## ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 519.622.1
DOI 10.34822/1999-7604-2021-4-54-62

# НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ КОШИ ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ

**А. А. Бочаров ✉, В. В. Храмов**
*Южный университет (ИУБиП), Ростов-на-Дону, Россия*
*✉E-mail: a.a.bocharov1980@gmail.com*

Получена формализованная модель типа Коши процесса усвоения знаний, основанная на закономерностях самоорганизации процесса обучения и его составляющих, в рамках нелинейных дифференциальных соотношений с возможностью динамического изменения параметров модели, в том числе возникновения хаоса за счет бифуркационных явлений. Разработаны новые и адаптированы к условиям цифровизации образования известные математические модели процесса усвоения знаний и оценки остаточных знаний обучаемых в вузах, учитывающие как накопление, так и рассеяние знаний в процессе обучения.

*Ключевые слова:* нелинейная модель, самоорганизация, странный аттрактор, динамика, устойчивость, численное моделирование.

# NON-LINEAR CAUCHY MODEL FOR EDUCATIONAL PROCESS

**A. A. Bocharov ✉, V .V. Khramov**
*Southern University (IMBL), Rostov-on-Don, Russia*
*✉E-mail: a.a.bocharov1980@gmail.com*

A formalized model of Cauchy type for knowledge assimilation based on the patterns of self-organization of educational process and its components is obtained in the framework of non-linear non-differential relationships with the possibility for dynamical change of model's parameters, including the occurrence of chaos due to the bifurcation phenomena. New known mathematical models, which consider both knowledge accumulation and dispersal in the educational process, for knowledge assimilation and assessment of remaining knowledge of students from universities are developed and adapted for educational digitalization.

*Keywords:* non-linear model, self-organization, strange attractor, dynamics, stability, numerical modeling.

## Введение

Изучение процессов самоорганизации – важный момент при построении модели обучения. Цель исследования – изучение и построение математических моделей процесса усвоения знаний на основе теории дифференциальных уравнений, в частности задачи Коши.

**Математическое представление основного процесса накопления знаний с элементами самоорганизации.** Для удобства составления модели обучения введем основные математические обозначения составляющих учебного процесса:

$x(t)$ – знания обучаемых, полученные в момент времени $t$ по данному предмету;

$M(t, x)$ – мотивация процесса обучения в данный момент времени $t$ по данному предмету;

$A(t)$ – однородная учебная информация, сообщенная обучаемым в момент времени $t$ по данному предмету;

$B(t)$ – время самостоятельной работы, представленное обучаемым согласно учебному плану;

$D(t)$ – плановые отрывы от самостоятельной работы, предусмотренные расписанием занятий;

$d(x)$ – функция влияния на процесс забывания знаний обучаемыми или недополученная ими учебная информация;

$k_1$ – эмпирический коэффициент пропорциональности, характеризующий степень усвоения знаний;

$k_2$ – эмпирический коэффициент пропорциональности, характеризующий степень забывания знаний.

В основу формирования математической модели положим закон эволюции знаний, основанный на прямо пропорциональной зависимости:

- между скоростью изменения знаний $\frac{dx}{dt}$ и самими знаниями $x(t)$;
- между скоростью изменения знаний $\frac{dx}{dt}$ и мотивацией к обучению $M(t)$.

Следует подчеркнуть социально-психологический аспект мотивации $M(t)$ [1]. При ее составлении будем учитывать, что при увеличении $M(t)$ (усиление мотивации) приращение знаний должно увеличиваться, а при уменьшении $M(t)$ – уменьшаться.

В простейшем случае в качестве меры мотивации можно взять разницу между объемом сообщаемой учебной информации и самими знаниями в каждый момент времени $t$, например:

$$M(t) = A(t) - x(t). \tag{1}$$

Зависимость (1) удовлетворяет тем требованиям, которые к ней предъявлены выше. Следует отметить, что хотя эта простейшая формула для описания мотивации учебного процесса вполне удовлетворяет принятой формулировке, однако и сама мотивация может иметь социально-психологические аспекты, связанные со стимулами [2]: обучение как стремление к получению знаний или сдаче экзаменов и т. п.

Запишем соответствующий оператор процесса обучения с учетом мотиваций процесса обучения вида (1) и получим:

$$\frac{dx}{dt} = k_1 x(t) M\left(t, x(t)\right) \tag{2}$$

или в рассматриваемом случае:

$$\frac{dx}{dt} = k_1 x(A - x). \tag{3}$$

Равенство (2), часто называемое уравнением Ферхюлста, впервые исследовано Вольтеррой [3], позднее Дж. Николисом и И. Пригожиным [4]. Формулы (2), (3) дают т. н. «накопительную» часть математической модели процесса усвоения знаний. Другая ее часть – расходная – должна быть учтена с помощью оператора забывания (рассеяния) знаний. Предположим, что скорость изменения объема забытых знаний пропорциональна:

- самим полученным знаниям $x(t)$ с коэффициентом пропорциональности $k_2$;
- функции влияния на забывание знаний $d(t)$, обладающей такими свойствами, как увеличение, если увеличиваются отрывы от самостоятельной работы (несистематичность занятий по дисциплине), и уменьшение, если отрывы от самостоятельной работы уменьшаются ($d(t)$ играет роль недополученной обучаемыми учебной информации).

Введенная здесь функция *d(t)* учета влияния отрывов от самостоятельной работы играет роль, обратную мотивации. Математическая реализация процесса забывания знаний в процессе обучения имеет в этом случае вид формулы:

$$\frac{dx}{dt} = k_2 d(t) x(t) \tag{4}$$

и совпадает по смыслу с (4), (3). Вид функции *d(t)* можно взять в виде:

$$d(t) = \left(B(t) D^{-1}(t) - 1\right)^{-1}, \tag{5}$$

где $B$ и $D$ описаны выше, причем выполняется естественное неравенство $B(t) \geq D(t)$.

Далее будут обсуждены и другие виды функции $d(t)$ при практической реализации математической модели. Принимая во внимание вышеперечисленные основания, при реализации баланса знаний в момент времени $t$ получим дифференциальное уравнение для определения $x(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = k_1 x(t)\left[A(t) - x(t)\right] - k_2 d(t) x(t). \tag{6}$$

Для постановки задачи Коши дифференциального уравнения (5) зададим начальное условие вида $x(t_0) = x_0$, где $x_0$ – величина начальных значений, необходимых для осуществления учебного процесса.

Отметим, что решение поставленной задачи Коши (4)–(6) существует, а единственность ее решения обсудим ниже. Дифференциальное уравнение (5) является обыкновенным нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка с переменными коэффициентами [4, 5] со следующими замечаниями:

1. Эмпирические коэффициенты $k_1$ и $k_2$, связанные со свойствами интеллекта в плане усвоения и забывания знаний в процессе обучения, являются функциями времени и определяются эмпирически.

2. В настоящей модели используется однородная информация, достоверность которой должна быть определена заранее, откуда следует, что достоверность решения поставленной задачи напрямую зависит от достоверности информации *A(t)*.

3. Аналитическое выражение функций мотивации и забывания может быть осуществлено различными способами. Например, мотивацию можно «ослабить» и принять в виде:

$$\sqrt{M(x,t)},\ \text{при } M(x, t) \geq 1, \tag{7}$$

или «усилить» и принять в виде:

$$M^2(x, t)\ (M(x, t) \geq 1), \tag{8}$$

или другие варианты.

Более того, можно ввести понятие обратной мотивации процесса обучения – потери интереса к обучению (получению профессии), связанной с какими-либо психологическими или социальными изменениями, а математически – с введением, например, функций вида $M^{-1}(t, x)$ либо других.

**Материалы и модели**

Математическая модель процесса образования с учетом мотивации к обучению представляется задачей Коши решения дифференциального уравнения (5), (6), исследованию которого уделено достаточно много внимания [4, 5]. В наиболее простом случае уравнения (5), когда входящие в него функции $A(t)$ и $d(t)$ являются постоянными величинами, его решение имеет вид:

$$x(t)=\frac{\eta}{1-(x_0-\eta)x_0^{-1}\exp\left(-k\eta(t-t_0)\right)}, \tag{9}$$

в котором $\eta = k_1A - k_2d$, а $x_0$ – из нулевого начального условия [4].

Для исследования уравнения (5) и выявления точек бифуркации необходимо выделить стационарные решения, не зависящие от времени, когда

$$\frac{dx}{dt}=0, \tag{10}$$

в результате чего получается уравнение:

$$k_1x(A-x)-k_2dx = 0, \tag{11}$$

из которого выделяются два стационарных решения: тривиальное

$$x = 0 \tag{12}$$

и решение вида

$$x=\frac{\eta}{k_1}. \tag{13}$$

Эти решения в линейном случае исследуются на устойчивость по Ляпунову [3, 5]. В результате легко прийти к выводу, что тривиальное решение (12) является неустойчивым, а решение (13) – устойчивым. Отсюда, в частности, можно утверждать, что при $\eta > 0$ уравнение (6) имеет единственное решение, не зависящее от времени (12). В точке $\eta = 0$ происходит бифуркация – появляется новое решение дифференциального уравнения (13). Как отмечается в [3, 6], бифуркации играют важную роль при анализе нелинейных математических моделей, так как объединяют естественно-научные и физико-математические направления. Анализ новых решений, полученных при переходе через точки бифуркации и их социально-психологическое значение, является наиболее сложным этапом их осмысления.

Важным понятием нелинейных математических моделей являются флуктуации. Флуктуациями часто называют добавочные члены в (5), (7) к нелинейному дифференциальному оператору (1), содержащемуся в (5). Флуктуации, как правило, размывают (искажают) основное решение, доставляемое оператором (1) уравнению (5), но в то же время не изменяют количества точек бифуркации. Они играют важную роль в окрестности точек бифуркации, когда с их помощью выбирается «ветвь» решения, которой будет следовать система.

В нашем случае роль флуктуации играет введенный нами закон забывания знаний [7]. С другой стороны, для исследования устойчивости нелинейного уравнения (5) прибегают к поиску решений соответствующего ему линейного уравнения. Для этого, обозначив полученное ранее стационарное решение (13) $x_c$:

$$x_c=\frac{\eta}{k_1} \tag{14}$$

и принимая решение уравнения (5) по формуле:

$$x = x_c + X(t), \tag{15}$$

в котором $X(t)$ – малая функция по сравнению с $x_c$, подставим (15) в (5). В полученном уравнении, отбросив члены, содержащие $M^2(t)$, считая их бесконечно малыми функциями более высокого порядка по сравнению с $X(t)$, получим соответствующее (5) линейное дифференциальное уравнение [8, 9]:

$$\frac{dX}{dt} = \left(k_2 d - k_1 A\right) X \, . \tag{16}$$

Решением этого уравнения, отличным от тривиального $X = 0$, является функция вида:

$$X(t) = c\ exp\ ((-k_1 A - k_2 d)t), \tag{17}$$

где $c$ – произвольная постоянная.

Отметим, что в общем случае задача Коши (5), (6) для непрерывных функций $A(t)$ и $d(t)$ имеет аналитическое решение, так как уравнение (5) является уравнением Бернулли [10] и решается как обычное линейное уравнение. Общий вид решения этой задачи Коши (5), (6) дается формулой

$$x(t) = \frac{x_0 \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} \eta(\tau)\, d\tau\right)}{1 + x_0 \int\limits_{t_0}^{t} c(\tau) \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{\tau} \eta(\xi)\, d\xi\right) d\tau}, \tag{18}$$

в которой:

$$\eta(t) = -(k_1 A(t) - k_2 d(t)), \tag{19}$$

$$c(t) = k_1. \tag{20}$$

Полученное аналитическое решение позволяет исследовать его для конкретных случаев функций $A(t)$ и $d(t)$.

**Характеристика решения для основных составляющих процесса усвоения знаний, входящих в математическую модель (4), (5)**

Для практической реализации математической модели процесса усвоения знаний необходимо определить ее основные составляющие функции $A(t)$, $d(t)$, $B(t)$, $D(t)$ и эмпирические коэффициенты $k_1$ и $k_2$. По смыслу эмпирический коэффициент $k_1$ относится к той части модели, которая дает количественную оценку усвоенных знаний. При этом отметим, что в ходе численного моделирования динамики обучения необходимо контролировать устойчивость получаемых решений. Для его математического выражения воспользуемся оператором (3). Запишем (2) в виде конечно-разностной схемы типа модели Эйлера [11], применяемой для численного решения соответствующего дифференциального уравнения. Оператор (2) при этом принимает вид:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t_k} = k_1 x_k \left(A_k - x_k\right), \tag{21}$$

где $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, $x_k = x(t_k)$, $A_k = A(t_k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Считая, что $A_{k-1} >> x_{k-1}$, упростим правую часть, отбросив члены:

$$\frac{x_k}{A_k} << 1. \tag{22}$$

Тогда равенство (21) примет более простой вид, а $k_1$ при этом получает формулу:

$$k_1 = \frac{\frac{x_{k+1} - x_k}{x_k}}{\Delta t_k A_K}. \quad (23)$$

В числителе дроби (23) стоит выражение, являющееся относительной характеристикой усвоения знаний на промежутке времени $\Delta t_k$:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{x_k}. \quad (24)$$

Величина $A_k$, стоящая в знаменателе (23), указывает, что характеристика $k_1$ является удельной усвояемостью знаний. Для удобства следует отказаться от удельной характеристики усвоения знаний (23). Введем относительную характеристику знаний по формуле (24) и обозначим ее:

$$k_y = \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k}. \quad (25)$$

С учетом этого характеристика $k_1$ примет вид:

$$k_1 = \frac{k_y}{A_k}. \quad (26)$$

В этом случае дифференциальный оператор (2) примет вид:

$$\frac{dx}{dt} = k_y x\left(1 - \frac{x}{A}\right). \quad (27)$$

Такой подход с практической точки зрения упростит определение эмпирического коэффициента $k_1$, сводя его определение к определению относительного коэффициента усвоения знаний $k_y$. Следует отметить, что коэффициент усвоения $k_y$, определяемый формулой (25), является усредненным относительным коэффициентом усвоения знаний в единицу времени, или «мгновенным» коэффициентом усвоения знаний. Для определения коэффициента забывания знаний поступим аналогично, расписав оператор с учетом знака «–» перед ним в конечных разностях:

$$\frac{\tilde{x}_{k+1} - x_k}{\Delta t_k} = -k_2 d_k x_k, \quad (29)$$

откуда получаем:

$$k_2 = \frac{-\frac{\tilde{x}_{k+1} - x_k}{x_k}}{\Delta t_k \cdot d_k}. \quad (30)$$

В формулах (29), (30) $x_k$ является тем же самым, что и в формулах (21), (23), а под $\tilde{x}_{k+1}$ понимаются остаточные знания от $x_k \left(\tilde{x}_{k+1} < x_k\right)$.

Величина $d_k$ вводится искусственно для компенсации фактора отрывов обучаемых от самостоятельной работы и определяется экспериментально. Обозначим величину:

$$-\frac{\tilde{x}_{k+1}-x_k}{x_k \Delta t_k}=k_2 \tag{31}$$

и назовем ее мгновенным коэффициентом забывания знаний. Будем считать, что величина $d(t)$ описывается формулой (4).

В принятых здесь обозначениях дифференциальное уравнение (27) принимает вид:

$$\frac{dx}{dt}=k_y x\left(1-\frac{x}{A}\right)-k_2 dx\,. \tag{32}$$

Начальное условие, соответствующее уравнению (19), останется прежним – таким же, как и для уравнения (5):

$$x(t_0) = x_0. \tag{33}$$

Из формул (25) и (31) следует порядок их экспериментального определения. Эти формулы показывают, что рассматриваемые коэффициенты $k_1$ и $k_2$ можно определять одновременно в течение двух тестирований. Для этого при первом тестировании проверяется степень усвоения выданной учебной информации, а при втором – остаточные знания по тем же самым вопросам. Детализацию практического определения коэффициентов $k_1$ и $k_2$ и их физиологические и психологические аспекты проведем ниже. Для практической реализации модели необходимо определить функции учебной информации $A(t)$ от времени самостоятельной работы $B(t)$ и отрывов от самостоятельной работы $D(t)$.

Для простоты реализации модели будем считать, что учебная информация $A(t)$ однородная (т. е. одинаковой трудности восприятия) и задается в академических часах понедельно. При этом суммируются все часы всех видов занятий по данной дисциплине за каждую неделю и составляется гистограмма учебной информации.

Аналогично составляется гистограмма времени самостоятельной работы $B(t)$ и отрывов от самостоятельной работы $D(t)$. Длина интервала времени $T$ определяется количеством недель в семестре, например $T = 20$. Определив таким образом исходные данные, решение поставленной задачи можно определить численными методами [11, 12]. Наиболее удобным является метод Рунге – Кутта четвертого порядка точности, так как реализация точного решения (29) потребует вычисления квадратур одним из численных методов. В случае ступенчатых функций $A(t)$, $B(t)$, $D(t)$ можно получить точное решение поставленной задачи. Оно имеет вид:

$$\begin{gathered}
x(t)=\frac{x_0\exp\left(-\tilde{p}(t)\right)}{1+k_1x_0\left(a_k-b_k+c_k\exp\left(\tilde{p}(t)\right)\right)},\ t_0+k\le t\le t_0+k+1,\\
\tilde{p}(t)=-k_1\tilde{A}(t)+k_2\tilde{d}(t),\ \tilde{d}(t)=\sum_{i=0}^{k-1}d_i+(t-t_0-k)d_k\ ,\\
\tilde{A}(t)=\sum_{i=0}^{k-1}A_i+(t-t_0-k)A_k\ ,\ a_k=\frac{\exp\left(-k_1\sum_{i=0}^{n}A_i+k_2\sum_{i=0}^{n}d_i\right)}{-k_1A_n+k_2d_n},\\
b_k=\sum_{n=0}^{k-1}\frac{\exp\left(-k_1\sum_{i=0}^{n}A_i+k_2\sum_{i=0}^{n-1}d_i\right)}{-k_1A_n+k_2d_n},\ c_k=\frac{1}{-k_1A_k+k_2d_k}.
\end{gathered} \tag{34}$$

В заключение отметим, что полученное точное решение затруднительно при относительной характеристике процентного отношения суммы полученных знаний к сумме сообщенной информации как основного критерия результатов обучения (35):

$$\delta = \frac{\int_{t_0}^{t} x(\tau)\,d\tau}{\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau}. \tag{35}$$

*Замечания.* В реализованной модели не учитываются:

- длительное забывание полученных знаний;
- повторение учебного материала, что приводит обычно к повышению степени усвоения материала;
- скорость подачи материала, влияющая на степень усвоения учебного материала.

**Выводы**

В ходе исследований разработаны новые и адаптированы к условиям цифровизации образования известные математические модели процесса усвоения знаний и оценки остаточных знаний обучаемых, учитывающие как накопление, так и рассеяние знаний в процессе обучения. Предлагаемые математические модели такого процесса, построенные на принципе самоорганизации, позволяют:

- при надлежащем подборе эмпирических показателей (коэффициентов) и достаточной достоверности исходной информации об учебном процессе получить сведения о процессе усвоения и рассеяния знаний в течение семестра, месяца, недели и т. д;
- осуществить долгосрочный прогноз результатов процесса усвоения знаний на начало экзаменационной сессии;
- дать оценку степени организации учебного процесса, его интенсивности, равномерности и т. п.;
- прогнозировать последствия от принятых организационных, методических и других решений, связанных с изменениями в ходе учебного процесса;
- провести анализ влияния на процесс обучения плановых и внеплановых отрывов обучаемых от самостоятельной работы;
- оптимизировать учебный процесс по его основным показателям: объему учебной информации, времени самостоятельной работы, степени самоорганизации и т. п.

Полученная с помощью математической модели информация об учебном процессе дает возможность управляющему звену вуза принять правильные решения по устранению недостатков, допущенных при его планировании, организовать учебный процесс в соответствии с поставленными задачами и спрогнозировать его результаты.

## Литература

1. Лифшиц Е. А. Исследования мотивационного потенциала студентов для совершенствования процесса обучения // Соврем. исслед. социалн. Проблем : электрон. науч. журн. 2012. № 4. URL: http://sisp.nkras.ru/e-ru/issues/2012/4/lifshic.pdf (дата обращения: 10.09.2021).

2. Братищев А. В. Математическая теория управляемых динамических систем: введение в понятия и методы. Ростов-на-Дону : Донск. гос. технич. ун-т, 2015. 292 с.

3. Храмов В. В. Агрегирование информации как проблема личностной самоорганизации // Рос. психолог. журн. 2007. Т. 4, № 4. С. 9–21.

4. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М. : Мир, 1979. 512 с.

5. Братищев А. В., Журавлева М. И. Бифуркационный анализ и синергетическое управление системой «валовой продукт – трудовой ресурс» // Вестн. Ростов. гос. эконом. ун-та (РИНХ). 2015. № 2. С. 147–155.

6. Братищев А. В. Факторизация характеристического многочлена состояния равновесия автономной системы, имеющей инвариантное множество // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2019. № 3. С. 1–17.

7. Абакумова И. В., Финько М. В., Князева Ю. С. Трансформация высшего образования в условиях глобализации: новые форматы и альтернативные модели // Alma mater (Вестн. высш. шк). 2021. № 9. С. 7–17. DOI 10.20339/AM.09-21.007.

8. Чернышев Ю. О., Требухин А. В., Панасенко П. А., Белоножко Д. Г. Существующие способы формализации нечеткостей в транспортных процессах // Инженер. вестн. Дона. 2021. № 7. С. 57–79.

9. Присняков В. Ф., Приснякова Л. М. Математическое моделирование переработки информации оператором человеко-машинных систем. М. : Машиностроение, 1990. 248 с.

10. Akperov I. G., Akperov G. I., Alekseichik T. V. et al. Soft Models of Management in Terms of Digital Transformation. Rostov-on-Don : PEI HE SU (IUBIP), 2019. 188 p.

11. Чернышев Ю. О., Храмов В. В. Особенности агрегирования качественных признаков опорных ориентиров в системах технического зрения // Известия ТРТУ. 2001. № 3. С. 55.

12. Akperov I. G., Akperov G. I., Alekseichik T. V. et al. Soft Models of Management in Terms of Digital Transformation. Rostov-on-Don : PEI HE SU (IUBIP), 2020. Vol. 2. 256 p.