$ *определяются по формуле:* $w_{ij}^*=\dfrac{\tilde{w}_i^*}{\tilde{w}_j^*}$.

За оценку приближения аппроксимационной матрицы к исходной матрице суждений примем евклидову матричную норму:

$$d(V,W_*)=\|V-W_*\|_E=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(v_{ij}-w_{ij}^*\right)^2}. \tag{11}$$

Доказательство тривиально и базируется на необходимых и достаточных условиях существования оптимального решения функции многих переменных.

Алгоритм формирования оптимальных весов критериев

Шаг 1. Нормирование элементов исходной матрицы парных сравнений важности критериев по сумме элементов $\sum_{i=1}^{n}v_{ij}$ столбцов исходной матрицы суждений:

$\tilde{v}_{ij}=\dfrac{v_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}v_{ij}}$ – нормированные элементы матрицы суждений $V=\left[v_{ij}\right]$.

Шаг 2. Вычисление для каждой строки нормированной матрицы $\tilde{V}=\left[\tilde{v}_{ij}\right]$ суждений среднего значения, принимаемого за нормированные веса критериев, а именно:

$$\tilde{w}_i^*=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{v}_{ij},\ \text{где}\ \tilde{w}_i^*=\tilde{w}(f_i)\ \forall i=\overline{1,n}.$$

Шаг 3. Восстановление элементов мультипликативной матрицы по оптимальным нормированным весам критериев: $W_{\text{МАМ}} = \left(\dfrac{\tilde{w}_i^*}{\tilde{w}_j^*} \right)$.

Шаг 4. Оценка близости между элементами исходной матрицы парных сравнений и оптимальной мультипликативной матрицей по формуле $d\left(V, W_*\right)$ (11).

Сравнение эффективности предлагаемого метода с методом анализа иерархии Т. Саати

Сравним погрешность вычисления весов важности объектов (критериев, альтернатив) методом Т. Саати с оптимизационным методом аппроксимационной матрицы формирования весов объектов в многокритериальных задачах. В качестве мультипликативных матриц рассмотрим квадратные матрицы $\mathrm{W}_{\text{МАИ}} = \left(\dfrac{\tilde{w}_i}{\tilde{w}_j} \right)_{i,\, j=\overline{1,n}.}$ и $W_{\text{МАМ}} = \left(\dfrac{\tilde{w}_i^*}{\tilde{w}_j^*} \right)_{i,\, j=\overline{1,n}.}$, в которых элементы определяются по вектору приоритетов, найденных по методу анализа иерархий и методу аппроксимационной матрицы.

Для этого воспользуемся данными из примера покупки дома семьей со средними доходами, приведенными в работе Т. Саати [7, с. 41–44]. Проблема заключается в выборе дома из трех имеющихся альтернатив {A, B, C} по восьми факторам, выступающим в качестве критериев задачи многокритериального выбора.

В табл. 1 приведены экспертные оценки парного сравнения важности критериев, а также вектор приоритетов, рассчитанный по максимальному собственному числу в соответствии с методом анализа иерархий Т. Саати ($\lambda_{\max} = 8{,}811,$ индекс совместимости $S.I. = \dfrac{8{,}811}{8} \approx 1{,}101$).

Таблица 1

Исходная матрица *V* суждений и вектор приоритетов по МАИ

Фактор (критерии)	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	**Вектор приоритетов,** $\vec{w}_{\text{МАИ}}$
Размер, f_1	1	5	3	7	6	6	1/3	1/4	0,175
Транспорт, f_2	1/5	1	1/3	5	3	3	1/5	1/7	0,062
Окружение, f_3	1/3	3	1	6	3	4	1/2	1/5	0,103
Возраст, f_4	1/7	1/5	1/6	1	1/3	1/4	1/7	1/8	0,019
Двор, f_5	1/6	1/3	1/3	3	1	1/2	1/5	1/6	0,034
Удобства, f_6	1/6	1/3	1/4	4	2	1	1/5	1/6	0,041
Состояние, f_7	3	5	2	7	5	5	1	1/2	0,221
Финансы, f_8	4	7	5	8	6	6	2	1	0,348

Примечание: составлено по [7, с. 42].

Нормированные элементы матрицы суждений и найденный по этим данным вектор весов важности критериев по методу аппроксимационной матрицы (МАМ) представлены в табл. 2.

Таблица 2

Нормированная матрица $\tilde{V} = \dfrac{v_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} v_{ij}}$ суждений и вектор приоритетов по МАМ

Фактор (критерии)	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	$\vec{w}_{\text{МАМ}}$
Размер, f_1	0,11	0,23	0,25	0,17	0,23	0,23	0,07	0,10	0,174
Транспорт, f_2	0,02	0,05	0,03	0,12	0,11	0,12	0,04	0,06	0,068
Окружение, f_3	0,04	0,14	0,08	0,15	0,11	0,16	0,11	0,08	0,108

Окончание табл. 2

Фактор (критерии)	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	$\vec{w}_{МАМ}$
Возраст, f_4	0,02	0,01	0,01	0,02	0,01	0,01	0,03	0,05	0,021
Двор, f_5	0,02	0,02	0,03	0,07	0,04	0,02	0,04	0,07	0,038
Удобства, f_6	0,02	0,02	0,02	0,10	0,08	0,04	0,04	0,07	0,047
Состояние, f_7	0,33	0,23	0,17	0,17	0,19	0,19	0,22	0,20	0,212
Финансы, f_8	0,44	0,32	0,41	0,20	0,23	0,23	0,44	0,39	0,333

Примечание: авторская разработка.

Для оценки точности восстановим мультипликативные матрицы парных отношений по векторам приоритетов:

$$\vec{w}_{МАИ} = (0{,}175;\ 0{,}062;\ 0{,}103;\ 0{,}019;\ 0{,}034;\ 0{,}041;\ 0{,}221;\ 0{,}348), \quad (12)$$

$$\vec{w}_{МАМ} = (0{,}174;\ 0{,}068;\ 0{,}108;\ 0{,}021;\ 0{,}038;\ 0{,}047;\ 0{,}212;\ 0{,}333), \quad (13)$$

полученных по методу вычисления собственного вектора и методу аппроксимации матрицы попарных сравнений по критерию минимума расстояния, и сравним результаты.

В табл. 3–4 представлены мультипликативные матрицы $W_{МАИ}$, $W_{МАМ}$, сформированные из нормированных весов векторов приоритетов $\vec{w}_{МАИ}$ (12) и $\vec{w}_{МАМ}$ (13).

Таблица 3

Мультипликативная матрица $W_{МАИ}$, сформированная из нормированных весов вектора приоритетов $\vec{w}_{МАИ}$

Фактор	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
Размер, f_1	1,00	2,82	1,70	9,21	5,15	4,27	0,79	0,50
Транспорт, f_2	0,35	1,00	0,60	3,26	1,82	1,51	0,28	0,18
Окружение, f_3	0,59	1,66	1,00	5,42	3,03	2,51	0,47	0,30
Возраст, f_4	0,11	0,31	0,18	1,00	0,56	0,46	0,09	0,05
Двор, $f5$	0,19	0,55	0,33	1,79	1,00	0,83	0,15	0,10
Удобства, f_6	0,23	0,66	0,40	2,16	1,21	1,00	0,19	0,12
Состояние, f_7	1,26	3,56	2,15	11,63	6,50	5,39	1,00	0,64
Финансы, f_8	1,99	5,61	3,38	18,32	10,24	8,49	1,57	1,00

Примечание: авторская разработка.

Таблица 4

Мультипликативная матрица $W_{МАИ}$, сформированная из нормированных весов вектора приоритетов $\vec{w}_{МАИ}$

Фактор	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
Размер, f_1	1,00	2,54	1,62	8,37	4,63	3,70	0,82	0,52
Транспорт, f_2	0,39	1,00	0,64	3,30	1,83	1,46	0,32	0,21
Окружение, f_3	0,62	1,57	1,00	5,17	2,86	2,29	0,51	0,32
Возраст, f_4	0,12	0,30	0,19	1,00	0,55	0,44	0,10	0,06
Двор, $f5$	0,22	0,55	0,35	1,81	1,00	0,80	0,18	0,11
Удобства, f_6	0,27	0,69	0,44	2,26	1,25	1,00	0,22	0,14
Состояние, f_7	1,22	3,10	1,98	10,21	5,65	4,52	1,00	0,64
Финансы, f_8	1,91	4,86	3,10	16,02	8,86	7,08	1,57	1,00

Примечание: авторская разработка.

Находим значения нормы разности между исходными матрицами и мультипликативными матрицами отношений, сформированных из значений вектора приоритетов (важности объектов):

$$d_{\text{МАИ}} = \|V - W_{\text{МАИ}}\| = \sqrt{200,66} \approx 14,2;\ d_{\text{МАМ}} = \|V - W_{\text{МАМ}}\| = \sqrt{139,61} \approx 11,8.$$

Определим точность решения $d_{\text{МАИ}}$ по методу Т. Саати по отношению к оптимальному $d_{\text{МАМ}}$, полученному в рамках оптимизационной задачи по критерию (11).

По формуле ε-приближения находим, что

$$\varepsilon = \frac{|d_{\text{МАИ}} - d_{\text{МАМ}}|}{d_{\text{МАМ}}} \times 100\ \% = \frac{14,2 - 11,8}{11,8} \times 100\ \% \approx 20,3\ \%.$$

Сравнение методов по точности получения весов объектов для исходной возмущенной матрицы 8-го порядка представлено на рисунке.

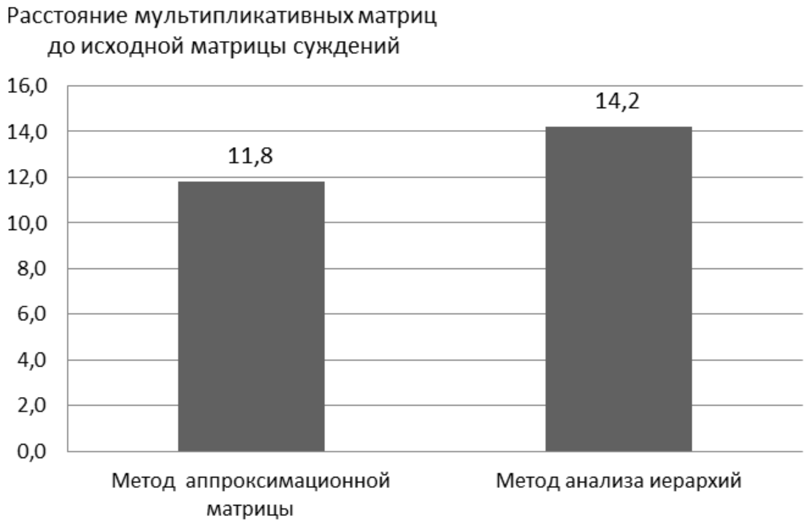

Рисунок. Сравнение методов по точности получения весов объектов
Примечание: составлено автором.

Отсюда следует, что оценка погрешности равна 20,3 % и решение по МАИ, отличающееся от оптимального на эту величину, не может считаться удовлетворительным.

Таким образом, метод нахождения приоритетов важности критериев и объектов по собственному правому вектору матрицы парных сравнений Т. Саати следует отнести не к точным, как декларирует автор МАИ, а к приближенным.

Заключение

В работе исследована проблема формирования количественных весов объектов по матрице парных сравнений в шкале отношений. Поскольку в методе анализа иерархий Т. Саати весовой вектор определяется с помощью полиномов, то задача нахождения корней полиномов степени $n \geq 5$ неразрешима в радикалах (доказано Э. Галуа в 30-х гг. XIX в.).

Поэтому в методе Т. Саати для числа объектов не менее 5 процедура нахождения собственных значений матрицы степеней превосходства важности критериев или предпочтений альтернатив осуществляется с применением численных методов нахождения корней полинома, реализованных в пакете Expert Choice [11].

С другой стороны, из-за обратной симметричности элементов матрицы суждений $V = [v_{ij}],\ i, j = \overline{1, n},$ получаемых последовательным сравнением всех пар объектов, эксперту приходится отвечать на $\frac{n(n-1)}{2}$ вопросов о величинах v_{ij}.

В связи с этим метод Т. Саати оправдан только для небольшого числа критериев и объектов.

На конкретном примере показано, что метод аналитической иерархии является приближенным, при этом оценена его погрешность относительно оптимального решения, полученного методом аппроксимационной матрицы формирования весов объектов в многокритериальных задачах.

Учитывая математическое обоснование, а также простоту вычислений формирования весов объектов, представленный метод может быть рекомендован вместо метода Т. Саати при решении прикладных задач.

Литература

1. Ашихмин И. В., Ройзензон Г. В. Выбор лучшего объекта на основе парных сравнений на подмножествах критериев // Методы поддержки принятия решений : сб. тр. Ин-та систем. анализа Рос. акад. наук / под ред. О. И. Ларичева. М. : Эдиториал УРСС. 2001. С. 51–71.
2. Ногин В. Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. 176 с.
3. Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys multiple criteria decision analysis: state of the art surveys / Ed. by Figueira J., Greco S., Ehrgott M. Springer, 2005. 1048 p.
4. Корнеенко В. П. Оптимизационный метод выбора результирующего ранжирования объектов, представленных в ранговой шкале измерения // Управление большими системами. Вып. 82. 2019. С. 44–60.
5. Sigford S. V., Parvin R. H. Project PATTERN a Methodology for Delernining Relevance in Complex Decision-Making // IEEE Trans. 1965. Vol. 12, No. 1. P. 9–13.
6. Saaty T. L. Axiomatic Foundation of the Analytic Hierarchy Process // Management Science. 1986. Vol. 32, Iss. 7. P. 841–855.
7. Саати Т. Принятие решений при зависимостях и обратных связей: аналитические сети. М. : Изд-во ЛКИ, 2008. 360 с.
8. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М. : Мир, 1989. 655 с.
9. Ногин В. Д. Упрощенный вариант метода анализа иерархий на основе нелинейной свертки критериев // Журн. вычислит. математики и матем. физики. 2004. Т. 44, № 7. С. 1259–1268.
10. Миркин Б. Г. Проблема группового выбора. М. : Наука, 1974. 256 с.
11. Expert Choice. URL: https://www.expertchoice.com/2021 (дата обращения: 05.02.2021).