

УДК 519.816

DOI 10.34822/1999-7604-2021-3-12-22

О КОРРЕКТНОСТИ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ И СРАВНЕНИИ ЕГО ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ С МЕТОДОМ АППРОКСИМАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ

В. П. Корнеев

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова

Российской академии наук, Москва, Россия

E-mail: vkorn@ipu.ru

В статье анализируется метод анализа иерархий Т. Саати с точки зрения его корректности и эффективности, показана связь его решений с задачей векторной оптимизации, если исходные оценки альтернатив измерены в количественной шкале отношений. Обосновывается несостоятельность утверждений о некорректности метода анализа иерархий в публикациях некоторых авторов. Проведено сопоставление приближенного решения метода анализа иерархий с оптимальным решением, полученным методом аппроксимационной матрицы формирования весов объектов в многокритериальных задачах выбора.

Ключевые слова: аддитивная свертка критериев, результирующее ранжирование, однородность шкал измерения объектов, матрица парных сравнений.

ON CORRECTNESS OF THE ANALYTIC HIERARCHY PROCESS AND COMPARISON OF ITS APPROXIMATE SOLUTION WITH THE APPROXIMATION MATRIX METHOD

V. P. Korneenko

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences

of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

E-mail: vkorn@ipu.ru

The article analyzes the T. Saati analytic hierarchy process in terms of its correctness and efficiency, presents the relation of its solutions with the vector optimization problem providing that initial estimates of alternatives are measured in a quantitative ratio scale. Inconsistency of statements on incorrection of the analytic hierarchy process published by some authors is substantiated. The estimation of the approximate solution of the analytic hierarchy process with optimum solution obtained by the approximation matrix method for weights formation of objects in multicriteria selection problems is carried out.

Keywords: additive convolution of criteria, resulting ranging, homogeneity of object measurement scales, matrix of paired comparisons.

Введение

Актуальность данной работы обусловлена тем, что после публикации статьи В. В. Подиновского и О. В. Подиновской в журнале «Проблемы управления» [1] до сих пор считается доказанной «некорректность» метода анализа иерархий Т. Саати. На том основании, что на примере решения двухкритериальной задачи упорядочения вариантов в порядковой шкале по решающим правилам не совпадают с упорядочениями объектов в количественной шкале отношений, полученными по матрице парных сравнений в методе Т. Саати, авторы делают вывод: «метод анализа иерархий, предполагающий для проведения анализа многокритериальных задач принятия решений с использованием аддитивной функции ценности оценивание предпочтений в шкале отношений, несостоятелен» [1, с. 12].

Метод решения задач с заданной иерархией критериев, получивший название метод анализа иерархий (МАИ) (the analytic hierarchy process – АНП), был опубликован в 1980 г. Т. Л. Саати [2]. До сих пор это один из самых известных методов решения практических многокритериальных задач выбора на множестве объектов (альтернатив, вариантов, весов важности критериев), представленных в виде отношений предпочтений.

В основе метода лежит процедура экспертного парного сравнения предпочтений объектов в шкале отношений, в качестве которых выступает важность критериев и приоритетность альтернатив (вариантов, решений, стратегий). Задача заключается в том, чтобы на основе матрицы парных сравнений объектов, элементы которой представляются в шкале отношений, получить количественные веса критериев и приоритеты альтернатив в нормированном виде.

Метод и его приложения описаны и популяризируются во многих обзорах, монографиях, научных статьях [3–7]. Много работ посвящено разбору его методологических достоинств и недостатков [8–10]. Однако, по мнению авторов работы [1, с. 8], «не было приведено примера, который бы наглядно показал, что из-за недостатков в теоретической базе метода он может приводить к явно неверным результатам».

В данной статье показана ошибочность примера, демонстрирующего «некорректность» метода анализа иерархий в [1], а также математическая несостоятельность решения двухкритериальной задачи упорядочения вариантов в порядковой шкале, полученного по эвристическим рассуждениям решающих правил.

Приведен сравнительный анализ эффективности метода анализа иерархий Т. Саати и оптимизационного метода аппроксимационной матрицы формирования весов важности объектов в многокритериальных задачах, описанного нами ранее [11], который по вычислительной простоте и точности превосходит метод Т. Саати.

1. Основные положения метода анализа иерархий

Пусть дано множество альтернатив (вариантов) $X = \{x^k: k = \overline{1, n}\}$, которые оцениваются по критериям $f_j, j = \overline{1, m}$. Суть метода для задачи векторной оптимизации сводится к следующим шагам:

1. Формирование (локальных) коэффициентов важности критериев на каждом уровне иерархии по экспертным оценкам матрицы парных сравнений объектов.

Результаты сравнения критериев $f_j, j = \overline{1, m}$, веса $w_j = w(f_j)$ которых заранее неизвестны, представляются в виде квадратной матрицы $V = [v_{ij}], i, j = \overline{1, m}$, парных сравнений, где $v_{ij} \approx \frac{w_i}{w_j}$ – оценка относительной важности для всех пар критериев, причем $v_{ji} = \frac{1}{v_{ij}}$.

В методе анализа иерархий Т. Саати значения v_{ij} не могут быть произвольными, но должны выбираться из целочисленной «фундаментальной» шкалы $\{1, 2, \dots, 9\}$. Если один критерий f_i важнее другого f_j , то $v_{ij} > 1$, и с обратными значениями, если наоборот. В случае равноважности критериев полагается $v_{ij} = 1$. Из-за обратной симметричности элементов матрицы суждений, получаемых последовательным сравнением всех пар объектов, эксперту приходится отвечать на $\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$ вопросов о величинах v_{ij} . В методе анализа иерархий Т. Саати коэффициенты важности критериев вычисляются с помощью алгебраической процедуры [2]. Вначале находятся численные собственные числа, которые являются решением уравнения $Vz = \lambda z$, т. е. корнями характеристического многочлена m -й степени

$$\det(V - \lambda E), \lambda \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty),$$

совпадающей с числом показателей.

За вектор весов (коэффициентов) критериев принимаются нормированные элементы правого собственного вектора $z = (z_1, \dots, z_m)^T$ квадратной матрицы суждений m -го порядка, соответствующего максимальному собственному числу $\lambda_{\max}$ матрицы:

$$w_j = \tilde{z}_j = \frac{z_j}{\sum_{k=1}^m z_k}, k = \overline{1, m}. \quad (1)$$

2. Вычисление глобальных весов для конечных критериев. Осуществляется путем перемножения локальных «весов» всех вершин, лежащих на пути, ведущем к данной конечной вершине, т. е. как в методе Паттерн и теории многокритериальной полезности [12, 13].

3. Формирование количественных приоритетов (нормированных весов), выступающих в качестве оценок альтернатив (вариантов) по каждому критерию, аналогично нахождению весов критериев. Приоритеты $p_j(x^k)$ объектов по f_j критерию нормированы, т. е.

$$\sum_{k=1}^n p_j(x^k) = 1, j = \overline{1, m}.$$

4. Оценка и ранжирование объектов по обобщенным нормированным оценкам (интегральным приоритетам), вычисленным с помощью аддитивной функции:

$$F(x^k, w_1, \dots, w_m) = \sum_{j=1}^m w(f_j) \cdot p_j(x^k) \quad \forall k = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Поскольку вычисления векторов весов объектов (критериев и альтернатив) выполняются численным (приближенным) методом, отдавая себе в этом отчет, Т. Саати ввел специальный числовой показатель [14] consistency index – индекс совместимости матрицы суждений V и мультипликативной матрицы W , полученный на основе значений собственного вектора, в виде произведения Адамара [15]:

$$S.I. = \frac{1}{n^2} e^T V \circ W^T e, e^T = (1, 1, \dots, 1),$$

где V – исходная матрица суждений, а $W = [w_{ij}] = \begin{bmatrix} w_i \\ w_j \end{bmatrix}$ – мультипликативная квадратная матрица, элементы которой определяются по нормированным элементам (1) правого собственного вектора $z = (z_1, \dots, z_m)^T$ матрицы суждений V . При этом имеет место соотношение:

$$w_{ij} = \frac{\tilde{z}_i}{\tilde{z}_j} = \frac{z_i / \sum_k^n z_k}{z_j / \sum_k^n z_k} = \frac{z_i}{z_j}, i, j = \overline{1, n}.$$

Индекс $S.I.$ характеризует степень доверия к полученным с помощью МАИ результатам и трактуется как своеобразная мера отклонения исходной возмущенной матрицы суждений V от мультипликативной W . В работе Т. Саати [14, с. 76] показано, что если выполнить матричное произведение Адамара, то индекс совместимости примет вид $S.I. = \frac{\lambda_{\max}}{n} > 1$, где $\lambda_{\max}$ – максимальное собственное число матрицы V . При достаточном приближении к единичному значению индекса матрица парных сравнений V «близка» к мультипликативной матрице W . Если же индекс согласованности превышает некоторое «пороговое» значение, то сделать вывод о близости указанных матриц нельзя, поэтому и применять МАИ в таких случаях не рекомендуется.

2. Обоснование «некорректности» метода анализа иерархий

Разберем ошибочность примера [1, с. 8–10], демонстрирующего «некорректность» метода анализа иерархий [2].

В [1] рассматривается задача ранжирования по двум критериям f_1 и f_2 в порядковой шкале с вербальными интерпретациями:

e – отлично (excellent), g – хорошо (good), m – посредственно (mediocre)

четырёх вариантов $x^k, k = 1, 2, 3, 4$, с векторными оценками $y_k = (f_1(x^k), f_2(x^k))$:

$$y_1 = (e, g); y_2 = (m, e); y_3 = (g, g); y_4 = (e, m).$$

2.1. Решение задачи «некорректным» методом анализа иерархий [1]

В методе анализа иерархий варианты сравниваются согласно оценкам, полученным по аддитивной свертке для критериев с весами (2), которую для двух критериев представим в виде:

$$y_{\Sigma}^{(k)} = F(x^k, w_1, w_2) = w_1 p_1(x^k) + w_2 p_2(x^k), \quad (3)$$

где $w_1 = w(f_1)$ и $w_2 = w(f_2)$ – веса критериев; $p_1(a_k)$ и $p_2(a_k)$ – приоритеты варианта x^k , $k = 1, 2, 3, 4$ относительно критериев f_1 и f_2 соответственно.

Далее в [1, с. 9] «в соответствии с допущением МАИ об измерении предпочтений в шкале отношений, a – степень превосходства в предпочтительности шкальной оценки e над оценкой g и b – степень превосходства в предпочтительности шкальной оценки g над оценкой m .

Разумеется, $a > 1$ и $b > 1$. Степень превосходства оценки e над оценкой m равна ab ». Таким образом, в результате получены элементы парных сравнений вариантов по критериям в виде согласованных (мультипликативных) матриц, которые представлены в табл. 1.

Таблица 1

Матрицы парных сравнений по двум критериям

f_1	x^1	x^2	x^3	x^4	f_2	x^1	x^2	x^3	x^4
x^1	1	ab	a	1	x^1	1	$1/a$	1	b
x^2	$1/ab$	1	$1/b$	$1/ab$	x^2	a	1	a	ab
x^3	$1/a$	b	1	$1/a$	x^3	1	$1/a$	1	b
x^4	1	ab	a	1	x^4	$1/b$	$1/ab$	$1/b$	1

Примечание: составлено автором по [1, с. 9].

Поскольку матрицы мультипликативны, то векторы приоритетов «легко вычислить и непосредственно с учетом заданных степеней превосходства» [1, с. 9]:

$$f_1: (p_1(x^1), p_1(x^2), p_1(x^3), p_1(x^4)) = \left(\frac{ab}{2ab+b+1}, \frac{1}{2ab+b+1}, \frac{b}{2ab+b+1}, \frac{ab}{2ab+b+1} \right);$$

$$f_2: (p_2(x^1), p_2(x^2), p_2(x^3), p_2(x^4)) = \left(\frac{b}{ab+2b+1}, \frac{ab}{ab+2b+1}, \frac{b}{ab+2b+1}, \frac{1}{ab+2b+1} \right).$$

Для значений $a = 3, b = 3$ и $ab = 9$ имеем [1, с. 10]:

$$(p_1(x^1), p_1(x^2), p_1(x^3), p_1(x^4)) = \left(\frac{9}{22}, \frac{1}{22}, \frac{3}{22}, \frac{9}{22} \right);$$

$$(p_2(x^1), p_2(x^2), p_2(x^3), p_2(x^4)) = \left(\frac{3}{16}, \frac{9}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{16} \right).$$

Поскольку вектор приоритетов для равноважных критериев $(w_1, w_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$, то по формуле (3) получим следующие обобщенные оценки вариантов:

$$y_{\Sigma}^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{22} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{16} \approx 0,298, y_{\Sigma}^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{22} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{16} \approx 0,304,$$

$$y_{\Sigma}^{(3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{22} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{16} \approx 0,162, y_{\Sigma}^{(4)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{22} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} \approx 0,236,$$

в результате чего ранжирование вариантов по МАИ, с точки зрения авторов работы [1, с. 10], имеет вид:

$$x^2 > x^1 > x^4 > x^3. \quad (4)$$

Замечание 1. Если градациям порядковой вербальной шкалы поставить во взаимнооднозначное соответствие балльные градации ($e \leftrightarrow 5, g \leftrightarrow 4, m \leftrightarrow 3$) и считать количественными, а значения a и b положить равными

$$a = \frac{5}{4}, b = \frac{4}{3} \text{ и } ab = \frac{5}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{5}{3},$$

то такой переход будет корректным, в результате чего по МАИ получим:

$$(p_1(x^1), p_1(x^2), p_1(x^3), p_1(x^4)) = \left(\frac{5}{17}, \frac{3}{17}, \frac{4}{17}, \frac{5}{17}\right);$$

$$(p_2(x^1), p_2(x^2), p_2(x^3), p_2(x^4)) = \left(\frac{4}{16}, \frac{5}{16}, \frac{4}{16}, \frac{3}{16}\right).$$

Для критериев $(w_1, w_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ по формуле $y_{\Sigma}^{(k)}$ (3) получим следующие обобщенные оценки вариантов:

$$y_{\Sigma}^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{17} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{16} = \frac{148}{544} \approx 0,272, y_{\Sigma}^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{17} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{16} = \frac{133}{544} \approx 0,245, \quad (5)$$

$$y_{\Sigma}^{(3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{17} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{16} = \frac{132}{544} \approx 0,243, y_{\Sigma}^{(4)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{17} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{16} = \frac{131}{544} \approx 0,241, \quad (6)$$

в результате чего ранжирование вариантов примет вид:

$$x^1 > x^2 > x^3 > x^4. \quad (7)$$

Необходимо отметить, что в [1] представлен некорректный переход от градаций единой порядковой однородной линейной шкалы разности по двум критериям к сравнению этих градаций в неоднородных (неэквивалентных) количественных шкалах отношений [16]. При произвольных значениях a и b будем получать совершенно разные ранжирования альтернатив по аддитивной свертке (3).

2.2. Связь решений по МАИ с решением задачи векторной оптимизации

Формально постановка задачи векторной оптимизации представляется в виде:

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_j(x), \dots, f_m(x)) \rightarrow \text{extr}_{x \in X}, \quad (8)$$

где $f_1(x), \dots, f_j(x), \dots, f_m(x)$ – частные критериальные функции.

Решение задачи векторной оптимизации (8) в методе анализа иерархий сводится к аддитивной свертке $F(x^k, w_1, \dots, w_m)$ (2) [2]. Исходные оценки объектов в количественной шкале в методе анализа иерархий, как правило, не задаются, а представляются в вербальной шкале и сравниваются в отношении предпочтений. Поэтому для обоснования корректности метода к исходным оценкам в порядковой шкале применим вычисления как к оценкам, представленным в количественной шкале.

Поскольку приоритеты вариантов в методе МАИ представлены в нормированном виде, то от исходных оценок, представленных в столбцах 2 и 3 табл. 2, перейдем к нормированным и найдем обобщенные оценки вариантов по формуле $y_{\Sigma}^{(k)}$ (3).

Таблица 2

Результаты агрегирования в количественной шкале

Варианты (объекты)	Количественная шкала		Оценки в количественной нормированной шкале		
	f_1	f_2	$\tilde{f}_1$	$\tilde{f}_2$	$y_{\Sigma}^{(k)}$
x^1	5	4	5/17	4/16	148/544
x^2	3	5	3/17	5/16	133/544

Окончание табл. 2

Варианты (объекты)	Количественная шкала		Оценки в количественной нормированной шкале		
	f_1	f_2	$\tilde{f}_1$	$\tilde{f}_2$	$y_{\Sigma}^{(k)}$
x^3	4	4	4/17	4/16	132/544
x^4	5	3	5/17	3/16	131/544
Сумма	17	16	1	1	1

Примечание: авторская разработка.

Имеем оценки вариантов:

$$y_{\Sigma}^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{17} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{16} = \frac{148}{544} \approx 0,272, y_{\Sigma}^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{17} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{16} = \frac{133}{544} \approx 0,245, \quad (9)$$

$$y_{\Sigma}^{(3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{17} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{16} = \frac{132}{544} \approx 0,243, y_{\Sigma}^{(4)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{17} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{16} = \frac{131}{544} \approx 0,241. \quad (10)$$

В результате получим, что оценки (9)–(10) совпадают с оценками (5)–(6) и ранжирование по этим оценкам

$$x_1 > x_2 > x_3 > x_4 \quad (11)$$

совпадает с ранжированием (7).

Таким образом, если исходные оценки объектов представлены в количественной шкале отношений, то решение по МАИ совпадает с решением задачи векторной оптимизации (8) по аддитивной свертке критериев (2).

2.3. Решение по решающим правилам теории важности критериев [17]

По решающим правилам получаем: если «учесть симметрию предпочтений (равную важность критериев, имеющих общую шкалу), то вариант x^2 с векторной оценкой (m, e) не может считаться более предпочтительным, чем вариант x^4 , имеющий векторную оценку (e, m) : они должны полагаться одинаковыми по предпочтительности (безразличными). Далее, вариант x^2 должен считаться менее предпочтительным, чем вариант x^1 . Действительно, в силу той же симметрии предпочтений вариант x^1 с векторной оценкой (e, g) должен считаться безразличным с некоторым гипотетическим вариантом x^5 , имеющим векторную оценку (g, e) . А последний явно лучше варианта x^2 с векторной оценкой (m, e) , так как оценки « e » по второму критерию у них одинаковы, а по первому критерию оценка « g » у варианта x^1 выше оценки « m » у варианта x^2 . Считая (как и в МАИ), что предпочтения транзитивны, следует признать, что вариант x^1 предпочтительнее варианта x^2 » [1, с. 10].

В результате подобных эвристических рассуждений по решающим правилам частичная упорядоченность вариантов по двум равноважным критериям в порядковой шкале, представленная на рис. 1, имеет вид:

$$x^1 > \{x^2 \approx x^4\} \wedge x^3, \quad (12)$$

где $\wedge$ – логический символ конъюнкции; $\approx$ – логический символ эквивалентности.

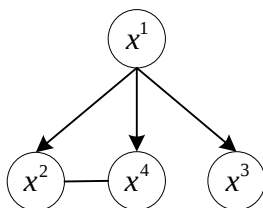


Рис. 1. Частичная упорядоченность вариантов по двум равноважным критериям в порядковой шкале

Примечание: составлено автором по [1, с. 10].

Поскольку частичная упорядоченность вариантов (12), полученная по решающим правилам теории важности критериев [17], не совпадает с результатом ранжирования (4) по оценкам, полученным по матрице парных сравнений МАИ в шкале отношений для значений $a = 3, b = 3$ и $ab = 9$, делается вывод, что «метод анализа иерархий, предполагающий для проведения анализа многокритериальных задач принятия решений с использованием аддитивной функции ценности оценивание предпочтений в шкале отношений, несостоятелен» [1, с. 12].

Замечание 2. Очевидно, что результат ранжирования вариантов (12) базируется на равноважности критериев и эвристической процедуре в виде следующих цепочек рассуждений:

$$\{(3, 5) \approx (5, 3)\} \Rightarrow x^2 \approx x^4; \{(5, 4) \approx (4, 5)\} > (3, 5) \Rightarrow \{x^1 \approx x^5\} > x^2. \quad (13)$$

Покажем, что частичная упорядоченность вариантов по двум равноважным критериям в порядковой шкале (12), полученная по рассуждениям (13), математически не обоснована.

Поскольку варианты представлены в единой однородной линейной порядковой трехбалльной шкале измерения, то применение аддитивной свертки (3) для равноважных критериев в этом случае корректно:

$$y_{\Sigma}^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 4,5; y_{\Sigma}^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 5 = 4; \quad (14)$$

$$y_{\Sigma}^{(3)} = \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 4; y_{\Sigma}^{(4)} = \frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 4; \quad (15)$$

в результате чего ранжирование вариантов примет вид (рис. 2а):

$$x^1 > \{x^2 \approx x^3 \approx x^4\}. \quad (16)$$



**Рис. 2. Частичная упорядоченность вариантов
по двум равноважным критериям в балльной и ранговой шкале**
Примечание: авторская разработка.

Отождествляя варианты с учениками, результаты вычислений (14), (15) можно интерпретировать как средний балл каждого из четырех учеников по двум дисциплинам.

Если вместо критериев рассмотреть, соответственно, экспертов, т. е. заменить везде выше критерии f_j на экспертов $\mathcal{E}_j, j = 1, 2$, то приходим к задаче нахождения результирующего ранжирования для двух ранжирований P_1 и P_2 по оценкам вариантов в порядковой шкале:

$$P_1: \{x^1 \approx x^4\} > x^3 > x^2; P_2: x^2 > \{x^1 \approx x^3\} > x^4. \quad (17)$$

Представим ранжирования (17) в ранговой шкале с учетом связанных рангов [18]:

$$r_{f_1} = (3,5; 1; 2; 3,5), r_{f_2} = (2,5; 4; 2,5; 1).$$

В [19] математически обоснован оптимизационный метод выбора результирующего ранжирования объектов, представленных в ранговой шкале измерения. Исходя из этого, ранги результирующего ранжирования для исходных ранжирований (17) находятся как среднеарифметические числа рангов объектов по числу ранжирований (экспертов):

$$r_{\Sigma} = (3; 2,5; 2,25; 2,25).$$

В результате ранжирование вариантов в порядковой ранговой шкале примет вид (рис. 2б):

$$x^1 \succ x^2 \succ \{x^3 \approx x^4\}. \quad (18)$$

Таким образом, ранжирование (12), полученное по эвристической процедуре в виде цепочек рассуждений (13), по сравнению с результирующим ранжированием (18), с математической точки зрения не обосновано.

2.4. Анализ причин получения различных решений

1. Несостоятельность примера, приведенного в [1], связана с тем, что сравнивать результаты ранжирований вариантов по критериям в исходных порядковых однородных шкалах разности (насколько один вариант в баллах предпочтительнее другого) с результатами ранжирований в количественных неоднородных шкалах отношений (во сколько раз один вариант предпочтительнее другого) не совсем корректно.

Поскольку метод анализа иерархий базируется на матрице парных сравнений объектов в количественной шкале отношений, утверждение о его некорректности равносильно тому, что метод парных сравнений, которому уже более 160 лет [20], также некорректен.

2. С точки зрения анализа устойчивости решения задачи сравнения вариантов в виде полученного по аддитивной свертке (3) ранжирования (16) в порядковой балльной шкале и построенного результирующего ранжирования (18) в ранговой шкале можно сделать следующие выводы:

А. В обоих упорядочениях (16), (18) по аддитивной свертке в балльной шкале и, соответственно, в ранговой шкале вариант x^1 оказался строго предпочтительнее всех остальных вариантов.

Б. Варианты x^3 и x^4 одинаковы по предпочтительности как в балльной (16), так и в ранговой шкале (18), однако в ранговой шкале они доминируемы вариантами x^1 и x^2 .

3. Несовпадение результатов ранжирований (11) и (16) связано с тем, что исходные оценки вариантов представлены по двум критериям в единой линейной однородной балльной шкале с градациями $R(f_1, f_2) = \{3, 4, 5\}$, а значения вариантов после нормализации – в количественных линейных, но неоднородных шкалах:

$$Y(f_1) = \left\{ \frac{3}{17}, \frac{4}{17}, \frac{5}{17} \right\}, Y(f_2) = \left\{ \frac{3}{16}, \frac{4}{16}, \frac{5}{16} \right\}$$

с различными приращениями смежных шкальных значений $\left(\frac{1}{17}, \frac{1}{16} \right)$ и различной величиной размаха критериев $\left(\frac{2}{17}, \frac{2}{16} \right)$.

Однако для того чтобы результаты ранжирований в количественной шкале отношений совпадали, необходимо совпадение сумм оценок вариантов по каждому критерию. Поскольку суммы оценок по критериям f_1 и f_2 в табл. 2 различны, то ранжирования (11) и (16) не совпадают.

Легко убедиться, что если оценки вариантов в столбце 2 по критерию f_1 табл. 2 умножить на 16, а оценки вариантов в столбце 3 по критерию f_2 табл. 2 умножить на 17, то результаты агрегирования оценок вариантов в этом случае совпадут с агрегированием нормализованных оценок.

3. Сравнение эффективности МАИ с методом аппроксимационной матрицы

В оптимизационном методе аппроксимационной матрицы (МAM) весов объектов в многокритериальных задачах в качестве целевого показателя задачи аппроксимации выступает квадрат разности между нормированными элементами исходной $V = [v_{ij}]$ и аппроксимационной мультипликативной матрицы $W = [w_{ij}]$ в виде:

$$\rho(\tilde{V}, \tilde{W}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\tilde{v}_{ij} - \tilde{w}_{ij})^2, \quad (19)$$

где $\tilde{v}_{ij} = \frac{v_{ij}}{\sum_{i=1}^n v_{ij}}$ – нормированные элементы матрицы $V = [v_{ij}]$ суждений, $j = \overline{1, n}$.

$\tilde{w}_{ij} = \tilde{w}_i = \frac{w_i}{\sum_{k=1}^n w_k}$ – нормированные элементы любого столбца аппроксимационной матрицы совпадают с нормированными элементами правого собственного вектора мультипликативной матрицы [11].

Решением задачи является оптимальная аппроксимационная матрица $W_* = [w_{ij}^*]$, элементы которой определяются по формуле:

$$w_{ij}^* = \frac{\tilde{w}_i^*}{\tilde{w}_j^*},$$

где $\tilde{w}_i^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tilde{v}_{ij}$, $\forall i = \overline{1, n}$, доставляя при этом минимум показателю (19).

Для сравнения эффективности методов применяется матричная евклидова l_2 -норма [15] между исходной возмущенной $V = [v_{ij}]$ матрицей суждений и аппроксимационной мультипликативной $W = [w_{ij}]$ матрицей [11]:

$$d(V, W) = \|V - W\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(v_{ij} - \frac{w_i}{w_j}\right)^2}. \quad (20)$$

В качестве мультипликативных матриц рассмотрим квадратные матрицы W_S и W_* , в которых элементы определяются по вектору приоритетов, найденных по МАИ и МАМ:

$$W_{\text{МАИ}}^{\approx} = \left(\frac{\tilde{w}_i}{\tilde{w}_j}\right)_{i,j=\overline{1,n}}; W_{\text{МАМ}}^* = \left(\frac{\tilde{w}_i^*}{\tilde{w}_j^*}\right)_{i,j=\overline{1,n}}.$$

Рассмотрим матрицу парных сравнений объектов в работе Т. Саати [14, с. 43]:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 1/5 & 1 & 4 \\ 1/9 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нормированные приоритеты, вычисленные по МАИ, – $\tilde{w}_{\text{МАИ}} = (0,743; 0,194; 0,063)$, по МАМ – $\tilde{w}_{\text{МАМ}} = (0,7352; 0,1994; 0,0654)$.

По нормированным элементам векторов восстановим элементы мультипликативных матриц по формуле $w_{ij} = \frac{\tilde{w}_i}{\tilde{w}_j}$, где $1 \leq i, j \leq n$, в результате получим:

$$W_{\text{МАИ}}^{\approx} = \begin{pmatrix} 1 & 3,830 & 11,794 \\ 0,261 & 1 & 3,079 \\ 0,085 & 0,325 & 1 \end{pmatrix}, W_{\text{МАМ}}^* = \begin{pmatrix} 1 & 3,687 & 11,243 \\ 0,271 & 1 & 3,050 \\ 0,089 & 0,328 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сравнение точности решений оценим по формуле (20):

$$d(V, W_{\text{МАИ}}^{\approx}) \approx \sqrt{10,031} = 3,17; d(V, W_{\text{МАМ}}^*) \approx \sqrt{7,670} = 2,77.$$

Отклонение приближенного решения по методу Т. Саати относительно оптимального по МАМ определим по формуле ε -приближения:

$$\frac{|d(V, W_{\text{МАМ}}^*) - d(V, W_{\text{МАИ}}^{\approx})|}{d_*} \times 100\% = \frac{|2,77 - 3,17|}{2,77} \times 100\% \approx 14,4\%.$$

Сравнение методов по точности получения весов объектов для исходной возмущенной матрицы 4-го порядка представлено на рис. 3.



Рис. 3. Сравнение методов по точности решений

Примечание: составлено автором.

Отсюда следует, что оценка погрешности равна 14,4 % и решение по МАИ, отличающееся от оптимального на эту величину, не может считаться удовлетворительным.

Таким образом, метод Т. Саати нахождения приоритетов важности критериев и объектов по собственному правому вектору матрицы парных сравнений следует отнести к приближенным, а не к точным, как декларируется автором МАИ.

Заключение

Ошибочность примера, приведенного в [1], связана с тем, что сравнение результатов ранжирований в исходных однородных порядковых шкалах разности (насколько один вариант в баллах предпочтительней другого) с результатами ранжирований в количественных неоднородных шкалах отношений (во сколько раз один вариант предпочтительней другого) не совсем корректно.

Математическая несостоятельность решающих правил теории важности критериев для решения многокритериальных задач ранжирования объектов обусловлена тем, что они базируются на эвристических процедурах.

В работе показано, что ранжирование вариантов в количественной шкале по аддитивной свертке нормированных оценок совпадает с ранжированием по методу анализа иерархий. В связи с этим метод анализа иерархий Т. Саати является корректным, а утверждение о некорректности метода равносильно тому, что метод парных сравнений также некорректен.

Сравнительный анализ эффективности метода аппроксимационной матрицы с методом анализа иерархий Т. Саати показал, что метод анализа иерархий, предназначенный для отыскания нормализованных весов критериев и объектов, является не точным, а приближенным методом. Поэтому метод аппроксимационной матрицы формирования весов объектов в многокритериальных задачах может быть применим вместо метода Т. Саати при решении прикладных задач.

Литература

1. Подиновский В. В., Подиновская О. В. О некорректности метода анализа иерархий // Проблемы управления. 2011. № 1. С. 8–13.

2. Saaty T. L. The Analytic Hierarchy Process. New York : McGraw Hill, 1980. 288 p.
3. Zahedi F. The Analytic Hierarchy Process – A Survey of the Method and its Applications // Interfaces. 1986. Vol. 16. P. 96–108.
4. Takeda E. The Analytic Hierarchy Process: An Overview // Systems, Control and Information. 1990. Vol. 34. P. 669–675.
5. Forman E. H., Gass S. I. The Analytic Hierarchy Process – An Exposition // Operations Research. 2001. Vol. 49, Is. 4. P. 469–486.
6. Bodin L., Gass S. I. On Teaching the Analytic Hierarchy Process // Computer and Operations Research. 2003. Vol. 30. P. 1487–1497.
7. Belton V., Stewart T. J. Multiple Criteria Decision Analysis. An Integrated Approach. Boston : Kluwer Academic Publishers, 2003. 374 p.
8. Ногин В. Д. Упрощенный вариант метода анализа иерархий на основе нелинейной свертки критериев // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44, № 7. С. 1259–1268.
9. Vaidya O. S., Kumar S. Analytic Hierarchy Process: An Overview of Applications // European Journal of Operational Research. 2006. Vol. 169. P. 1–29.
10. Ishizaka A., Labib A. Analytic Hierarchy Process and Expert Choice: Benefits and Limitation // OR Insight. 2009. Vol. 22. P. 201–220.
11. Корнеев В. П. Метод аппроксимационной матрицы формирования весов объектов в многокритериальных задачах выбора // Вестник кибернетики. 2021. № 1. С. 51–62.
12. Jestice A. L. Project PATTERN: Planning Assistance through Technical Evaluation of Relevance Numbers. McLean, Va : ALJ Associates, 1968. 107 p.
13. Keeney R. L., Raiffa H. Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Trade-Offs. New York : John Wiley & Sons, 1976. 569 p.
14. Саати Т. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: аналитические сети. М. : Изд-во ЛКИ, 2008. 360 с.
15. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М. : Мир, 1989. 655 с.
16. Пфанцгль И. Теория измерения. М. : Мир, 1976. 248 с.
17. Подиновский В. В. Идеи и методы теории важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. М. : Наука, 2019. 103 с.
18. Кендэл М. Ранговые корреляции. М. : Мир, 1975. 216 с.
19. Корнеев В. П. Оптимизационный метод выбора результирующего ранжирования объектов, представленных в ранговой шкале измерения // Управление большими системами. Вып. 82. М. : ИПУ РАН, 2019. С. 44–60. DOI: <https://doi.org/10.25728/ubs.2019.82.3>.
20. Fechner G. T. Elements of Psychophysics. Leipzig : Breitkopf and Härtel, 1860. 336 p.