УДК 004.8:519.87

МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОВЛИЯНИЯ ИНДИВИДУУМОВ В ГРУППАХ

А. В. Ганичева[1], А. В. Ганичев[2]
[1] Тверская государственная сельскохозяйственная академия, TGAN55@yandex.ru
[2] Тверской государственный технический университет, alexej.ganichev@yandex.ru

Актуальность исследования обусловлена сложностью и важностью проблемы учета динамического взаимовлияния индивидуумов в группах (учебных, производственных коллективах, социальных сетях). В процессе совместной деятельности представители различных групп взаимодействуют и оказывают влияние друг на друга (управленческое, психологическое, поведенческое, коммуникационное и т. д.). Результатом взаимовлияния является переход индивидуумов из одной группы в другую. Такие переходы изменяют количественный состав групп. Сила взаимного влияния индивидуумов зависит от количественного состава группы, коэффициентов и времени влияния. Аналогичная по сложности проблема возникает при исследовании групп интеллектуальных агентов в многоагентных системах. В статье разработана математическая модель изменения численного состава групп на основе системы дифференциальных уравнений. Получено решение данной системы в общем виде и для важных частных случаев. Для иллюстрации полученных теоретических результатов приведены конкретные числовые примеры. Для наглядности решения приведенных примеров построены графики в MS Excel. Материалы статьи представляют практическую ценность, так как могут найти применение не только в социально-экономической сфере, но и в многочисленных приложениях систем искусственного интеллекта.

Ключевые слова: группа, коэффициенты влияния, система дифференциальных уравнений, характеристическое уравнение, общее решение, частное решение.

MODEL OF DYNAMIC INTERACTION OF INDIVIDUALS IN GROUPS

A. V. Ganicheva[1], A. V. Ganichev[2]
[1] Tver State Agricultural Academy, TGAN55@yandex.ru
[2] Tver State Technical University, alexej.ganichev@yandex.ru

The relevance of the research is caused by the complexity and importance of tracking problem of the dynamic interaction of individuals in groups (study groups, work collectives, social networks). In the course of joint activity, representatives of various groups interact and relate to each other (managerial, psychological, behavioral, communicative, etc.) The result of mutual influence is the transition of individuals from one group to another. These transitions change the quantitative structure of groups. Force of mutual influence of individuals depends on the quantitative structure of group, coefficients and time of influence. The similar complexity problem arises at the research of groups of intelligent agents in agent-based systems. The article describes the development of the mathematical model of numerical structure change in groups based on the differential equations system. The general and partial (special cases) solutions for this system are obtained. Actual numerical examples are given for an illustration of the received theoretical results. The solution to these examples is demonstrated in MS Excel. Results of the article can be useful not only in the social and economic sphere but also in numerous applications of artificial intelligence technologies.

Keywords: groups, influence coefficients, differential equation system, characteristic equation, general solution, partial solution.

Достаточно часто возникают такие ситуации, когда индивидуумов, осуществляющих совместную деятельность в рамках коллектива, можно разделить на группы по определенным признакам классификации. Представители групп оказывают влияние друг на друга, в результате чего происходит переход индивидуумов в другие группы. Примером образования подобных групп является классификация: обучаемых – по успеваемости [1], респондентов – по типу личности [2– 4], рабочих – по квалификации. Для описания такого процесса строятся модели динамического влияния на основе систем дифференциальных уравнений. Примерами подобных математических моделей являются динамические модели информационного управления в социальных сетях [5], взаимодействия в социальных системах [6]. Аналогичная проблема взаимодействия агентов существует в многоагентных системах [7–10]. В современных работах, посвященных данной проблеме, недостаточное внимание уделяется вопросам аналитического решения систем дифференциальных уравнений моделей (используется имитационное моделирование).

Настоящая статья посвящена разработке динамической модели учета взаимного влияния индивидуумов в социально-экономических системах или интеллектуальных агентов в многоагентных системах. Для достижения данной цели решены следующие задачи:

1. Разработана новая модель динамики взаимовлияния индивидуумов в группах.
2. Получено аналитическое решение системы дифференциальных уравнений модели.
3. Для построенной модели изучена зависимость решения от входных данных.

Пусть имеется N индивидуумов (респондентов, агентов), которые делятся на 2 группы с численностью x, y и могут переходить из группы в группу (один раз на интервале наблюдения). Введем в рассмотрение коэффициенты влияния α_{12} – представителей первой группы на представителей второй, α_{21} – представителей второй группы на первую. Смысл коэффициентов влияния будет раскрыт позже. Каждая группа своим влиянием вынуждает респондентов другой группы обрести такой же тип, как и у нее. Успех влияния зависит от величины коэффициентов влияния, от начальной и меняющейся со временем численностей представителей каждой из групп.

Изменение численности двух групп можно описать системой дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x\alpha_{21} + (N-x)\alpha_{12}, \\ \dfrac{dy}{dt} = (N-x)\alpha_{21} - y\alpha_{12} \end{cases}$$

или:

$$\begin{cases} x' = -x(\alpha_{12}+\alpha_{21}) + N\alpha_{12}, \\ y' = -y(\alpha_{12}+\alpha_{21}) + N\alpha_{21}. \end{cases}$$

Пусть $x \le N\alpha_{12}/(\alpha_{12}+\alpha_{21})$ и $y \le N\alpha_{21}/(\alpha_{12}+\alpha_{21})$.

Тогда

$$\begin{cases} x = \dfrac{N\alpha_{12} - e^{-(\alpha_{12}+\alpha_{21})(t+c_1)}}{-(\alpha_{12}+\alpha_{21})}, \\ y = \dfrac{N\alpha_{21} - e^{-(\alpha_{12}+\alpha_{21})(t+c_2)}}{-(\alpha_{12}+\alpha_{21})}. \end{cases}$$

При этом

$$c_1 = \frac{\ln(N\alpha_{12} - (\alpha_{12}+\alpha_{21})x(0)}{-(\alpha_{12}+\alpha_{21})}, \ c_2 = \frac{\ln(N\alpha_{21} - (\alpha_{12}+\alpha_{21})y(0)}{-(\alpha_{12}+\alpha_{21})}.$$

Аналогично рассматриваются случаи, когда $x > N\alpha_{12}/(\alpha_{12}+\alpha_{21})$ и $y \le N\alpha_{21}/(\alpha_{12}+\alpha_{21})$, $x \le N\alpha_{12}/(\alpha_{12}+\alpha_{21})$ и $y > N\alpha_{21}/(\alpha_{12}+\alpha_{21})$, $x > N\alpha_{12}/(\alpha_{12}+\alpha_{21})$ и $y > N\alpha_{21}/(\alpha_{12}+\alpha_{21})$.

Остановимся на смысле коэффициентов влияния. Воспользуемся основным тождеством:

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = -\frac{x(t) - r(t)}{x(t)\Delta t} x(t) + \frac{(x(t+\Delta t) - r(t))}{(N - x(t))\Delta t}(N - x(t)).$$

Здесь $r(t)$ – количество индивидуумов первой группы, сохранивших свой тип за время Δt, $\frac{x(t)-r(t)}{x(t)}$ – доля индивидуумов первой группы, которые за время Δt перешли во вторую группу, $\frac{x(t+\Delta t)-r(t)}{N-x(t)}$ – доля индивидуумов второй группы, которые за время Δt перешли в первую группу.

Из определения производной и свойства предела следует, что с точностью до бесконечно малой $o(\Delta t)$:

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = -x(t)\cdot\alpha_{21} + (N-x(t))\cdot\alpha_{12}.$$

Отсюда с учетом приведенного тождества имеем:

$$\alpha_{21} = -\frac{x(t+\Delta t)-r(t)}{x(t)\Delta t},\ \alpha_{12} = \frac{x(t+\Delta t)-r(t)}{(N-x(t))\Delta t}.$$

Следовательно, α_{21} характеризует долю индивидуумов первой группы, перешедших за единицу времени во вторую группу, α_{12} характеризует долю индивидуумов второй группы, перешедших за единицу времени в первую группу.

Рассмотрим теперь модель взаимодействия индивидуумов в трех группах. Пусть имеется всего N индивидуумов, которые образуют 3 группы с численностью x, y, z и могут переходить из группы в группу (один раз на интервале наблюдения). Обозначим α_{12}, α_{13} – коэффициенты влияния представителей группы первого типа на представителей второго и третьего типов соответственно; α_{21}, α_{23} – коэффициенты влияния респондентов второго типа на респондентов первого и третьего типов соответственно; α_{31}, α_{32} – коэффициенты влияния представителей третьего типа на представителей первого и второго типов соответственно. Успех влияния зависит от величины коэффициентов влияния, от начальной и меняющейся со временем численности представителей каждой из групп.

Изменение численного состава групп описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x(\alpha_{21}+\alpha_{31}) + y\alpha_{12} + (N-x-y)\alpha_{13}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x\alpha_{21} - y(\alpha_{12}+\alpha_{32}) + (N-x-y)\alpha_{23} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x' = -x(\alpha_{21}+\alpha_{31}+\alpha_{13}) + y(\alpha_{12}-\alpha_{13}) + N\alpha_{13}, \\ y' = x(\alpha_{21}-\alpha_{23}) - y(\alpha_{12}+\alpha_{32}+\alpha_{23}) + N\alpha_{23}. \end{cases} \tag{1}$$

При этом все $\alpha_{ij} > 0$.

Сначала решаем однородную систему без постоянных слагаемых. Корни характеристического уравнения: $\lambda_{1,2} = \frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \gamma}$,

где $\beta = \alpha_{21}+\alpha_{31}+\alpha_{13}+\alpha_{12}+\alpha_{32}+\alpha_{23}$;

$\gamma = \alpha_{21}\alpha_{32} + \alpha_{21}\alpha_{23} + \alpha_{31}\alpha_{12} + \alpha_{31}\alpha_{32} + \alpha_{31}\alpha_{23} + \alpha_{13}\alpha_{12} + \alpha_{13}\alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{23} + \alpha_{13}\alpha_{23}$.

Рассмотрим случай, когда $\frac{\beta^2}{4} - \gamma > 0$.

Собственные векторы: $(\delta_1, 1)$ и $(\delta_2, 1)$, где $\delta_1 = \dfrac{\alpha_{13}+\lambda_1-2\alpha_{12}-\alpha_{32}-\alpha_{23}}{\alpha_{31}+\alpha_{13}+\alpha_{23}-\lambda_1}$, $\delta_2 = \dfrac{\alpha_{13}+\lambda_2-2\alpha_{12}-\alpha_{32}-\alpha_{23}}{\alpha_{31}+\alpha_{13}+\alpha_{23}-\lambda_2}$.

Общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} x = c_1\delta_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2\delta_2 e^{-\lambda_2 t}, \\ y = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}. \end{cases}$$

Общее решение системы (1):

$$\begin{cases} x = c_1\delta_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2\delta_2 e^{-\lambda_2 t} - \dfrac{N\alpha_{23}}{\nu}(2\alpha_{21}-\alpha_{13}-\alpha_{32}+\alpha_{23}), \\ y = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t} - \dfrac{N\alpha_{23}}{\nu}(2\alpha_{21}+\alpha_{31}+\alpha_{13}-\alpha_{23}). \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $\nu = -\alpha_{13}\alpha_{21}-\alpha_{23}\alpha_{21}-4\alpha_{21}\alpha_{23}-\alpha_{31}\alpha_{12}-\alpha_{31}\alpha_{32}-\alpha_{31}\alpha_{23}-\alpha_{13}\alpha_{12}-\alpha_{13}\alpha_{32}+\alpha_{23}\alpha_{12}$.

Третье слагаемое в (2) соответствует частным решениям. При этом

$$z = N - c_1 e^{-\lambda_1 t}\left(1+\delta_1\right) - c_2 e^{-\lambda_2 t}\left(1+\delta_2\right) + \frac{N\alpha_{23}}{\nu}(4\alpha_{21}+\alpha_{31}-+\alpha_{32}).$$

Пусть теперь $\dfrac{\beta^2}{4}-\gamma<0.$ В этом случае $\lambda_{1,2} = \dfrac{\beta}{2} \pm i\cdot\sqrt{\gamma-\dfrac{\beta^2}{4}}.$

Собственные векторы будут иметь вид: $(\nu_1+i\nu_2,1)$ и $(\omega_1+i\omega_2,1)$, где $\nu_1, \nu_2, \omega_1, \omega_2$ получаются, соответственно, из δ_1 и δ_2 для комплексных λ_1 и λ_2. Во избежание громоздкости в явном виде эти выражения выписывать не будем. Положим $\sqrt{\gamma-\dfrac{\beta^2}{4}} = u.$ Общее решение системы (1) для рассматриваемого случая запишется в виде:

$$\begin{cases} x = e^{\frac{\beta}{2}t}\left[\cos u(c_1\nu_1 + c_1 i\nu_2 + c_2\omega_1 + c_2 i\omega_2) + \sin u(c_1 i\nu_1 - c_1\nu_2 - c_2 i\omega_1 + c_2\omega_2)\right] + y_{ч_1}, \\ y = e^{\frac{\beta}{2}t}\left[\cos u(c_1+c_2) - i\sin u(c_1 + c_2 i\omega_1 + c_2\omega_2)\right] + y_{ч_2}, \end{cases}$$

где $y_{ч_1}$ и $y_{ч_2}$ – частные решения, получаемые из (2).

Наконец, для третьего случая, когда $\gamma-\dfrac{\beta^2}{4}=0,$ общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} x = \delta_1 e^{-\lambda t}(c_1+c_2 t) + y_{ч_1}, \\ y = e^{-\lambda t}(c_1+c_2 t) + y_{ч_2}, \\ z = N - x - y. \end{cases}$$

Рассмотрим важные частные случаи разработанной математической модели.

Пусть в системе (1) все α_{ij} равны между собой и равны α. В этом случае (1) имеет вид:

$$\begin{cases} x' = -3\alpha x + N\alpha, \\ y' = -3\alpha y + N\alpha. \end{cases} \tag{3}$$

Пусть выполняются соотношения $x \le N/3$ и $y \le N/3$, тогда решение системы (3) имеет вид:

$$\begin{cases} x = \dfrac{N\alpha - e^{-3\alpha(t+c_1)}}{3\alpha}, \\ y = \dfrac{N\alpha - e^{-3\alpha(t+c_2)}}{3\alpha}. \end{cases}$$

Отсюда $z = \dfrac{N\alpha + e^{-3\alpha(t+c_1)} + e^{-3\alpha(t+c_2)}}{3\alpha}$.

При этом $c_1 = \dfrac{\ln(-3\alpha x(0) + N\alpha)}{-3\alpha}$, $c_2 = \dfrac{\ln(-3\alpha y(0) + N\alpha)}{-3\alpha}$.

Для пояснения полученного решения рассмотрим следующий пример. Исследуется взаимное влияние студентов трех групп классификации (например: легкообучаемые, среднеобучаемые и тяжелообучаемые). В результате совместного изучения учебного предмета продолжительностью 36 академических часов ($t \in \overline{0,36}$) численность исходных групп изменяется. Пусть общее число студентов N = 40, начальная численность групп: $x(0)$ = 12, $y(0)$ = 10, $z(0)$ = 18. Коэффициент взаимного влияния $\alpha = 0,005$.

Графики зависимостей численностей групп x, y, z от времени t показаны на рис. 1.

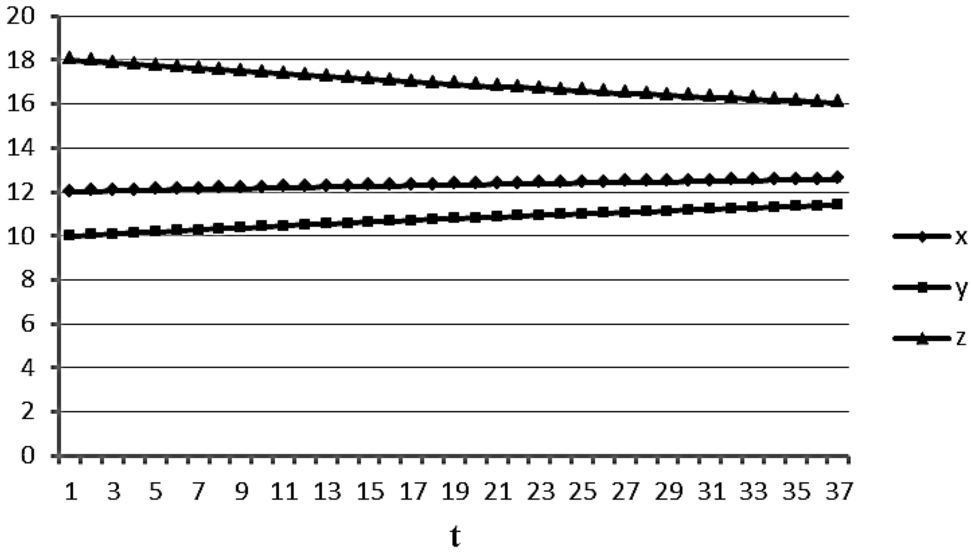

Рис. 1. Зависимости численностей групп от времени ($x \le N/3$, $y \le N/3$ **)**

Случаи $x > N/3$ и $y \le N/3$; $x \le N/3$ и $y > N/3$; $x > N/3$ и $y > N/3$ показаны соответственно на рисунках 2–4. Расчеты и построение графиков выполнялись в MS Excel.

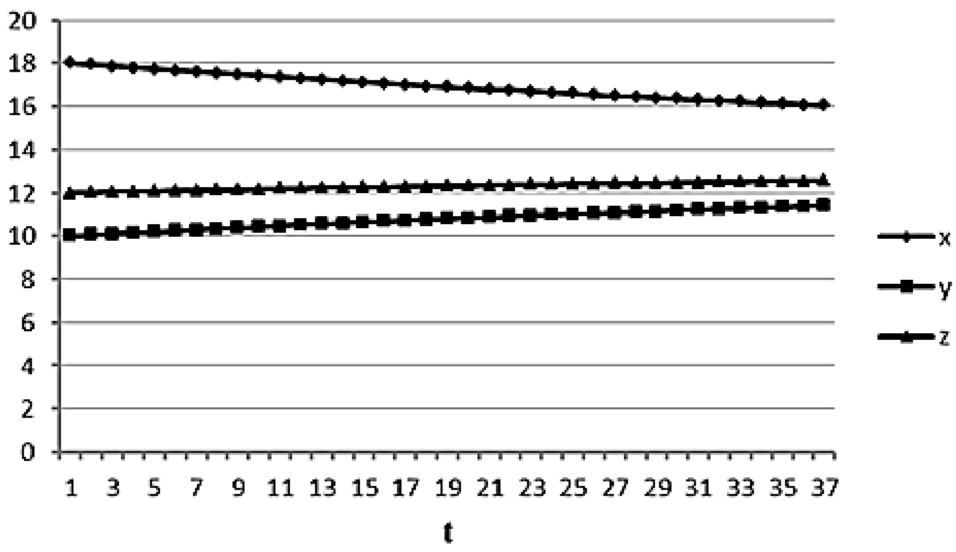

Рис. 2. Зависимости численностей групп от времени ($x > N/3$, $y \le N/3$ **)**

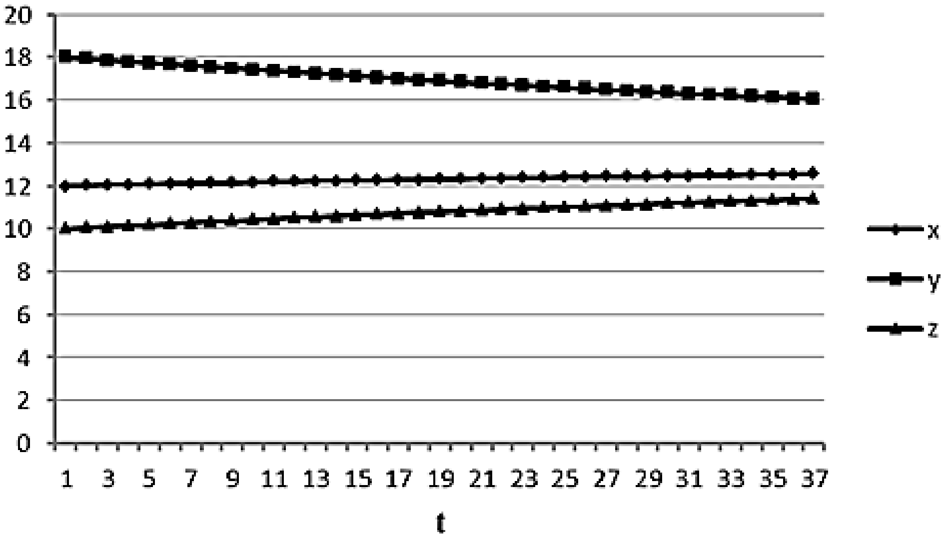

Рис. 3. Зависимости численностей групп от времени ($x \le N/3,\ y > N/3$)

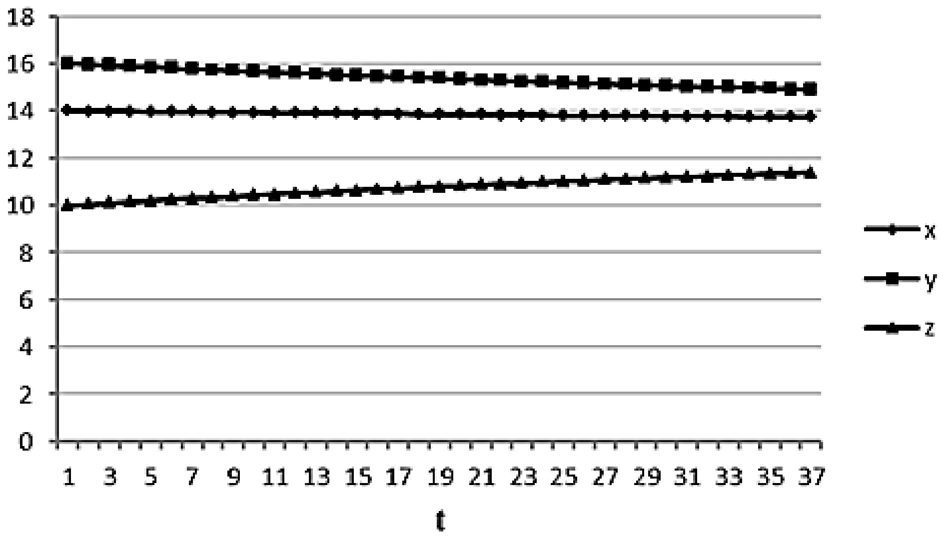

Рис. 4. Зависимости численностей групп от времени ($x \le N/3,\ y > N/3$)

Если нет ограничений общей численности, но при этом все α_{ij} равны между собой и равны α, то имеем систему:

$$\begin{cases} x' = -2\alpha x + \alpha y + \alpha z, \\ y' = \alpha x - 2\alpha y + \alpha z, \\ z' = \alpha x + \alpha y - 2\alpha z, \end{cases}$$

характеристическое уравнение которой имеет корни: $\lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = \pm 3\alpha.$ В этом случае $y = z$ и

$$\begin{cases} x = c_1 + 4c_2 e^{3\alpha t} - 2c_3 e^{-3\alpha t}, \\ y = c_1 + c_2 e^{3\alpha t} + 2c_3 e^{-3\alpha t}. \end{cases}$$

Так, при $x(0) = 12,\ y(0) = z(0) = 18$ находим $c_1 = 20 - 2c_3,\ c_2 = c_3 - 2.$ При $c_3 = 1$ имеем: $c_1 = 18,\ c_2 = -1.$ Отсюда

$$\begin{cases} x = 18 - 4e^{3\alpha t} - 2e^{-3\alpha t}, \\ y = z = 18 - e^{3\alpha t} + e^{-3\alpha t}. \end{cases}$$

Если рассматривать две группы с численностью x и y соответственно, то имеем систему

$$\begin{cases} x' = -x\alpha_{21} + y\alpha_{12}, \\ y' = x\alpha_{21} - y\alpha_{12}. \end{cases} \tag{4}$$

Характеристическое уравнение имеет два корня: $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -\alpha_{21} - \alpha_{12}$. Общее решение системы (4) запишется в виде:

$$\begin{cases} x = c_1 \dfrac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}} - c_2 e^{-(\alpha_{21}+\alpha_{12})t}, \\ y = c_1 + c_2 e^{-(\alpha_{21}+\alpha_{12})t}. \end{cases} \tag{5}$$

Если, например, при $t = 0$, $x = 10$ и $y = 20$, то из (5) находим:

$$c_1 = \frac{30\alpha_{21}}{\alpha_{12} + \alpha_{21}},\ c_2 = \frac{20\alpha_{12} - 10\alpha_{21}}{\alpha_{12} + \alpha_{21}}.$$

Тогда

$$\begin{cases} x = \dfrac{30\alpha_{12}}{\alpha_{12} + \alpha_{21}} - \dfrac{20\alpha_{12} - 10\alpha_{21}}{\alpha_{12} + \alpha_{21}} e^{-(\alpha_{12}+\alpha_{21})t}, \\ y = \dfrac{30\alpha_{21}}{\alpha_{12} + \alpha_{21}} + \dfrac{20\alpha_{12} - 10\alpha_{21}}{\alpha_{12} + \alpha_{21}} e^{-(\alpha_{12}+\alpha_{21})t}. \end{cases}$$

Итак, рассмотрено математическое моделирование взаимодействия индивидуумов в двух и трех группах. Аналогично рассматривается эта проблема для большего количества групп.

Практическая значимость результатов заключается прежде всего в том, что разработанная динамическая модель может быть использована при исследовании социально-экономических процессов методами математического моделирования. В частности, модель может быть использована для анализа и прогнозирования изменения успеваемости обучаемых, согласования позиций при обмене мнениями на форумах в интернет-сообществах. Модель позволит более эффективно управлять поведением интеллектуальных агентов.

Литература

1. Ганичев А. В., Ганичева А. В. Классификации групп учащихся при дифференцированно-групповой форме обучения // Саморазвивающаяся среда технического университета : материалы Всерос. науч.-практ. конф.: в 3 ч. Тверь : ТвГТУ, 2017. С. 74–78.
2. Ганичева А. В. Математическое описание типологии учащихся // Мир лингвистики и коммуникации. 2014. Т. 1. № 35. С. 36–42.
3. Розанова Л. В. Математическое моделирование влияния темпераментов на динамику межличностных взаимодействий в малых группах // Мат. структуры и моделирование. 2002. №. 10. С. 162–169.
4. Ганичева А. В., Ганичев А. В. Математическая модель взаимоотношений индивидуумов // Науч. обозрение. 2018. № 3. С. 4.
5. Барабанов И. Н., Коргин Н. А., Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г. Динамические модели информационного управления в социальных сетях // Автоматика и телемеханика. 2010. № 11. С. 172–182.
6. Мачуева Д. А., Ажмухамедов И. М. Моделирование процесса информационного взаимодействия в социальных системах // Системы упр., связи и безопасности. 2018. № 2. С. 18–39.
7. Мутовкина Н. Ю., Семенов Н. А. Модель изменения типов интеллектуальных агентов в методологии системной динамики anylogic // Програм. продукты и системы. 2018. № 1. С. 145–151.

8. Стеряков А. А. Об одном универсальном методе построения моделей для сложных многоагентных систем // Компьютер. исслед. и моделирование. 2013. Т. 5. № 4. С. 513–523.

9. Пенский О. Г., Черников К. В. Основы математической теории эмоциональных роботов: монография. Пермь : Перм. гос. ун-т., 2010. 256 с.

10. Короткий В. А. Математическое моделирование процесса распространения знаний в учебной группе ВУЗА // Математическое моделирование в экономике, управлении и образовании : материалы междунар. науч.-практ. конф. Калуга : ООО «ТРП», 2017. С. 182–186.