

УДК 531.74:531.3

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТРАЖЕНИЯ И ФОКУСИРОВКИ УДАРНЫХ ВОЛН В КЛИНООБРАЗНОЙ ВСТАВКЕ В ХИМИЧЕСКИ РЕАГИРУЮЩЕЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ

Л. И. Стамов

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт
системных исследований Российской академии наук
lyubenstamov@mail.ru*

В данной работе представлены некоторые результаты трехмерного численного моделирования процессов, возникающих в химически реагирующей водородно-воздушной смеси совершенных газов после отражения и фокусировки падающей ударной волны от клинообразной вставки. В зависимости от интенсивности набегающей на вставку ударной волны выявлено несколько различных сценариев возникающих процессов и определены условия возникновения детонации. Также представлено тестирование результатов численного моделирования путем сравнения с экспериментальными данными.

Ключевые слова: вычислительное моделирование, горение, детонация, химическая кинетика, газовая динамика, параллельные вычисления.

NUMERICAL SIMULATION OF SHOCK WAVES REFLECTION AND FOCUSING INSIDE A WEDGE IN CHEMICALLY REACTING GAS MIXTURE

L. I. Stamov

*Lomonosov Moscow State University,
System Research Institute, Russian Academy of Sciences
lyubenstamov@mail.ru*

The article presents some results of three-dimensional numerical simulations of processes in chemically reacting hydrogen-air mixture of ideal gases after reflecting and focusing of a shock wave against a wedge. Depending on the intensity of the shock wave, several different scenarios of emerging processes are obtained, and the conditions for detonation onset are determined. Comparisons of numerical simulations results with experimental data are also presented.

Keywords: numerical simulation, combustion, detonation, chemical kinetics, gas dynamics, parallel computing.

Процессы горения широко распространены в современных двигательных установках. В газовых смесях существует два режима горения: дефлаграция и детонация. Если первый тип является основой для большинства существующих двигателей, то второй процесс считается разрушительным за счет существенно больших скоростей распространения пламени, более высокой температуры и давления и, как следствие, больших нагрузок на систему. В то же время данный режим термодинамически более эффективный, чем классическое «медленное» или дефлаграционное горение. Если учесть, что в настоящее время классические двигательные установки достигли предела своей эффективности, то использование детонационного режима для работы новых двигательных установок представляется весьма перспективным направлением их развития [1–3].

На текущий момент существует несколько типов детонационных двигателей. Одним из видов таких систем являются импульсные детонационные двигатели. Другой тип – это двигатели с вращающейся детонационной волной. И в том, и в другом случае важной

задачей при конструировании этих систем является моделирование нестационарных переходов между двумя режимами горения [4–13]. Использование компьютерного моделирования позволяет существенно упростить задачи разработки и оптимизации конструкции для повышения эффективности таких двигательных устройств, а также определения оптимальных режимов их работы.

В данной работе производится изучение инициирования детонации на малых расстояниях относительно слабым инициатором посредством фокусировки ударных волн и кумуляции энергии при отражении внутри клина. Теоретические исследования и результаты численного моделирования сравниваются с экспериментальными данными, полученными в ударной трубе. При проведении исследований в качестве топлива был взят водород, так как, с одной стороны, это перспективное топливо, которое при сгорании выделяет меньше вредных веществ, чем углеводород [14, 15], а с другой стороны, химическая кинетика горения водородно-воздушной смеси хорошо изучена [16–21]. Результаты такого рода работ могут быть использованы для повышения эффективности работы импульсных детонационных двигателей. Численное моделирование рассматриваемых процессов в большинстве случаев требует значительных вычислительных ресурсов. Использование параллельных вычислительных технологий и новых расчетных схем позволит сделать моделирование более точным и менее ресурсоемким [22–28].

Для моделирования процессов, протекающих в многокомпонентной горючей газовой смеси, с учетом химических реакций и явлений переноса в турбулентном режиме используется следующая система уравнений баланса массы каждого компонента, импульса и энергии [4]:

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho_k \mathbf{u} - D_{eff} \nabla \frac{\rho_k}{\rho} \right) = \dot{\omega}_k, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} - \boldsymbol{\tau}) + \nabla p = 0, \quad \boldsymbol{\tau} = -\frac{2}{3} \rho K \mathbf{I} + \mu_{eff} \left(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u} + p \mathbf{u} - \lambda_{eff} \nabla h - \mu_{eff} \nabla K - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) = 0, \quad (3)$$

где ρ_k – плотность k -го компонента;

$\rho = \sum_{k=1}^N \rho_k$ – плотность газовой смеси;

\mathbf{u} – вектор скорости;

p – давление газа (шаровая часть тензора напряжений);

$\boldsymbol{\tau}$ – дивергентная часть тензора напряжений;

K – турбулентная энергия;

$\dot{\omega}_k$ – интенсивность образования компонента k в химических реакциях;

E – полная внутренняя энергия единицы объема газа;

h – энтальпия единицы массы смеси D_{eff} ;

λ_{eff} , μ_{eff} – коэффициенты переноса.

Более подробно используемая модель описана в [33].

Для моделирования процессов турбулентности может быть использована двухпараметрическая ка-омега модель Уилкокса [29]. В этом случае вводятся два дополнительных уравнения для описания динамики дополнительных переменных K – кинетической энергии турбулентных пульсаций на единицу массы и ω – интенсивности убывания (диссипации) турбулентной энергии:

$$\frac{\partial \rho K}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho K \mathbf{u}) = \nabla \cdot ((\mu + \sigma^* \mu_T) \nabla K) + P - \beta^* K \omega, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \omega \mathbf{u}) = \nabla \cdot ((\mu + \sigma \mu_T) \nabla \omega) + \alpha \frac{\omega}{K} P - \beta \omega^2, \quad (5)$$

где μ – молекулярная вязкость газовой смеси;

μ_T – турбулентная (или вихревая) вязкость;

$P = \boldsymbol{\tau}^T : (\nabla \otimes \mathbf{u})$ – производство турбулентности;

$\boldsymbol{\tau}^T$ – турбулентная составляющая дивергенции тензора напряжений.

В расчетах использовались следующие значения параметров модели: $\sigma = \sigma^* = 0,5$, $\alpha = 5/9$, $\beta = 3/40$, $\beta^* = 0,09$.

Вычисление безразмерных термодинамических функций: теплоемкости, энтальпии и энтропии компонента – внутри некоторого температурного интервала осуществлялось с помощью аппроксимационных полиномов [14, 15] и специальной базы данных с полиномиальными коэффициентами для двух температурных интервалов [16]. Вне температурных интервалов для расчета термодинамических функций использовалась гипотеза постоянной теплоемкости. Использование данной гипотезы оправдано тем, что теплоемкость газа, как правило, достаточно слабо отклоняется от постоянного значения на сравнительно большом интервале температур.

Рассмотренный кинетический механизм собран на основе механизма Мааса и Поупа [21, 22] и содержит в себе следующие компоненты: $\{\text{H}_2\text{O}, \text{OH}, \text{H}, \text{O}, \text{HO}_2, \text{H}_2\text{O}_2, \text{O}_2, \text{H}_2, \text{N}_2\}$. Коэффициент прямой скорости каждой реакции в данном механизме аппроксимируется расширенной формулой Аррениуса. Коэффициент скорости обратной реакции вычислялся на основе коэффициента химического равновесия. Схожая кинетика использовалась в работе [30]. Однако в данном исследовании часть реакций была заменена на реакции из [31, 32], и значения некоторых констант механизма были скорректированы. Используемый механизм подробно представлен в [33]. Все реакции в нем обратимы. Если использовать лишь механизм Мааса и Поупа, то в случае, когда в эксперименте был переход горения в детонацию, ни возгорания, ни детонации не происходит. Меняя только предэкспоненциальный множитель в критической реакции размножения радикалов $\text{O}_2 + \text{H} = \text{OH} + \text{O}$, можно получить лишь прямое инициирование детонации при фокусировке ударных волн, но не горение с последующим переходом в детонацию. Поэтому часть обменных реакций размножения радикалов и реакций с получением конечного продукта, как указанная, так и три других: $\text{H}_2 + \text{OH} = \text{H}_2\text{O} + \text{H}$, $\text{OH} + \text{OH} = \text{H}_2\text{O} + \text{O}$ и $\text{HO}_2 + \text{H} = \text{H}_2 + \text{O}_2$, – были взяты из более современного механизма – диссертации Hegheş [31]. Последняя из этих реакций фактически запускает механизм накопления радикалов, когда идет в обратном направлении (ее преимущественное направление при низких температурах). Кроме того, была добавлена реакция из еще более современного механизма Hong [32]: $\text{H} + \text{O} + \text{M} = \text{OH} + \text{M}$, несколько уменьшающая количество свободных радикалов и позволяющая ускорить выход на конечный продукт. С таким гибридным механизмом и одновременно с увеличением скорости самой первой из упомянутых реакций за счет увеличения предэкспоненциального множителя удалось добиться горения за отраженной ударной волной без дальнейшего перехода к детонации в течение сравнительно долгого времени. В дальнейшем переход происходил на близком к эксперименту расстоянии от закрытого конца системы.

В работе были рассмотрены две различные численные схемы сквозного счета. Явная схема 2-го порядка точности по пространству и времени на основе MUSCL-интерполяции переменных на грань при расчете конвективных потоков [24–26]. Для выбора направления интерполяции и для интерполяции давления применялся метод AUSMP [27]. Схема

реализована на регулярной сетке из одинаковых кубиков. Алгоритм был написан на языке программирования C++. Вторая схема представляет собой явную схему 3-го порядка точности по пространству и 2-го по времени на основе схемы Курганова – Леви [28], которая использует CWENO реконструкцию переменных на гранях. Расчет также проводится на кубической сетке. Программа реализована с помощью языка Фортран. Исходный код данных схем был распараллелен с использованием технологии OpenMP.

Постановка задачи. Для проверки работоспособности разработанного численного кода путем сравнения с экспериментальными данными было проведено моделирование процессов, протекающих в измерительной секции ударной трубы. Для этого рассматривалась следующая задача. Была взята цилиндрическая труба диаметром 76 мм и длиной 720 мм (рис. 1), заполненная покоящейся стехиометрической водородно-воздушной смесью с молярными долями компонент $C_{H_2} : C_{O_2} : C_{N_2} = 2 : 1 : 3.76$, температурой T_0 и давлением P_0 . В конце трубы устанавливалась вставка с клинообразной полостью и углом при вершине $\theta = 90^\circ$. Далее задавалась прямая ударная волна, набегающая на вставку. Волна двигалась со скоростью D и параметрами вещества за фронтом T, P и V_x .

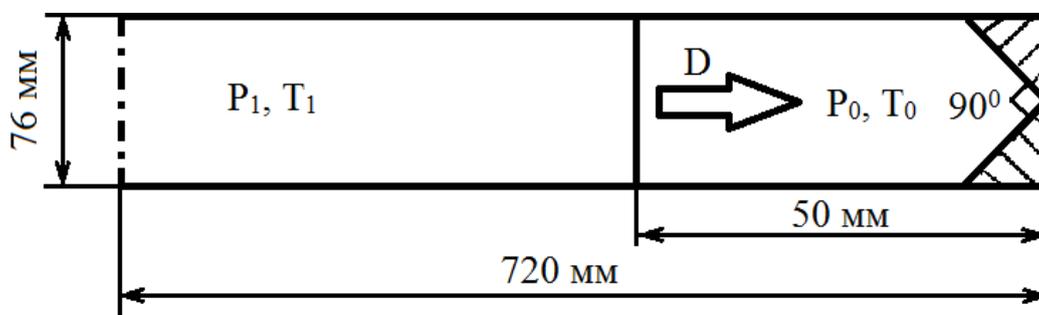


Рис. 1. Схема рассматриваемой задачи. Сечение, проведенное вдоль центра цилиндрической трубы параллельно боковой грани клинообразной вставки

В табл. 1 представлены рассмотренные значения начальных параметров, а также теоретически рассчитанные параметры детонации Чепмена – Жуге для указанных значений: температура (T_{CH}), давление (P_{CH}) за фронтом отраженной детонационной волны и скорость ее распространения (V_{CH}). Все выбранные начальные параметры соответствуют данным экспериментов. Далее рассматривались процессы, протекающие в результате отражения и фокусировки ударных волн.

Таблица 1

Начальные условия для рассмотренных случаев

№	1	2	3
T_0 , К	294	293	295
P_0 , бар	0,28	0,37	0,12
T , К	593	421	559
P , бар	1,85	1,13	0,66
v_x , м/с	672	362	617
D , м/с	969	675	915
V_{CH} , м/с	1 933	1 942	1 908
P_{CH} , бар	14,47	12,36	5,35
T_{CH} , К	2 978	2 913	2 879

Сравнение с физическим экспериментом. На рис. 2 представлена эволюция давления при отражении от внутренней поверхности клина для случая № 1 из табл. 1 и профили давления на центральной оси. Прямая 6 соответствует уровню давления за волной

детонации Чепмена – Жуге. Как видно из графиков, расчетная схема дает достаточное разрешение, выделяя пик Неймана и постепенный выход на режим Чепмена – Жуге.

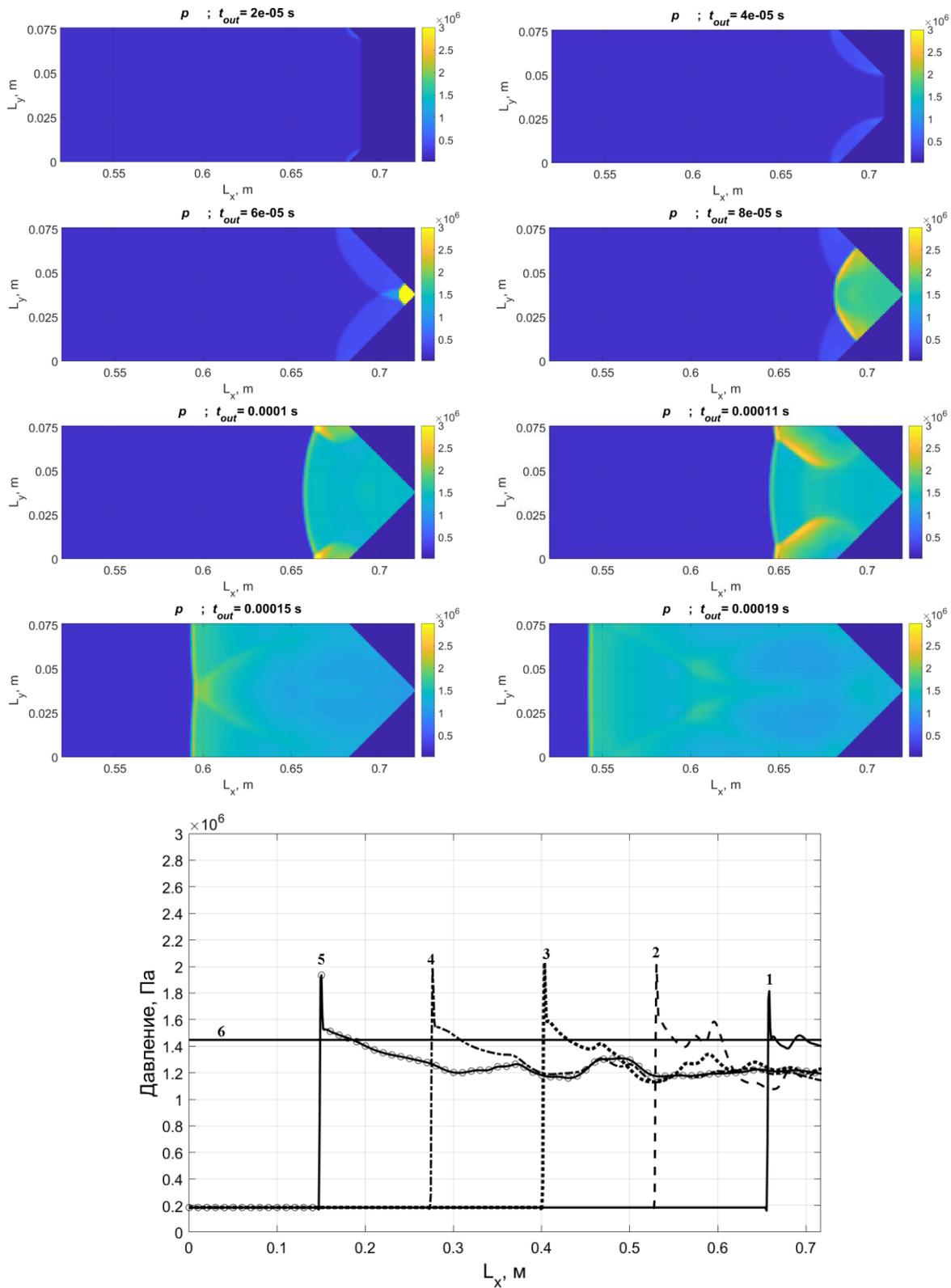


Рис. 2. Графики давления, рассчитанного на сетке в 1 мм для клинообразной вставки (случай № 1): сверху – сечение плоскостью Oxy по центру трубы в области вставки для моментов времени 100, 200, 300, 400 и 500 мкс; внизу – давление на оси Ox по центру системы для этих же моментов времени (кривые 1, 2, 3, 4 и 5 соответственно); прямая 6 – давление Чепмена – Жуге

На рис. 3 представлена схема измерительной секции ударной трубы, в которой проводились эксперименты по изучению фокусировки отраженных ударных волн. Геометрия данной измерительной секции и использовалась при проведении численного моделирования. В вычислительных экспериментах рассматривались значения газодинамических величин в точках, которые соответствуют положению изображенных на чертеже высокочастотных датчиков давления.

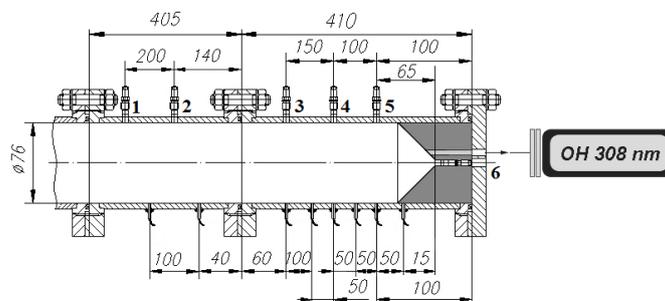


Рис. 3. Чертеж измерительной секции для экспериментов по исследованию фокусировки в водородно-воздушных смесях: цифрами 1–6 обозначены высокочастотные датчики давления: в нижней части трубы расположены ионизационные датчики. Все расстояния представлены в миллиметрах

Методика проведения экспериментов детально изложена в [34, 35]. Было рассмотрено несколько способов определения скорости детонационной волны при численном моделировании. В первом способе оценивалась разница во времени между подходом детонационной волны к крайнему правому датчику (№ 6, рис. 3), расположенному в вершине вставки, и достижением ею каждого из остальных пяти датчиков. При этом считалось, что датчики расположены на одной прямой по оси x , что уменьшало реальное расстояние между датчиками. Во втором способе, в отличие от первого, использовалось действительное расстояние между датчиками, с учетом того, что центральный датчик смещен относительно других по оси y . В третьем способе использовалась разница во времени между подходом детонационной волны к соседним датчикам, начиная с шестого датчика (т. е. между 6-м и 5-м, 5-м и 4-м и т. д.), также использовались реальные расстояния между датчиками.

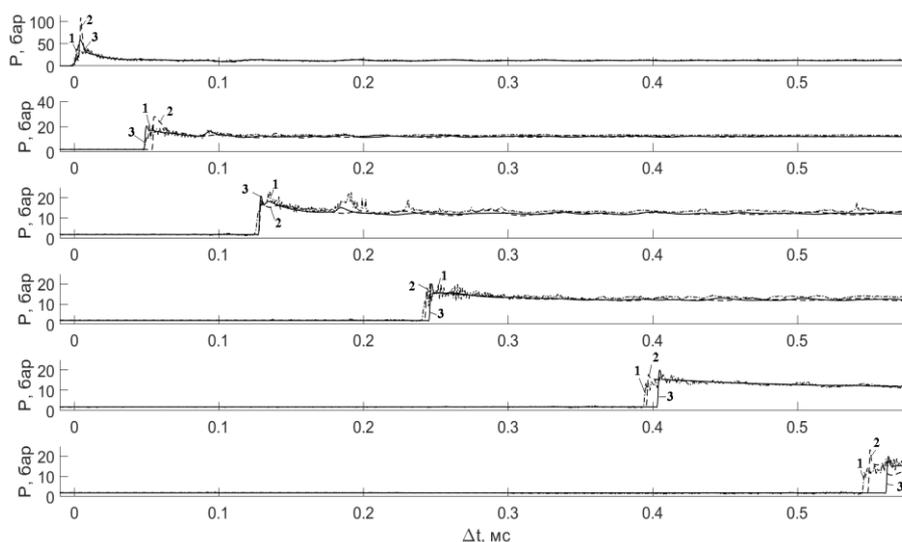


Рис. 4. На рисунке представлено давление (в барах) в контрольных точках (датчиках 1-6, нумерация снизу-вверх соответственно) в зависимости от времени (мс): экспериментальные данные (цифра 1, штрихпунктирная линия), численная схема 1 (цифра 2, штриховая линия) и численная схема 2 (цифра 3, непрерывная линия) для случая № 1

На рис. 4 представлены осциллограммы давлений, полученные из экспериментов в ударной трубе по отражению ударной волны от закрытого торца с клинообразной вставкой для всех шести датчиков, и приведены диаграммы давление-время, полученные из численных экспериментов с использованием схем 1 и 2 для случая № 1. Также для данного случая представлен (рис. 5) график сравнения скорости распространения детонационной волны для эксперимента, двух численных схем и теоретическое значение скорости детонации Чепмена – Жуге. Во второй схеме были отключены турбулентные эффекты и учет вязких сил, в связи с этим скорость волны для нее стремится к скорости Чепмена – Жуге. Результат первой схемы, учитывающей все эффекты, превосходит теоретическое значение и практически совпадает с экспериментальными данными.

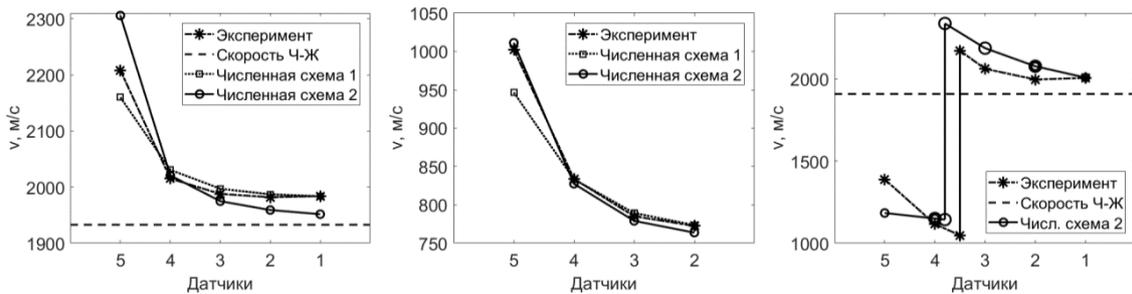


Рис. 5. Скорость распространения волны: эксперимент (штрихпунктирная с маркером-звездой); численная схема 1 (пунктирная с маркером-квадратом); численная схема 2 (непрерывная с маркером-кружком) и теоретическая скорость детонации Чепмена – Жуге (штриховая). Слева – случай № 1; по центру – случай № 2; справа – случай № 3

Для случая № 2 в численном эксперименте было получено отражение падающей ударной волны и распространения по области в обратном направлении отраженной ударной волны большей интенсивности. Данные по скорости этой волны, полученные с помощью схем № 1 и 2, практически совпадают с экспериментом (рис. 5, по центру). Для случая № 3 в численном эксперименте (схема № 2) при использовании измененного кинетического механизма [33] были получены отражение и фокусировка падающей ударной волны и воспламенение горючей смеси с образованием отстающей зоны горения. В определенный момент между датчиками № 3 и 4 произошел ПГД – переход горения в детонацию. По области к торцу трубы пошла возникшая детонационная волна, а в сторону вставки – волна ретонации. Как было отмечено ранее, использование классического механизма не дает ни горения за отраженной волной, ни детонации.

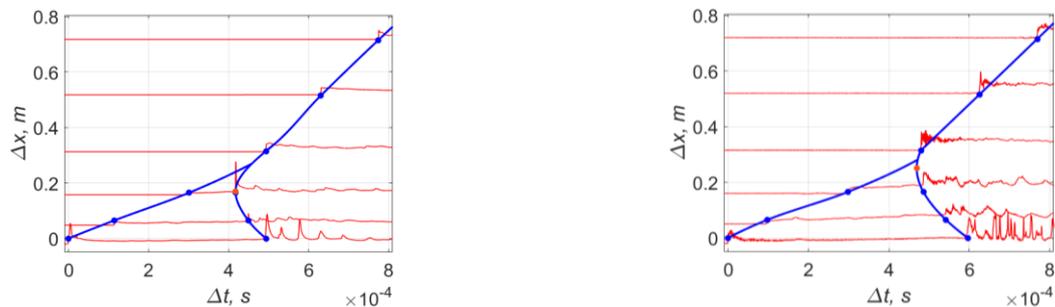


Рис. 6. Положение фронта ударной и детонационной волн (синие кривые) для случая № 3 и давление в контрольных точках (красные кривые) для результатов численного моделирования (слева) и физического эксперимента (справа)

Если рассмотреть траекторию отраженной ударной волны, которая в дальнейшем взаимодействует с детонационной волной (рис. 6), то можно заметить, что в численном

моделировании переход к детонации возникает в зоне напротив 4-го датчика. В эксперименте же переход происходит немного позже, между 3-м и 4-м датчиками. Несмотря на это, отличие в месте возникновения детонации не превосходит 10 см, и на графике сравнения скорости распространения волн для этого случая (рис. 5, правый) результаты численного моделирования довольно близки с результатами эксперимента.

Выводы. В работе было проведено вычислительное моделирование процесса инициирования детонации путем фокусировки ударной волны внутри клина. Была проведена валидация разработанной трехмерной математической модели химически реагирующей газовой смеси на примере водородно-воздушной смеси путем сравнения с данными, полученными в ходе экспериментов в ударной трубе. Эти результаты позволили внести изменения в механизм химической кинетики с целью лучшего соответствия экспериментальным данным.

В зависимости от интенсивности падающей ударной волны было выделено несколько сценариев развития процесса: отражение ударной волны, формирование детонационной волны при отражении и фокусировке, отражение ударной волны с отстающей зоной горения и промежуточные переходные режимы.

В ходе сравнения результатов вычислительного и физического экспериментов для падающих ударных волн различной интенсивности было получено, что при относительно слабых ударных волнах для случая, когда зажигание за ударной волной не происходит, разница между численными и экспериментальными данными не превышает 2 %. В то время как для падающих ударных волн высокой интенсивности, приводящих к воспламенению после отражения и фокусировки, разница скоростей составляет около 4,0 %. При переходных режимах рассматриваемое отличие становится значительным. При этом место возникновения перехода определяется с точностью нескольких процентов относительно длины всей рассматриваемой области.

Было получено, что расчетная и экспериментальная скорости отраженной волны превосходят теоретическую скорость детонации Чепмена – Жуге. Причина заключается в том, что данная скорость направлена в сторону, противоположную движению потока, а из-за наличия вязких сил и распространении детонационной волны по уже турбулизированной смеси как в эксперименте, так и в численной модели поток вблизи стенок замедляется, что способствует увеличению скорости детонационной волны и обгону волной ее центральной части. Таким образом, определенная средняя скорость детонации может быть выше, чем теоретическое значение скорости детонации Чепмена – Жуге. При отсутствии вязких сил в численной модели скорость детонации практически совпадает с теоретической.

Работа выполнена при поддержке Программы научных исследований РАН «Разработка алгоритмической компоновки и программ для расчета многомасштабных процессов и горения» АААА-А18-118041190145-1 (№ 0065-2018-0007).

Литература

1. Smirnov N. N., Nikitin V. F. Modeling and simulation of hydrogen combustion in engines // *International Journal of Hydrogen Energy*. 2014. Vol. 39, № 2. P. 1122–1136.
2. Smirnov N. N., Betelin V. B., Shagaliev R. M., Nikitin V. F., Belyakov I. M., Deryugin Yu. N., Aksenov S. V., Korchazhkin D. A. Hydrogen fuel rocket engines simulation using LOGOS code // *International Journal of Hydrogen Energy*. 2014. Vol. 39, № 20. P. 10748–10756.
3. Smirnov N. N., Betelin V. B., Nikitin V. F., Phylippov Yu. G., Koo Jaye. Detonation engine fed by acetylene–oxygen mixture // *Acta Astronautica*. 2014. Vol. 104, № 1. P. 134–146.
4. Smirnov N. N., Nikitin V. F., Alyari-Shourekhdeli Sh. Transitional regimes of wave propagation in metastable systems // *Combustion, explosion and shock waves*. 2008. Vol. 44, № 5. P. 517–528.

5. Smirnov N. N., Nikitin V. F., Phylippov Yu. G. Deflagration to detonation transition in gases in tubes with cavities // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2010. Vol. 83, № 6. P. 1287–1316.
6. Smirnov N. N., Nikitin V. F., Alyari Shurekhdeli S. Investigation of Self-Sustaining Waves in Metastable Systems: Deflagration-to-Detonation Transition // *Journal of Propulsion and Power*. 2009. Vol. 25, № 3. P. 593–608.
7. Nikitin V. F., Dushin V. R., Phylippov Y. G., Legros J. C. Pulse detonation engines: technical approaches // *Acta Astronautica*. 2009. Vol. 64, № 2–3. P. 281–287.
8. Wang Y., Wang J., Li Y., Li Y. Induction for multiple rotating detonation waves in the hydrogen-oxygen mixture with tangential flow // *International Journal of Hydrogen Energy*. 2014. Vol. 39, № 22. P. 11792–11797.
9. Heidari A., Wen J.X. Numerical simulation of flame acceleration and deflagration to detonation transition in hydrogen-air mixture // *International Journal of Hydrogen Energy*. 2014. Vol. 39, № 36. P. 21317–21327.
10. Wu D., Liu Y., Liu Y., Wang J. Numerical investigations of the restabilization of hydrogen-air rotating detonation engines // *International Journal of Hydrogen Energy*. 2014. Vol. 39, № 28. P. 15803–15809.
11. Phylippov Yu. G., Dushin V. R., Nikitin V. F., Nerchenko V. A., Korolkova N. V., Guendugov V. M. Fluid mechanics of pulse detonation thrusters // *Acta Astronautica*. 2012. Vol. 76. P. 115–126.
12. Gwak M., Lee Y., Kim K., Yoh J. J. Deformable wall effects on the detonation of combustible gas mixture in a thin-walled tube // *International Journal of Hydrogen Energy*. 2015. Vol. 40, № 7. P. 3006–3014.
13. Wang Y., Wang J. Effect of equivalence ratio on the velocity of rotating detonation // *International Journal of Hydrogen Energy*. 2015. Vol. 40, № 25. P. 7949–7955.
14. Kee R. J. et al. A software package for the analysis of gas-phase chemical and plasma kinetics // from the Chemkin Collection, release 3.6, Reaction Design, 2000. 181 p.
15. Marinov N. M., Pitz W. J., Westbrook C. K., Hori M., Matsunaga N. An Experimental and Kinetic Calculation of the Promotion Effect of Hydrocarbons on the NO-NO₂ Conversion in a Flow Reactor // *Proceedings of the Combustion Institute*. 1998. Vol. 27, № 1. P. 389–396.
16. Kee R. J., Miller J. A., Jefferson T. H. Chemkin: a general-purpose, problem-independent, transportable, Fortran chemical kinetics code package. Sandia National Laboratories Report SAND80-8003, 1980.
17. Gordon S., McBride B. J. Computer Program for Calculation of Complex Chemical Equilibrium Compositions and Applications. I. Analysis // NASA Reference Publication 1311, 1994.
18. Browne S., Ziegler J., Shepherd J. E. Numerical Solution Methods for Shock and Detonation Jump Conditions // GALCIT Report FM2006.006, 2008. 90 p.
19. Pozdnyakov Z. G., Rossi B. D. Handbook of industrial explosives and means of blasting. Moscow : Nedra, 1977. 253 p.
20. Orlova E. J. Chemistry and technology of high explosives. Ed. 3-e, Rev. L. : Chemistry, Leningrad branch, 1981. 312 p.
21. Maas U., Warnatz J. Ignition processes in hydrogen-oxygen mixtures // *Combustion and Flame*. 1988. Vol. 74, № 1. P. 53–69.
22. Maas U., Pope S. Simplifying Chemical Kinetics: Intrinsic Low-Dimensional Manifolds in Composition Space // *Combustion and Flame*. 1992. Vol. 88. P. 239–264.
23. Ferziger J. T., Peric M. Computational Methods for Fluid Dynamics. 3d Edition. Springer, 2002. 423 p.
24. Van Leer. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. A Second Order Sequel to Godunov's Method // *J. Com. Phys*. 1979. Vol. 32. P. 101–136.
25. Fletcher C. Computational methods in fluid dynamics. In 2 volumes. TRANS. eng. New York : Springer, 1991. 401 p.

26. Koren C. B. Numerical Methods for Advection – Diffusion Problems. Braunschweig : Vieweg, 1993. P. 117.
27. Liou M.-S. A Sequel to AUSM: AUSM+ // J. Comput. Phys. 1996. Vol. 129. P. 364–382.
28. Kurganov A., Levy D. A third-order semidiscrete central scheme for conservation laws and convection-diffusion equations // SIAM J. SCI. COMPUT. 2001. Vol. 22, № 4. P. 1461–1488.
29. Wilcox D. C. Turbulence modeling for CFD. DCW Industries, Inc. La Canada, California, 1993. 460 p.
30. Бетелин В. Б., Смирнов Н. Н., Никитин В. Ф., Смирнова М. Н., Стамов Л. И., Тюренкова В. В. Вычислительное моделирование задач горения гремучих газовых смесей // Вестник кибернетики. 2016. № 2. С. 26–50.
31. Hegheş C. I. C1-C4 hydrocarbon oxidation mechanism. Germany: Rupertus Carola University of Heidelberg. 2006. Dissertation for the degree of Doctor of Natural Sciences. 117 p.
32. Hong Z. An improved hydrogen/oxygen mechanism based on shock tube/laser absorption measurements. USA: Stanford University. 2010. Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy. 180 p.
33. Стамов Л. И., Тюренкова В. В. Математическое моделирование отражения и фокусировки ударных волн в конической полости в химически реагирующем газе // Математическое моделирование. 2018. Т. 30, № 3. С. 3–18.
34. Martynenko V. V., Penyaz'kov O. G., Ragotner K. A., Shabunya S. I. High-temperature ignition of hydrogen and air at high pressures downstream of the reflected shock wave // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2004. Vol. 77, № 4. P. 785–793.
35. Penyazkov O. G., Ragotner K. A., Dean A. J., Varatharajan B.. Autoignition of propane-air mixtures behind reflected shock waves // Proceedings of the Combustion Institute. 2005. Vol. 30, № 2. P. 1941–1947.