

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Научная статья

УДК 62-752:629.4.015:519.7

DOI 10.35266/1999-7604-2023-2-75-86

РАЗВИТИЕ РЫЧАЖНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ В ОЦЕНКЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ СВЯЗНЫХ ВИБРАЦИОННЫХ НАГРУЖЕНИЙ

Андрей Владимирович Елисеев^{1✉}, Николай Константинович Кузнецов²

¹ Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, Россия

^{1,2} Иркутский национальный исследовательский технический университет, Иркутск, Россия

¹ eavsh@ya.ru ✉, <https://orcid.org/0000-0003-0222-2507>

² knik@istu.edu, <https://orcid.org/0000-0002-3083-0182>

Аннотация. В статье представлено развитие системного подхода к оценке, контролю и формированию динамических состояний на основе представлений о рычажных связях элементов технических объектов в условиях связанных вибрационных нагружений. Методология исследования основана на структурном математическом моделировании, позволяющем сопоставлять структурные схемы эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления механическим колебательным системам, которые используются в качестве расчетных схем технических объектов. Разработана рычажная интерпретация совокупности обобщенных динамических состояний для механических колебательных систем, образованных твердым телом с тремя степенями свободы, существенные особенности которых отображаются количеством резонансов, режимов обнуления амплитуд колебаний и знакоопределенных форм динамических взаимодействий. На основе рычажной связи разработана система обобщенных представлений, позволяющая отобразить роль связности вибрационных нагружений в формировании граничных динамических состояний механических колебательных систем. Результаты представлены аналитическими выражениями, графическими изображениями и численными экспериментами.

Ключевые слова: технический объект, вибрационные нагружения, структурное математическое моделирование, упругие элементы, механическая колебательная система, твердое тело, связанные кинематические возмущения, передаточные функции, рычажные связи, обобщенный рычаг системы, динамическое состояние системы

Для цитирования: Елисеев А. В., Кузнецов Н. К. Развитие рычажных представлений в оценке динамических состояний механических колебательных систем в условиях связанных вибрационных нагружений // Вестник кибернетики. 2023. Т. 22, № 2. С. 75–86. DOI 10.35266/1999-7604-2023-2-75-86.

Original article

DEVELOPING A LEVEL CONCEPT IN ASSESSMENT OF THE DYNAMIC STATE OF MECHANICAL OSCILLATORY SYSTEMS SUBJECTED TO CONNECTED VIBRATIONAL LOADINGS

Andrey V. Eliseev^{1✉}, Nikolay K. Kuznetsov²

¹ Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia

^{1,2} Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russia

¹ eavsh@ya.ru ✉, <https://orcid.org/0000-0003-0222-2507>

² knik@istu.edu, <https://orcid.org/0000-0002-3083-0182>

Abstract. The article presents a frame of a systematic approach to assessment, control, and formation of dynamic states based on the concept of level ties of elements of technical objects subjected to connected

vibrational loadings. The methodological basis of the study comprises structural mathematical modeling that allows for a comparison of mechanical oscillatory systems, which are used as computational models for technical objects, with structural schemes of automated operating systems that are equivalent to dynamic relations. A level interpretation of total generalized dynamic states is designed for mechanical oscillatory systems created with solid body with three degrees of freedom. Their significant features are reflected in the number of resonances, modes of oscillation amplitude setting to zero, and definite form of dynamic interactions. Based on the level ties, a system of general concepts is developed to depict the role of connection of vibrational loadings in creating border dynamic states of mechanical oscillatory systems. The results consist of analytical equations, graphical images, and numerical experiments.

Keywords: technical object, vibrational loadings, structural mathematical modeling, resilient elements, mechanical oscillatory system, solid body, connected kinematic disturbances, transfer functions, level ties, general level of a system, dynamic state of a system

For citation: Eliseev A. V., Kuznetsov N. K. Developing a level concept in assessment of the dynamic state of mechanical oscillatory systems subjected to connected vibrational loadings. *Proceedings in Cybernetics*. 2023;22(2):75–86. DOI 10.35266/1999-7604-2023-2-75-86.

ВВЕДЕНИЕ

Периодические техногенные катастрофы ставят проблемы обеспечения безопасности технических объектов автомобильного транспорта, авиации, судостроения, объектов, связанных с производством и транспортировкой опасных веществ, внимания требуют также причины опасных событий на технических объектах транспортного и технологического назначения, находящихся в условиях интенсивных вибрационных нагружений [1–3]. Необходимость учета вибрационных нагружений обуславливают разработку методологического базиса решения задач в области динамики машин, теории колебаний, теории автоматического управления, системного анализа, теории катастроф [4]. На начальных этапах моделирования динамических состояний технических объектов в качестве расчетных схем возможно обоснованное использование линейных механических колебательных систем, образованных твердым телом с конечным числом степеней свободы [5]. Для моделирования динамических состояний технических объектов используется структурный подход – сопоставление структурных схем эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления механическим колебательным системам [6]. Особенности динамических состояний могут быть определены на основе передаточных функций, для которых входным сигналом служит колебание точки опорной поверхности, а выходным – колебание точки системы [7]. Для оценки динамических состояний исполь-

зуется концепция динамических инвариантов, основанная на разбиении динамических состояний системы на классы, обладающие одинаковыми существенными особенностями в виде количества резонансов, режимов обнуления амплитуд колебаний и знакоопределенных форм динамических взаимодействий элементов [8].

Вместе с тем концепция динамических инвариантов, получившая развитие для систем, динамическое состояние которых оценивается на основе податливости, недостаточно детализирована для систем, в которых способом оценки динамических состояний служат рычажные связи [9].

Предлагаемая статья посвящена развитию представлений о механических колебательных системах, динамические состояния которых оцениваются с помощью рычажных связей.

Основные положения. Постановка задачи. Рассматривается механическая колебательная система в виде плоского твердого тела, установленного на упругие опоры (рис. 1). Твердое тело совершает малые установившиеся колебания, вызванные связными гармоническими синфазными возмущениями опорных поверхностей. Динамические состояния определяются на основе амплитуд колебаний фиксированной точки твердого тела по отношению к амплитуде колебания опорной поверхности. Отношение амплитуд колебаний отображает рычажную связь в зависимости от частоты возмущений. Совокупности динамических состояний определяются связностью кинематических возмущений.

Задача заключается в разработке обобщенных представлений, отображающих особенности рычажных взаимодействий элементов механических колебательных систем, образованных твердым телом с тремя степенями свободы, находящихся в условиях связанных кинематических возмущений.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Математическая модель. Точки A, B, C твердого тела в состоянии статического равновесия имеют координаты $(x_i, y_i, 0)$, $i = 1, 2, 3$. Главные оси инерции совпадают с осями Ox и Oy . Обобщенные координаты (z_0, φ, ψ) отображают вертикальное смещение центра масс

с помощью z_0 , угловые смещения вокруг главных осей – с помощью φ, ψ ; координаты (h_1, h_2, h_3) отображают вертикальные смещения точек A, B, C относительно положений статического равновесия. Векторы $\xi = (z_0, \varphi, \psi)^T$ и $h = (h_1, h_2, h_3)^T$ связаны между собой:

$$h = U\xi, \quad (1)$$

где $U = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}$, k_1, k_2, k_3 – коэффициенты жесткости.

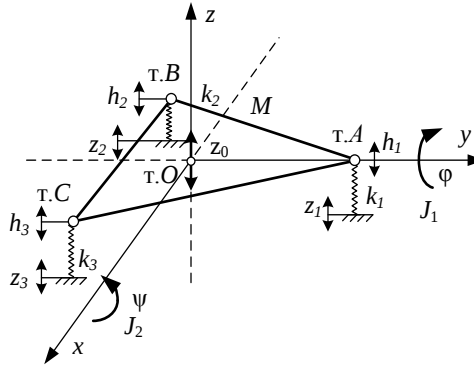


Рис. 1. Расчетная схема механической колебательной системы:

$Oxyz$ – неподвижная система координат; ABC – твердое тело; z_1, z_2, z_3 – опорные поверхности; k_1, k_2, k_3 – упругие элементы; h_1, h_2, h_3 – вертикальные смещения точек A, B, C ; z_0 – смещение центра масс; φ, ψ – малые углы поворотов твердого тела вокруг осей Oy, Ox ; J_1, J_2 – моменты инерции

Примечание: составлено авторами.

Полагая, что M_0 – масса, J_1, J_2 – моменты инерции, z_1, z_2, z_3 – возмущения опорных поверхностей, потенциальная и кинетическая энергии системы имеют вид:

$$\Pi = \frac{1}{2} \langle K(h - z), (h - z) \rangle, \quad (2)$$

$$T = \frac{1}{2} \langle M\dot{\xi}, \dot{\xi} \rangle, \quad (3)$$

$$\text{где } K = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} M_0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix}, z =$$

$= (z_1, z_2, z_3)^T$, $\langle u, v \rangle$ – скалярное произведение векторов u и v . С учетом (1)–(3) уравнения Лагранжа 2-го рода принимают вид:

$$(U^{-1})^T MU^{-1}\ddot{h} + Kh = Kz. \quad (4)$$

Интегральное преобразование Лапласа (4) с учетом нулевых начальных условий имеет вид:

$$((U^{-1})^T MU^{-1}p^2 + K)\bar{h} = K\bar{z}, \quad (5)$$

где $p = j\omega$ – комплексная переменная, $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, ω – частота внешнего возмущения, символ « $\rightarrow$ » над переменными означает преобразование Лапласа [10]. С учетом обозначений:

$$(U^{-1})^T MU^{-1} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где элементы m_{ij} – представляют собой приведенные массо-инерционные коэффициенты, система (5) может быть представлена в виде структурной схемы (рис. 2).

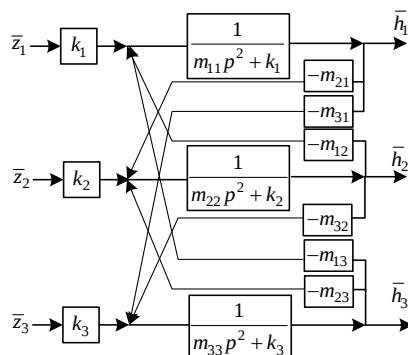


Рис. 2. Структурная схема системы рис. 1
 Примечание: составлено авторами.

На основе рис. 2 строятся передаточные функции, представляющие собой рычажные отношения:

$$W_{11}(p) = \frac{\bar{h}_1}{\bar{z}_1}, \quad (7)$$

$$W_{21}(p) = \frac{\bar{h}_2}{\bar{z}_1}, \quad (8)$$

$$W_{31}(p) = \frac{\bar{h}_3}{\bar{z}_1}. \quad (9)$$

Связность представлена условиями:

$$z_2 = \gamma_2 z_1, \quad (10)$$

$$z_3 = \gamma_3 z_1, \quad (11)$$

где γ_2, γ_3 – коэффициенты связанности.

С учетом (6)–(11) система (5) приводится к виду:

$$\left(\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \times p^2 + \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} W_{11}(p) \\ W_{21}(p) \\ W_{31}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \gamma_2 \\ k_3 \gamma_3 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Для фиксированных значений (10), (11) передаточные функции (7)–(9) отражают со-

вокупность существенных динамических особенностей в виде фиксированного количества резонансов, режимов обнуления амплитуд колебаний и количества знакоопределенных форм динамических взаимодействий. Множество коэффициентов связности может быть разбито на классы, в которых существенные динамические особенности, представляющие собой своеобразные динамические инварианты, остаются неизменными [8].

Определение граничных значений коэффициентов связности с помощью частотных кривых. Функции W_{11}, W_{21}, W_{31} принимают вид:

$$W_{i1}(p) = \frac{\bar{h}_i}{\bar{z}_1} = \frac{C_i(p)}{A(p)}, \quad (13)$$

где

$$C_i(p) = C_{i1}p^4 + C_{i2}p^2 + C_{i3}, \quad i = 1...3, \quad (14)$$

$$A(p) = A_1p^6 + A_2p^4 + A_3p^2 + A_4,$$

$$C_{11} = \begin{vmatrix} k_1 & m_{12} & m_{13} \\ k_2 \gamma_2 & m_{22} & m_{23} \\ k_3 \gamma_3 & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix},$$

$$C_{12} = \begin{vmatrix} k_1 & 0 & m_{13} \\ k_2 \gamma_2 & k_2 & m_{23} \\ k_3 \gamma_3 & 0 & m_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & m_{12} & 0 \\ k_2 \gamma_2 & m_{22} & 0 \\ k_3 \gamma_3 & m_{32} & k_3 \end{vmatrix}, \quad (15)$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ k_2 \gamma_2 & k_2 & 0 \\ k_3 \gamma_3 & 0 & k_3 \end{vmatrix},$$

$$C_{21} = \begin{vmatrix} m_{11} & k_1 & m_{13} \\ m_{21} & k_2 \gamma_2 & m_{23} \\ m_{31} & k_3 \gamma_3 & m_{33} \end{vmatrix},$$

$$C_{22} = \begin{vmatrix} k_1 & k_1 & m_{13} \\ 0 & k_2 \gamma_2 & m_{23} \\ 0 & k_3 \gamma_3 & m_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{11} & k_1 & 0 \\ m_{21} & k_2 \gamma_2 & 0 \\ m_{31} & k_3 \gamma_3 & k_3 \end{vmatrix}, \quad (16)$$

$$C_{23} = \begin{vmatrix} k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \gamma_2 & 0 \\ 0 & k_3 \gamma_3 & k_3 \end{vmatrix},$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & k_1 \\ m_{21} & m_{22} & k_2 \gamma_2 \\ m_{31} & m_{32} & k_3 \gamma_3 \end{vmatrix},$$

$$C_{32} = \begin{vmatrix} k_1 & m_{12} & k_1 \\ 0 & m_{22} & k_2 \gamma_2 \\ 0 & m_{32} & k_3 \gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{11} & 0 & k_1 \\ m_{21} & k_2 & k_2 \gamma_2 \\ m_{31} & 0 & k_3 \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad (17)$$

$$C_{33} = \begin{vmatrix} k_1 & 0 & k_1 \\ 0 & k_2 & k_2 \gamma_2 \\ 0 & 0 & k_3 \gamma_3 \end{vmatrix},$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} k_1 & m_{12} & m_{13} \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ 0 & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} \\ m_{21} & k_2 & m_{23} \\ m_{31} & 0 & m_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 \\ m_{31} & m_{32} & k_3 \end{vmatrix},$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ m_{21} & k_2 & 0 \\ m_{31} & 0 & k_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & m_{12} & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & m_{32} & k_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} k_1 & 0 & m_{13} \\ 0 & k_2 & m_{23} \\ 0 & 0 & m_{33} \end{vmatrix}, A_4 = \begin{vmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{vmatrix}. \quad (19)$$

Коэффициенты C_{ij} многочленов (14) могут быть представлены в виде:

$$C_{ij} = C_{ij}^{(2)} + \gamma_2 C_{ij}^{(2)} + \gamma_2 C_{ij}^{(3)}. \quad (20)$$

Условия $C_i(p) = 0$ (14) имеют вид:

$$C_{11}^{(1)} p^4 + C_{12}^{(1)} p^2 + C_{11}^{(1)} + \gamma_2 (C_{11}^{(2)} p^4 + C_{12}^{(2)} p^2 + C_{13}^{(2)}) +$$

$$+ \gamma_3 (C_{11}^{(3)} p^4 + C_{12}^{(3)} p^2 + C_{13}^{(3)}) = 0;$$

$$C_{21}^{(1)} p^4 + C_{22}^{(1)} p^2 + C_{23}^{(1)} + \gamma_2 (C_{21}^{(2)} p^4 + C_{22}^{(2)} p^2 + C_{23}^{(2)}) +$$

$$+ \gamma_3 (C_{21}^{(3)} p^4 + C_{22}^{(3)} p^2 + C_{23}^{(3)}) = 0;$$

$$C_{31}^{(1)} p^4 + C_{32}^{(1)} p^2 + C_{33}^{(1)} + \gamma_2 (C_{31}^{(2)} p^4 + C_{32}^{(2)} p^2 + C_{33}^{(2)}) +$$

$$+ \gamma_3 (C_{31}^{(3)} p^4 + C_{32}^{(3)} p^2 + C_{33}^{(3)}) = 0. \quad (21)$$

Если значение $\gamma_2 = \gamma_2^*$ фиксировано, то может быть построена частотная кривая из условий (21) $C_1(j\omega) = 0$:

$$\gamma_3(\omega) = \frac{C_{11}^{(1)} \omega^4 - C_{12}^{(1)} \omega^2 + C_{13}^{(1)} + (C_{11}^{(2)} \omega^4 - C_{12}^{(2)} \omega^2 + C_{13}^{(2)}) \gamma_2^*}{C_{11}^{(3)} \omega^4 - C_{12}^{(3)} \omega^2 + C_{13}^{(3)}}. \quad (22)$$

Граничные значения γ_Γ могут быть определены из условий:

$$\gamma_\Gamma = \gamma_3(\sigma_i), \gamma_\Gamma = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \gamma_3(\omega), \gamma_\Gamma = \lim_{\omega \rightarrow 0} \gamma_3(\omega),$$

$$\gamma_\Gamma = (\arg(\gamma_3'(\omega) = 0)). \quad (23)$$

Разбиение множества значений $(-\infty, +\infty)$ параметра γ_3 принимает вид:

$$(-\infty, \gamma_\Gamma^{(1)}), \{\gamma_\Gamma^{(1)}\}, (\gamma_\Gamma^{(1)}, \gamma_\Gamma^{(2)}), \{\gamma_\Gamma^{(2)}\},$$

$$\dots, \{\gamma_\Gamma^{(n)}\}, (\gamma_\Gamma^{(n)}, +\infty), \quad (24)$$

где в каждой точке или интервале набор динамических особенностей рычажных связей представлен динамическим инвариантом.

Построение динамических инвариантов рычажных отношений. Пусть параметры системы (рис. 1):

$$x_1 = 0, y_1 = l_1, x_2 = -l_2, y_2 = -l_3, x_3 = l_2,$$

$$y_3 = -l_3, l_1 = 0,5 \text{ м}, l_2 = 0,1 \text{ м}, l_3 = 0,3 \text{ м}, \quad (25)$$

$$M = 100 \text{ кг},$$

$$k_1 = 2,0 \cdot 10^5 \text{ Н/м}, k_2 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Н/м},$$

$$k_3 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Н/м}, J_1 = 50 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad (26)$$

$$J_2 = 80 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Собственные частоты:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \approx 6,32 \text{ рад/с}, \sigma_2 \approx 28,07 \text{ рад/с}, \\ \sigma_3 \approx 63,74 \text{ рад/с}. \end{aligned} \quad (27)$$

Собственная частота σ_1 совпадает с одной из частот обнуления амплитуд колебаний θ_1 , не зависящей от коэффициента связанности γ_3 :

$$\theta_1 \approx 6,32 \text{ рад/с}. \quad (28)$$

Для построения разбиения (24) строится частотная кривая (22) на интервале $(0, +\infty)$ (рис. 3а):

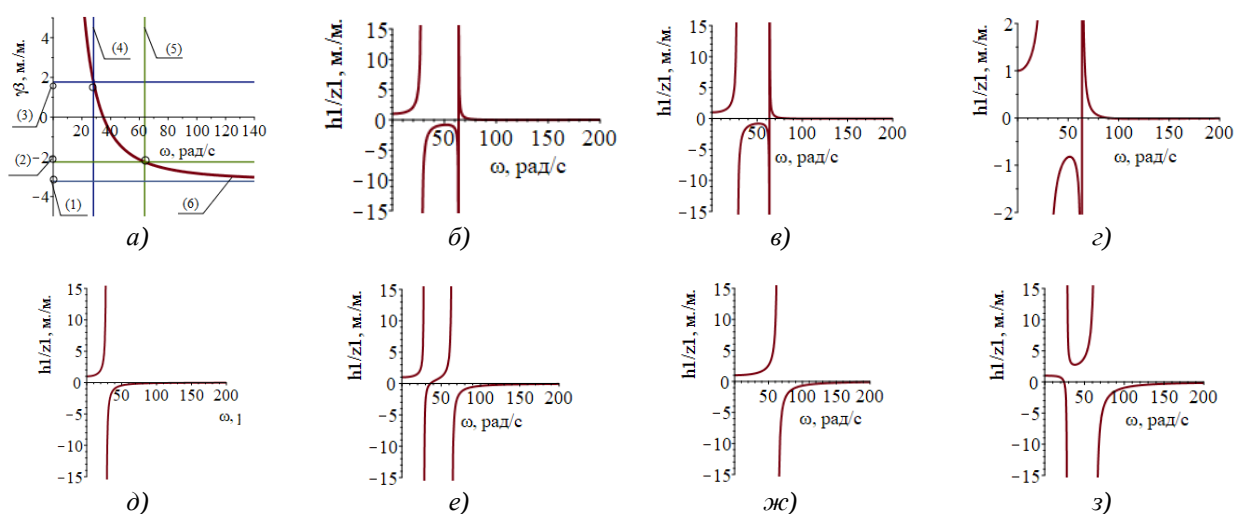


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики с фиксированными динамическими инвариантами:

а) частотная кривая; 1 – $\gamma_3^{(kp)} \approx -3,23$; 2 – $\gamma_3^{(3)} \approx -2,26$; 3 – $\gamma_3^{(2)} \approx 1,77$; 4 – линия $\omega = \sigma_2$; 5 – линия $\omega = \sigma_3$; 6 – частотная кривая; б) $\gamma_3 = -13,23, +S_0^2 F_1^2$; в) $\gamma_3 = -3,23, +S_0^2 F_1^2$; г) $\gamma_3 = -2,75, +S_1^2 F_2^2$; д) $\gamma_3 = -2,26, +S_0^1 F_1^1$; е) $\gamma_3 = -0,25, +S_1^2 F_2^2$; ж) $\gamma_3 = 1,77, +S_0^1 F_1^1$; з) $\gamma_3 = 3, +S_0^2 F_1^2$

Примечание: составлено авторами.

Существенные особенности (рис. 3 (б–з)) отображаются с помощью динамических инвариантов [8] $+S_k^l F_m^n$, где l – количество резонансов, k – количество режимов обнуления колебаний, n – количество положительных, m – отрицательных форм динамического взаимодействия, «+» – означает, что значение

Разбиение (24) принимает вид:

$$\begin{aligned} (-\infty, -3,23), \{-3,23\}, \\ (-3,23, -2,26), \{-2,26\}, (-2,26, 1,77), \\ \{1,77\}, (1,77, +\infty). \end{aligned} \quad (30)$$

На элементах (30) амплитудно-частотные характеристики сохраняют существенные особенности (рис. 3 (б–з)).

амплитудно-частотной характеристики для нулевой частоты положительно, «–» – отрицательно (табл. 1).

График характеристик динамических инвариантов имеет вид кусочно-постоянной функции (рис. 4).

Таблица 1

Динамические инварианты

	1	2	3	4	5	6	7
I	$(-\infty, \gamma_3^{(kp)})$	$\{\gamma_3^{(kp)}\}$	$(\gamma_3^{(kp)}, \gamma_3^{(3)})$	$\{\gamma_3^{(3)}\}$	$(\gamma_3^{(3)}, \gamma_3^{(2)})$	$\{\gamma_3^{(2)}\}$	$(\gamma_3^{(2)}, \infty)$
II	$+S_0^2 F_1^2$	$+S_0^2 F_1^2$	$+S_1^2 F_2^2$	$+S_0^1 F_1^1$	$+S_1^2 F_2^2$	$+S_0^1 F_1^1$	$+S_0^2 F_1^2$
III	$+J_5$	$+J_5$	$+J_7$	$+J_3$	$+J_7$	$+J_3$	$+J_5$

Примечание: составлено авторами.

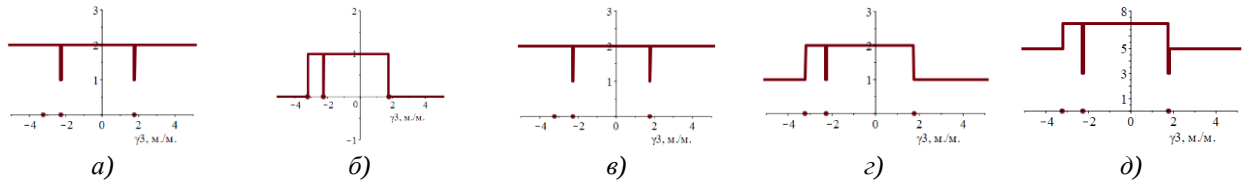


Рис. 4. Характеристики динамических инвариантов:

а) количество резонансов; б) количество частот обнуления;

в) количество положительных форм; г) количество отрицательных форм;

д) интегральная характеристика; $\gamma_3^{(kp)} \approx -3,23$, $\gamma_3^{(3)} \approx -2,26$, $\gamma_3^{(2)} \approx 1,77$ – граничные значения

Примечание: составлено авторами.

Варьирование γ_3 приводит к изменению интегральной характеристики, равной сумме частных характеристик динамических инвариантов (рис. 4 г).

Рычажная интерпретация динамических состояний механических колебательных систем. Амплитудно-частотная характеристика, отображающая рычажную связь между амплитудами колебаний координат и кинематических возмущений, рассматриваемых в качестве выходного и входного сигналов, может быть интерпретирована в виде семейства конкретных рычагов, зависящего от частоты. Для построения интерпретации рассматривается рычаг (рис. 5). Поворот рычага на малый угол θ приводит к верти-

кальным смещениям точек Z и H на величины Δz и Δh :

$$\theta \approx \frac{\Delta z}{l_z} = \frac{\Delta h}{l_H}. \quad (30)$$

Соответствие между амплитудно-частотной характеристикой и рычагом (30) строится на основе (13):

$$A_{11}(\omega) = \frac{\bar{h}_1(j\omega)}{\bar{z}_1(j\omega)} = \frac{\Delta h}{\Delta z} = \frac{l_H}{l_z}, \quad (31)$$

где Δz – «входное» смещение, Δh – «выходное» смещение. На основе (31) для каждой частоты ω значению $A_{11}(\omega)$ сопоставлено отношение плеч l_H и l_z или отношение Δh и Δz .

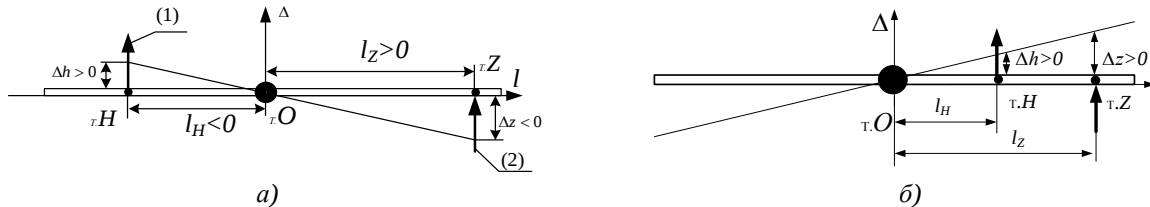


Рис. 5. Рычаг:

а) рычаг первого рода (двуплечный рычаг); б) рычаг второго рода (одноплечный рычаг);

1 – «выходное» смещение; 2 – «входное» смещение

Примечание: составлено по [11].

Если плечо задано $l_z = \text{const} > 0$, то плечо l_H определяется на основе (31) по формуле:

$$l_H = A_{11}(\omega) l_z. \quad (32)$$

В рамках данного исследования для фиксированного плеча $l_z = \text{const} > 0$ «основным» рычагом считается рычаг с плечами $A_{11}(\omega) l_z$, l_z , наравне к которым может быть определен «двойственный» рычаг, если задано плечо $l_H = \text{const} > 0$, а плечо l_z найдено по формуле:

$$l_z = \frac{l_H}{A_{11}(\omega)}. \quad (33)$$

Двойственный рычаг будет иметь плечи l_H , $l_H/A_{11}(\omega)$. Выражения (32), (33) каждой паре $(\omega, A_{11}(\omega))$ при $l_z = \text{const} > 0$ для рычага и $l_H = \text{const} > 0$ – для двойственного рычага определяют точки H и Z , отношения плеч которых имеют рычажное отношение $A_{11}(\omega)$. Для заданной частоты ω формально можно полагать, что для некоторого $l_z > 0$ пара $(l_z,$

$A_{11}(\omega) l_Z$ – «основной рычаг», для некоторого $l_H > 0 - (l_H/A_{11}(\omega), l_H)$ – двойственный рычаг. В свою очередь, совокупность $\{(l_Z, A_{11}(\omega) l_Z), \omega \in [0, \infty)\}$ – обобщенный рычаг, а для некоторого $l_H > 0$ совокупность $\{(l_H/A_{11}(\omega), l_H), \omega \in [0, \infty)\}$ – двойственный рычаг.

Динамические состояния резонансов, обнулений амплитуд колебаний, знакоопределенные формы динамических взаимодействий отображаются рычагами с нулевыми или бесконечными плечами, рычагами 1 или 2-го рода. Ветви амплитудно-частотных характеристик переходят в конечный или бесконечные интервалы. Для объединения интервалов строится проекция бесконечной прямой OX на окружность (рис. 6). Проекция определяется уравнением окружности с центром в точке $O(0, R)$ и прямой l_x , проходящей через точку $O_1(0, 2R)$ и точку H с координатой $(l_H, 0)$:

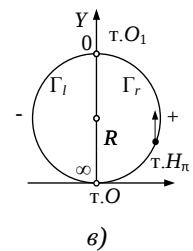
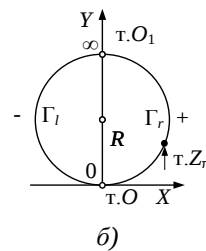
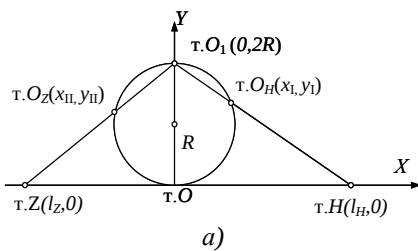


Рис. 6. Проекция рычагов на окружность:

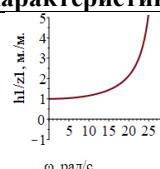
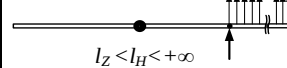
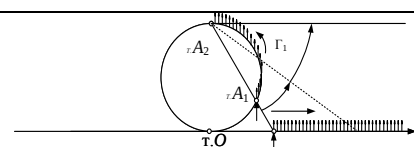
а) проекции точек H, Z рычага на точки O_H, O_Z окружности; б) проекция рычага, дуга Γ_l – проекция рычагов 1-го рода, дуга Γ_r – проекция рычагов 2-го рода; в) проекция двойственного рычага
 Примечание: составлено авторами.

Для представления совокупности значений амплитудно-частотной характеристики с помощью рычагов выбирается частотный интервал монотонности (табл. 2, столбцы а, б), затем с учетом фиксированного значения плеча $l_Z = \text{const} > 0$ точки Z строятся точки H с координатами l_H с помощью соотношения (32).

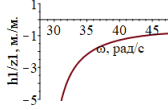
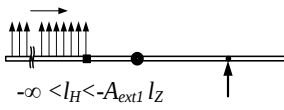
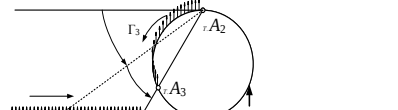
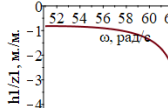
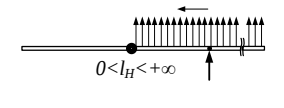
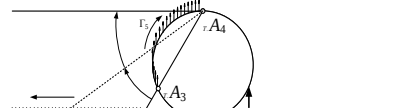
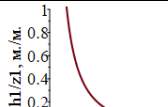
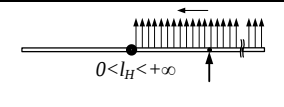
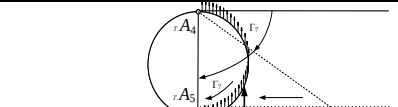
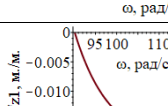
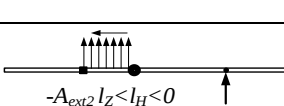
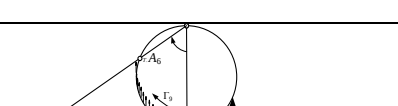
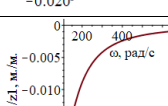
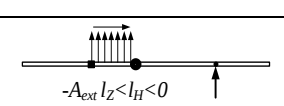
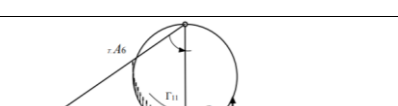
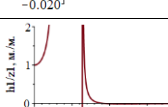
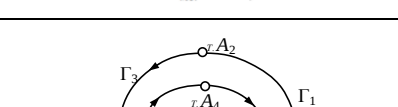
Построенные области точек H (табл. 2, столбец в) проецируются с помощью отображения (36) на окружность (табл. 2, столбец г). При рассмотрении частотного интервала $(0, +\infty)$ может быть сформирован обобщенный рычаг системы (табл. 2, строка 7, столбец б) путем объединения дуг $\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_5, \Gamma_7, \Gamma_9, \Gamma_{11}$.

Таблица 2

Построение обобщенного рычага

	а	б	в	г
0	Область определения, область значения	Ветви амплитудно-частотной характеристики	Рычаги 1 или 2-го рода $l_Z = \text{const} > 0$, l_H – переменная	Отображение рычага на окружность
1	$\omega \in (0, \sigma_1)$, $1 < A_{11}(\omega) < \infty$			

Окончание табл. 2

0	Область определения, область значения	Ветви амплитудно-частотной характеристики	Рычаги 1 или 2-го рода $l_Z = \text{const} > 0$, l_H – переменная	Отображение рычага на окружность
2	$\omega \in (\sigma_1, \omega_{\text{ext}1})$, $-\infty < A_{11}(\omega) < -A_{\text{ext}1}$, $A_{\text{ext}1} > 0$			
3	$\omega \in (\omega_{\text{ext}1}, \sigma_2)$ $-\infty < A_{11}(\omega) < -A_{\text{ext}1}$			
4	$\omega \in (\sigma_2, \omega_0)$ $0 < A_{11}(\omega) < \infty$			
5	$\omega \in (\omega_0, \omega_{\text{ext}2})$ $-A_{\text{ext}2} < A_{11}(\omega) < 0$			
6	$\omega \in (\omega_{\text{ext}2}, +\infty)$ $-A_{\text{ext}2} < A_{11}(\omega) < 0$			
7	$\omega \in (0, +\infty)$ $-\infty < A_{11}(\omega) < \infty$			

Примечание: составлено авторами.

Обобщенный рычаг (табл. 2, столбец 2, строка 7) системы отображает динамические особенности в виде резонанса, режимов обнуления посредством специфических точек на кривой рычага, образованной объединением.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Отображение совокупности динамических состояний системы в рамках представлений об обобщенных рычагах. Совокупности динамических состояний, соответствующих разбиению (30), могут быть представлены обобщенными рычагами (рис. 7–8).

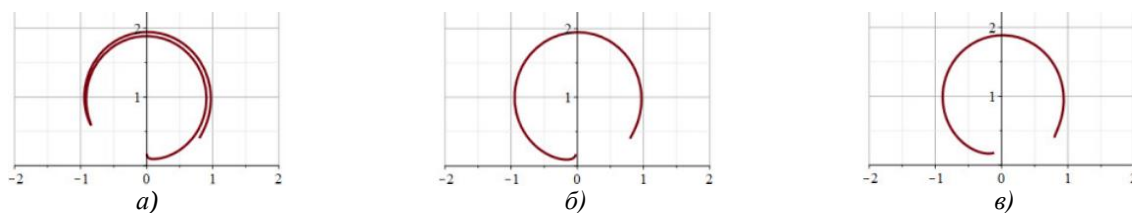


Рис. 7. Обобщенные рычаги, отображающие «точечные» динамические инварианты:
 а) $+S_0^2F_1^2 - \gamma_3 = -3,23$; б) $+S_0^1F_1^1 - \gamma_3 = -2,26$; в) $+S_0^1F_1^1 - \gamma_3 = 1,77$

Примечание: составлено авторами.

Совокупность обобщенных рычагов включает рычаги (рис. 7) для точечных значений коэффициентов связности $\{-3,23\}$, $\{-2,26\}$,

$\{1,77\}$ и рычаги (рис. 8) для интервальных значений $(-\infty, -3,23)$, $(-3,23, -2,26)$, $(-2,26, 1,77)$, $(1,77, +\infty)$.

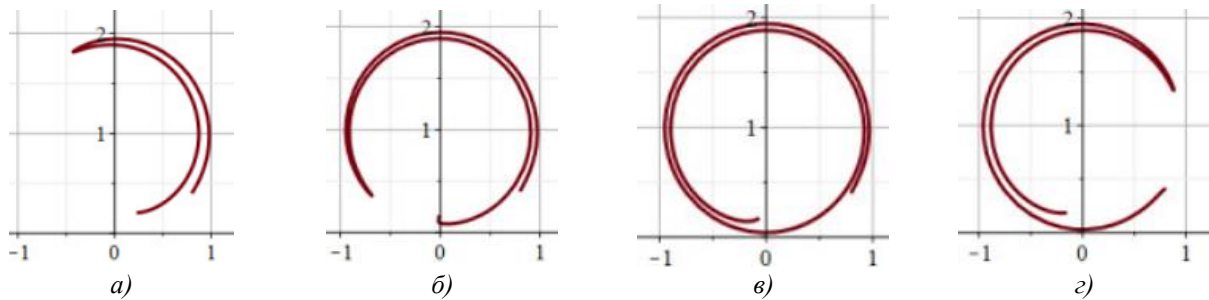


Рис. 8. Обобщенные рычаги, отображающие «интервальные» динамические инварианты:

а) $+S_0^2F_1^2 - \gamma_3 = -13,23$; б) $+S_1^2F_2^2 - \gamma_3 = -2,75$; в) $+S_1^2F_2^2 - \gamma_3 = -0,25$; з) $+S_0^2F_1^2 - \gamma_3 = 3,54$

Примечание: составлено авторами.

Варьирование коэффициента связности γ_3 в сколь угодно малых окрестностях точечных элементов разбиения вызывает скачкообразное изменение форм и размеров обобщенных рычагов, которое может рассматриваться как своеобразная структурная неустойчивость,

связанная с особенностями характеристик динамических инвариантов (рис. 4).

Обобщенный рычаг может быть представлен в пространственной форме, если в качестве третьего измерения добавить частоту внешнего возмущения (рис. 9–10).

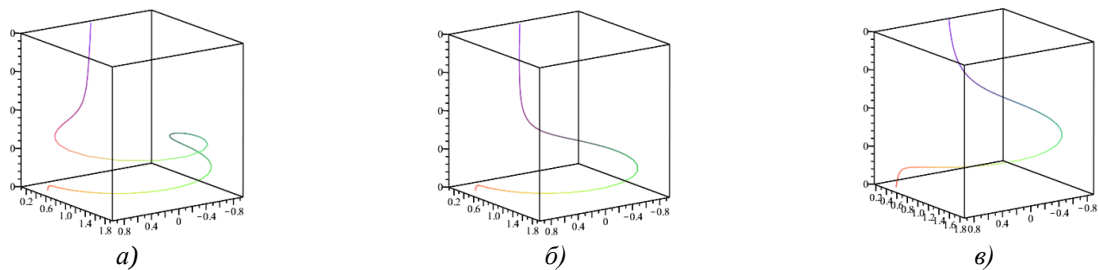


Рис. 9. Пространственное отображение обобщенных рычагов с «точечными» динамическими инвариантами:

а) $+S_0^2F_1^2 - \gamma_3 = -3,23$; б) $+S_0^1F_1^1 - \gamma_3 = -2,26$; в) $+S_0^1F_1^1 - \gamma_3 = 1,77$

Примечание: составлено авторами.

Обобщенные рычаги в пространственном представлении отличаются формой и разме-

рами образующих кривых, наличием особых точек.

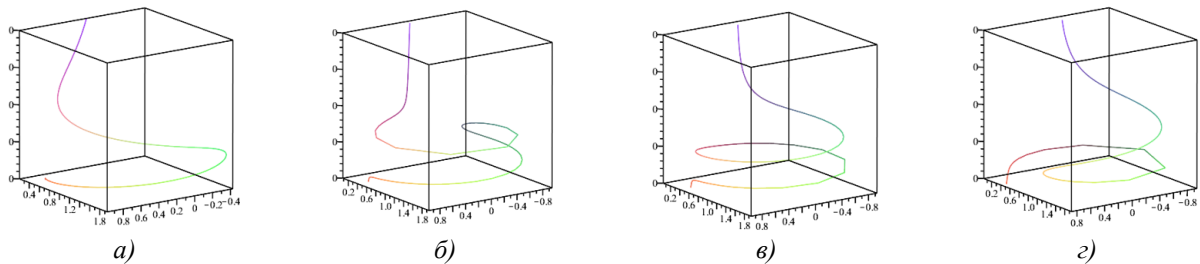


Рис. 10. Пространственное отображение обобщенных рычагов

с «интервальными» динамическими инвариантами:

а) $+S_0^2F_1^2 - \gamma_3 = -13,23$; б) $+S_1^2F_2^2 - \gamma_3 = -2,75$; в) $+S_1^2F_2^2 - \gamma_3 = -0,25$; з) $+S_0^2F_1^2 - \gamma_3 = 3,54$

Примечание: составлено авторами.

Изменение коэффициента связности внешних возмущений определяет форму и размер обобщенного рычага механической колебательной системы. Варьирование коэффициента связности в окрестностях граничных значений приводит к своеобразной «поломке» обобщенного рычага, выражающейся в скачкообразном изменении его формы и размера.

Динамические состояния механической колебательной системы могут быть отображены посредством статической условной рычажной структуры, характеристики которой зависят от частот и связности внешних возмущений.

Все рисунки и таблицы составлены авторами с использованием программного пакета символьной арифметики [12].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках методологии структурного математического моделирования разработан системный подход к решению задач оценки, контроля и формирования динамических состояний механических колебательных систем, находящихся в условиях связанных вибрационных нагружений. Для системы, динамическое

состояние которой оценивается на основе рычажных связей, разработана рычажная интерпретация концепции динамических состояний, основанная на обобщении представлений о рычагах 1 и 2-го рода. Разработана система обобщенных представлений, позволяющая отобразить роль связности внешних возмущений в формировании разнообразия динамических состояний механических колебательных систем. Показано, что совокупность обобщенных динамических состояний может быть отображена с помощью условной рычажной структуры, в которой изменение частоты и связности внешних возмущений отображается с помощью рычажных характеристик. Установлено, что в рамках рычажной интерпретации изменение связности внешних возмущений способно приводить к специфической неустойчивости, проявляющейся в скачкообразном изменении рычажных характеристик. Можно полагать, что технические объекты, находящиеся в условиях связанных вибрационных воздействий, способны существенным образом изменять совокупность динамических состояний.

Список источников

1. Москвичев В. В., Махутов Н. А., Шокин Ю. И. и др. Прикладные задачи конструкционной прочности и механики разрушения технических систем. Новосибирск : Наука, 2021. 796 с.
2. Ганиев Р. Ф., Низамов Х. Н., Дербуков Е. И. Волновая стабилизация и предупреждение аварий на трубопроводах. М. : Изд-во МГТУ, 1996. 257 с.
3. Острейковский В. А., Соловьев Н. А., Шевченко Е. Н. Анализ состояния обеспечения работоспособности компрессорных станций магистральных газопроводов на этапе эксплуатации // Труды международного симпозиума «Надежность и качество». 2018. Т. 1. С. 61–64.
4. De Silva C. W. Vibration. Fundamentals and practice. Boca Raton, Florida: CRC Press; 2006. 1064 p.
5. Ганиев Р. Ф., Кононенко В. О. Колебание твердых тел. М. : Наука, 1976. 431 с.
6. Коловский М. З. Автоматическое управление виброзащитными системами. М. : Наука, 1976. 319 с.
7. Eliseev S. V., Eliseev A. V. Theory of oscillations. Structural mathematical modeling in problems of dynamics of technical objects. Cham, Switzerland: Springer Nature Switzerland AG; 2020. 521 p.
8. Елисеев А. В., Ситов И. С., Кузнецов Н. К. Системный подход в оценке полной совокупности динамических состояний технических объектов в условиях связанных вибрационных нагружений // Системы. Методы. Технологии. 2023. № 1. С. 7–20.

References

1. Moskvichev V. V., Makhutov N. A., Shokin Yu. I. et al. Prikladnye zadachi konstruktсионnoy prochnosti i mekhaniki razrusheniia tekhnicheskikh sistem. Novosibirsk: Nauka; 2021. 796 p. (In Russian).
2. Ganiev R. F., Nizamov Kh. N., Derbukov E. I. Volnovaia stabilizatsiia i preduprezhdenie avarii na truboprovodakh. Moscow: Publishing House of the BMSTU; 1996. 257 p. (In Russian).
3. Ostreykovsky V. A., Solovyev N. A., Shevchenko E. N. Analiz sostoiianiia obespecheniia rabotosposobnosti kompressornykh stantsii magistralnykh gazoprovodov na etape ekspluatatsii. *International Symposium "Reliability & Quality"*. 2018;1:61–64. (In Russian).
4. De Silva C. W. Vibration. Fundamentals and practice. Boca Raton, Florida: CRC Press; 2006. 1064 p.
5. Ganiev R. F., Kononenko V. O. Kolebanie tverdykh tel. Moscow: Nauka; 1976. 431 p. (In Russian).
6. Kolovsky M. Z. Avtomaticheskoe upravlenie vibrozashchitnymi sistemami. Moscow: Nauka; 1976. 319 p. (In Russian).
7. Eliseev S. V., Eliseev A. V. Theory of oscillations. Structural mathematical modeling in problems of dynamics of technical objects. Cham, Switzerland: Springer Nature Switzerland AG; 2020. 521 p.
8. Eliseev A. V., Sitov I. S., Kuznetsov N. K. Systematic approach to the assessment of the full set of dynamic states of technical objects under conditions of cohe-

9. Елисеев С. В., Каргапольцев С. К., Большаков Р. С. и др. Рычажные связи: возможности формирования динамических состояний в механических колебательных системах // *Транспорт Урала*. 2020. № 3. С. 17–23. DOI 10.20291/1815-9400-2020-3-17-23.
10. Лурье А. И. Операционное исчисление и применение в технических приложениях. М. : Наука, 1959. 368 с.
11. Крайнев А. Ф. Словарь-справочник по механизмам. М. : Машиностроение, 1987. 560 с.
12. Maple. URL: <https://www.maplesoft.com> (дата обращения: 11.04.2023).
9. Eliseev S. V., Kargapol'tsev S. K., Bolshakov R. S. et al. Lever ties: Possibilities of creating dynamic conditions in mechanical oscillation systems. *Transport of the Urals*. 2020;(3):17–23. DOI 10.20291/1815-9400-2020-3-17-23. (In Russian).
10. Lurye A. I. Operatsionnoe ischislenie i primeneniye v tekhnicheskikh prilozheniiakh. Moscow: Nauka; 1959. 368 p. (In Russian).
11. Krainev A. F. Slovar-spravochnik po mekhanizmam. Moscow: Mashinostroyeniye; 1987. 560 p. (In Russian).
12. Maple. URL: <https://www.maplesoft.com> (accessed: 11.04.2023).

Информация об авторах

А. В. Елисеев – кандидат технических наук, доцент.
Н. К. Кузнецов – доктор технических наук, профессор.

Information about the authors

A. V. Eliseev – Candidate of Sciences (Engineering), Docent.
N. K. Kuznetsov – Doctor of Sciences (Engineering), Professor.