Научная статья
УДК 519.862.6
DOI 10.35266/1999-7604-2024-1-11

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ТЕСТОВ ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНОСТИ

Артем Дмитриевич Черемухин
Нижегородский государственный инженерно-экономический университет,
Княгинино, Россия
ngieu.cheremuhin@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0003-4076-5916

Аннотация. В данной статье рассматривается эффективность различных статистических тестов, предназначенных для обнаружения гетероскедастичности в модели. Описывается методология исследования, принцип построения синтетических данных с разными типами гетероскедастичности. Приведены детальные результаты анализа, определены лучшие тесты для решения задач детектирования гомо- и гетероскедастичности. Применен аппарат деревьев классификации для определения лучших тестов в зависимости от свойств выборки, показано наличие данных закономерностей. Отмечено, что в практических работах необходимо проведение дополнительных исследований, направленных на установление лучшего статистического теста при наблюдаемых свойствах данных. Кроме того, сделан вывод о том, что для рассматриваемых типов гетероскедастичности все выбранные тесты показывают значительный процент ошибок, что говорит о необходимости продолжения соответствующих теоретических исследований и разработке новых способов детектирования разных форм гетероскедастичности.

Ключевые слова: регрессия, линейная модель, гетероскедастичность, типы гетероскедастичности, статистический тест, ошибка первого рода, ошибка второго рода

Для цитирования: Черемухин А. Д. Оценка эффективности тестов гетероскедастичности // Вестник кибернетики. 2024. Т. 23, № 1. С. 81–88. DOI 10.35266/1999-7604-2024-1-11.

Original article

EVALUATING EFFECTIVENESS OF TESTS FOR HETEROSCEDASTICITY

Artem D. Cheremukhin
Nizhny Novgorod State University of Engineering and Economics, Knyaginino, Russia
ngieu.cheremuhin@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0003-4076-5916

Abstract. The article studies the effectiveness of various statistical tests for heteroscedasticity in a model. A research design and a principle for building synthetic data with various types of heteroscedasticity are described. The findings of an analysis are given. The most effective tests for detecting homo- and heteroscedasticity are determined. A classification trees mechanism is applied to identify the most effective tests according to the sampling properties, and such pattern is demonstrated. In applied studies, there is a need to carry out further research aimed at detecting the most suitable statistical test based on the given data properties. In addition, it is concluded that each considered test fails for different types of heteroscedasticity. Thus, it is necessary to conduct further theoretical studies in the field as well as design new approaches for detecting various types of heteroscedasticity.

Keywords: regression, linear model, heteroscedasticity, types of heteroscedasticity, statistical test, type 1 error, type 2 error

For citation: Cheremukhin A. D. Evaluating effectiveness of tests for heteroscedasticity. *Proceedings in Cybernetics.* 2024;23(1):81–88. DOI 10.35266/1999-7604-2024-1-11.

ВВЕДЕНИЕ

Активное использование методов анализа данных для решения большого комплекса практических задач актуализировало и вопрос о границах применимости тех или иных методов. Например, для случая классической регрессии общеизвестно, что метод наименьших квадратов дает несмещенные и эффективные оценки коэффициентов только при выполнении условий Гаусса – Маркова. В противном случае возможно получение смещенных оценок коэффициентов, что может привести к серьезным ошибкам при внедрении модели на практике.

Среди всех условий Гаусса – Маркова самым сложно проверяемым является условие на гомоскедастичность – условие на отсутствие зависимости между дисперсией ошибки модели и значениями независимой переменной. Однако в последнее время в разных программных пакетах (например, в пакете skedastic для языка R) появилось значительное количество реализаций разных статистических тестов, проверяющих гипотезу о гомоскедастичности остатков.

Большое количество теоретических подходов к исследованию понятия гомоскедастичности привело к появлению значительного числа тестов, проверяющих разные типы зависимостей между ошибками модели и величиной независимой переменной,– а это значит, что некоторые тесты гомоскедастичности эффективны при одних входных данных, а другие – при других.

Наличием большого числа тестов можно объяснить и частое игнорирование исследователями в разных сферах науки [1, 2] процедуры оценки выполнимости Гаусса – Маркова.

Целью данной работы является обнаружение с помощью вычислительного эксперимента самых эффективных статистических тестов для разных случаев гетероскедастичности.

К вопросу оценки эффективности тестов гетероскедастичности исследователи периодически возвращаются – можно выделить работы [3–7]. В отличие от последней работы [7] в этой сфере, данное исследование сосредоточено на моделях гетероскедастичности, в которых значение ошибок зависит от значений независимой переменной; кроме того, исследуется не только эффективность тестов в плане определения гетероскедастичности, но и их эффективность в плане определения гомоскедастичности.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Все расчеты, проведенные в ходе данного исследования, были выполнены с помощью языка R. В качестве объектов изучения были взяты статистические тесты, реализованные в пакете skedastic: Анкомба [8], BAMSET-тест (модификация *M*-теста Бартлетта, выполненная Рамсеем [9]), Бикеля [10], Бройша – Погана [11], Кука – Вейзеберга [12], Эванса – Кинга [13], Голдфильда – Квандта [14], Харрисона – Маккэйба [15], Хорна [16], Симонова – Цая [17], Вербыла [18], Уайта [19], Уилкокса – Келемана [20], Юсе [21], Чжоу [22].

Общая концепция оценки эффективности тестов основана на создании синтетических данных, по части которых мы точно знаем, что гетероскедастичности там нет, а по части – точно знаем, что она есть. Указанные выше тесты, однако, различаются по характеру рассматриваемой зависимости между ошибками и значениями независимой переменной. Поэтому для обобщенной оценки эффективности тестов использовались данные, сгенерированные по различным моделям:

– модель линейной зависимости с остатками, подчиненными нормальному закону распределения;

– модель линейной зависимости с нормально распределенными остатками, значение которых гиперболически зависит от значений независимой переменной:

$$y = a \cdot x + b + \varepsilon \cdot \frac{1}{(1+0.1|x|)^2}; \quad (1)$$

– модель линейной зависимости с нормально распределенными остатками, значение которых уменьшается при уменьшении значений независимой переменной:

$$y = a \cdot x + b + \varepsilon \cdot (1 + 3 \cdot \frac{x}{\max(x)}); \quad (2)$$

– модель линейной зависимости с нормально распределенными остатками, значение которых уменьшается при возрастании значений независимой переменной:

$$y = a \cdot x + b + \varepsilon \cdot \frac{1}{(1+0.025 \cdot |x-\min(x)|)^2}; \quad (3)$$

– модель линейной зависимости с нормально распределенными остатками, значение которых увеличивается при возрастании значений независимой переменной:

$$y = a \cdot x + b + \varepsilon \cdot (1 + 3 \cdot \frac{x-\min(x)}{\max(x)}); \quad (4)$$

– модель линейной зависимости с нормально распределенными остатками, знак которых различен для разных частей выборки:

$$y = a \cdot x + b + |\varepsilon| \cdot \begin{cases} 1 & \text{для одной части выборки} \\ -1 & \text{для второй части выборки.} \end{cases} \quad (5)$$

Графическое изображение всех шести типов синтетических данных, на которых оценивается эффективность тестов, представлено на рисунке.

Общий алгоритм генерации одного экземпляра синтетических данных для исследования состоит из следующих шагов:

– определяется размер выборки (случайно выбирается число из интервала [1,5;3], которое потенцируется по основанию 10 и округляется – количество элементов в выборке, таким образом, может быть от 30 до 1 000);

– генерируются значения независимой переменной (из нормального распределения, среднее значение которого находится в диапазоне от 0,1 до 1 000, а стандартное отклонение меняется от 1 до 5);

– генерируется параметр a линейной зависимости (случайно выбирается число из интервала [1,5;3], которое потенцируется по основанию 2 и округляется до сотых);

– генерируется параметр b линейной зависимости (выбирается случайно из интервала, образованного максимальным и минимальным значением независимой переменной);

– рассчитывается величина зависимой переменной без учета остатков, и на основе ее дисперсии генерируется вектор ошибок (ошибки распределены нормально, их среднее равно 0, среднеквадратическое отклонение выбирается из диапазона от среднеквадратического отклонения зависимой переменной до удвоенного значения среднеквадратического отклонения);

– рассчитывается доля значений для модели 6, которая определяет процент ошибок, взятых с положительным знаком;

– рассчитываются шесть векторов значений зависимой переменной для разных моделей гетероскедастичности.

Данный цикл был повторен 10 000 раз – в результате было получено 1 000 датафреймов разного размера, с разными параметра-

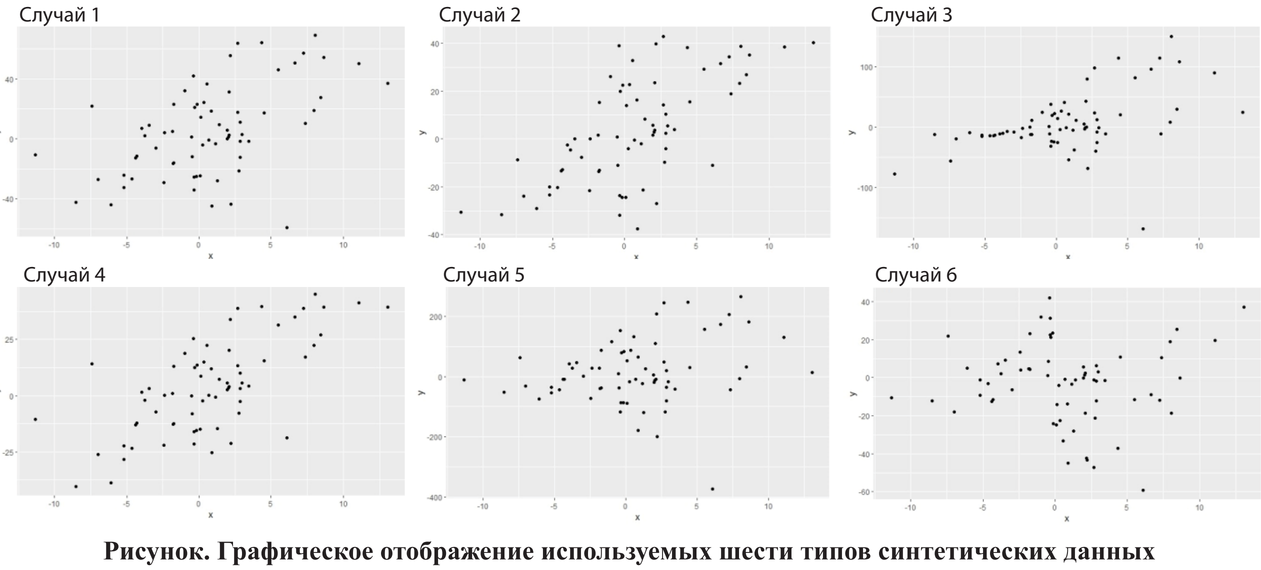

Рисунок. Графическое отображение используемых шести типов синтетических данных
Примечание: составлено автором на основании данных, полученных в исследовании.

ми независимой переменной, распределения ошибок и линейной зависимости.

После этого всеми вышеперечисленными статистическими тестами на уровне значимости в 0,05 были исследованы сгенерированные датафреймы. Полученные результаты исследовались двумя способами:

– путем построения сравнительных таблиц по тестам;

– через использование деревьев решений для выявления оптимального теста в зависимости от параметров выборок.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Сравнительная оценка эффективности тестов представлена ниже (таблица).

Согласно данным таблицы, можно сделать следующие выводы:

– тесты Юсе и Уилкокса – Келемана на представленных данных показали 100-процентную точность на данных без гетероскедастичности. Соответствующие тесты показывают крайне низкую вероятность ошибок первого рода, т. е. ошибочного отклонения гипотезы о гомоскедастичности;

– для случая гетероскедастичности при гиперболической зависимости остатков от значений независимой переменной (модель 2) все тесты, кроме BAMSET-теста, показывают более 50 % ошибок. Большая вероятность ошибок второго рода говорит об отсутствии надежных способов идентификации данного типа гетероскедастичности;

– для случая гетероскедастичности с уменьшением значений ошибок при уменьшении значений независимой переменной (модели 3 и 4) констатируем, что наилучший результат показывает тест Эванса – Кинга – примерно в 85–88 % случаев он позволил верно отвергнуть нулевую гипотезу о гомоскедастичности;

– для случая гетероскедастичности с увеличением значения ошибок при возрастании значений независимой переменной (модель 5) лучшие результаты показывают BAMSET-тест и тест Эванса – Кинга – в среднем в 1 случае из 12 они не позволяют отвергнуть ошибочную гипотезу о гомоскедастичности;

– для случая гетероскедастичности с изменением знака (модель 6) все тесты, кроме BAMSET-теста, показывают более 50 % ошибок. Большая вероятность ошибок второго рода говорит об отсутствии надежных способов идентификации данного типа гетероскедастичности.

Общий вывод позволяет констатировать большую эффективность BAMSET-теста и теста Эванса – Кинга в части сравнительно низкой вероятности ошибки второго рода

Таблица

Процент ошибок статистических тестов для разных моделей гетероскедастичности

Тест	Номер модели					
	1	2	3	4	5	6
Анкомба	4,62	83,71	37,12	16,20	32,50	100,00
BAMSET	0,19	43,93	32,43	20,93	16,19	39,47
Бикеля	4,67	99,93	95,30	95,37	95,33	67,47
Бройша – Погана	4,62	83,71	32,53	16,16	32,46	100,00
Кука – Вейзеберга	0,02	83,63	27,91	20,76	20,91	99,99
Эванса – Кинга	39,41	62,77	16,32	11,56	16,28	76,85
Голдфильда – Квандта	0,04	78,89	32,49	16,33	20,87	83,84
Харрисона – Маккэйба	11,58	67,40	32,56	20,91	32,52	99,89
Хорна	4,7	79,01	32,49	16,32	32,46	99,99
Симонова – Цая	0,02	83,63	27,91	20,76	20,91	99,99
Вербыла	0,02	83,63	27,91	20,76	20,90	99,99
Уайта	0,14	71,83	32,50	20,76	48,65	99,99
Уилкокса – Келемана	0	95,25	48,70	16,39	37,09	99,96
Юсе	0	60,35	53,36	72,07	99,99	99,88
Чжоу	11,68	99,98	27,91	83,60	55,95	-

Примечание: составлено по результатам расчетов автора.

и тестов Юсе, Уилкокса – Келемана в части низкой вероятности ошибки первого рода.

Однако сделанные выводы являются общими – возможно, при некоторых особенностях выборки некоторые статистические тесты обладают существенно большей эффективностью, чем другие. Для диагностики этого нами был использован метод деревьев классификации. Его применение к смоделированным данным позволило сделать следующие выводы:

– для случая с отсутствием гетероскедастичности все 15 рассмотренных тестов верно принимают нулевую гипотезу при следующих условиях: коэффициент корреляции между зависимой и независимой переменной меньше 0,747, стандартное отклонение независимой переменной больше 17,48;

– для случая гетероскедастичности при гиперболической зависимости остатков от значений независимой переменной (модель 2) 9 из 15 тестов верно отвергают нулевую гипотезу при следующих условиях: истинный коэффициент наклона в линейной модели находится в диапазоне от 0,36 до 6,42, а соотношение коэффициента наклона к стандартному отклонению независимой переменной меньше 0,636;

– для случая гетероскедастичности с уменьшением значений ошибок при уменьшении значений независимой переменной (модель 3) 13 из 15 тестов верно отвергают нулевую гипотезу при небольших значениях независимой переменной (среднее значение независимой переменной меньше 4,73);

– для случая гетероскедастичности с уменьшением значений ошибок при уменьшении значений независимой переменной (модель 4) 14 из 15 тестов верно отвергают нулевую гипотезу при выполнении следующих условий: стандартное отклонение зависимой переменной меньше 22,1, истинный коэффициент наклона в линейной модели меньше 0,847, коэффициент корреляции между зависимой и независимой переменной больше 0,95;

– для случая гетероскедастичности с увеличением значения ошибок при возрастании значений независимой переменной (модель 5) 12 из 15 тестов верно отвергают нулевую гипотезу при коэффициенте корреляции между зависимой и независимой переменной вне диапазона (0,38;0,52);

– для случая гетероскедастичности с изменением знака ошибок (модель 6) 5 тестов из 15 верно отвергают нулевую гипотезу при среднем значении зависимой переменной от 637 до 715.

Далее был проведен более детальный анализ по областям эффективности тестов. Для случая с отсутствием гетероскедастичности можно сделать следующие выводы:

– если среднее значение независимой переменной меньше 87,37, то в 99,7 % случаев лучшим является тест Бикеля;

– если среднее значение независимой переменной больше 87,37, соотношение коэффициента наклона к стандартному отклонению независимой переменной меньше 0,74, среднее значение независимой переменной меньше 906, то в 99,5 % случаев лучшим является тест Голдфельда – Квандта;

– если среднее значение независимой переменной больше 87,37, соотношение коэффициента наклона к стандартному отклонению независимой переменной меньше 0,74, среднее значение независимой переменной больше 906, то в 98,2 % случаев лучшим является тест Бикеля;

– если среднее значение независимой переменной больше 87,37, соотношение коэффициента наклона к стандартному отклонению независимой переменной больше 0,74, то в 99,9 % случаев лучшим является тест Уайта.

Для случаев гетероскедастичности при гиперболической зависимости остатков от значений независимой переменной (модель 2) можно сделать следующие выводы:

– если среднеквадратичное отклонение зависимой переменной меньше 39,6, то в 99,3 % случаев лучшим является тест Эванса – Кинга;

– если среднеквадратичное отклонение зависимой переменной больше 39,6, среднее значение зависимой переменной меньше 33,42, то в 99,9% случаев лучшим является BAMSET-тест.

Для случаев гетероскедастичности с уменьшением значений ошибок при уменьшении значений независимой переменной (модель 3) можно сделать следующие выводы:

– если среднее значение независимой переменной меньше 87,37, соотношение коэффициента наклона к стандартному отклонению независимой переменной меньше 6,24, то в 99,9% случаев лучшим является тест Чжоу;

– если среднее значение независимой переменной больше 87,37, а среднее значение зависимой переменной больше 764,2, то в 99,4% случаев лучшим является тест Эванса – Кинга;

– если среднее значение независимой переменной больше 87,37, среднее значение зависимой переменной меньше 764,2, стандартное отклонение зависимой переменной меньше 188,7, то лучшим является тест Бикеля;

– если среднее значение независимой переменной больше 87,37, среднее значение зависимой переменной меньше 764,2, стандартное отклонение зависимой переменной больше 188,7, то лучшим является тест Харрисона – Маккейба.

Для случаев гетероскедастичности с уменьшением значений ошибок при уменьшении значений независимой переменной (модель 4) можно сделать следующие выводы:

– если коэффициент корреляции между зависимой и независимой переменной больше 0,956, то лучшим является тест Чжоу;

– если коэффициент корреляции между зависимой и независимой переменной меньше 0,956, стандартное отклонение зависимой переменной меньше 16,46, то в 99,9% случаев лучшим является BAMSET-тест;

– если коэффициент корреляции между зависимой и независимой переменной меньше 0,956, стандартное отклонение зависимой переменной больше 16,46, то в 99,7% случаев лучшим является тест Эванса – Кинга.

Для случаев гетероскедастичности с увеличением значения ошибок при возрастании значений независимой переменной (модель 5) можно сделать следующие выводы:

– если коэффициент наклона в модели меньше 5,13, а коэффициент корреляции между зависимой и независимой переменной меньше 0,73, то в 99,6% лучшим является тест Харрисона – Маккейба;

– если коэффициент наклона в модели меньше 5,13, а коэффициент корреляции между зависимой и независимой переменной больше 0,73, то в 99,6% лучшим является тест Эванса – Кинга;

– если коэффициент наклона в модели больше 5,13, соотношение коэффициента наклона к стандартному отклонению независимой переменной меньше 0,36, то лучшим является тест Голдфильда – Квандта;

– если коэффициент наклона в модели больше 5,13, соотношение коэффициента наклона к стандартному отклонению независимой переменной больше 0,36, стандартное отклонение зависимой переменной меньше 37,2, то в 99,8% случаев лучшим является тест Бикеля;

– если коэффициент наклона в модели больше 5,13, соотношение коэффициента наклона к стандартному отклонению независимой переменной больше 0,36, стандартное отклонение зависимой переменной больше 37,2, то в 99,5% случаев лучшим является тест Чжоу.

Для случаев гетероскедастичности с изменением знака ошибок (модель 6) можно сделать следующие выводы:

– если среднее значение независимой переменной больше 87,4, то в 99,9% случаев лучшим является тест Бикеля;

– если среднее значение независимой переменной меньше 87,4, коэффициент наклона в модели меньше трех, то лучшим является тест Юсе;

– если среднее значение независимой переменной меньше 87,4, коэффициент наклона в модели больше трех, стандартное отклонение независимой переменной меньше 24,2, то в 99,6% случаев лучшим является BAMSET-тест;

– если среднее значение независимой переменной меньше 87,4, коэффициент наклона в модели больше трех, стандартное отклонение независимой переменной больше 24,2, то в 99,6 % случаев лучшим является тест Эванса – Кинга.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ полученных результатов позволил сделать несколько теоретических и прикладных выводов.

Во-первых, в прикладных задачах, в зависимости от особенностей их постановки, в общем случае лучше использовать тесты Юсе и Уилкокса – Келемана или тест Эванса – Кинга вместе с BAMSET-тестом.

Во-вторых, показано наличие существенной зависимости эффективности рассмотренных статистических тестов от параметров выборки, к которой они применяются. Соответственно, в практических исследованиях рекомендуется сначала проведение вспомогательных работ, направленных на установление эффективности тестов гетероскедастичности при имеющихся данных с конкретными свойствами.

В-третьих, при некоторых типах гетероскедастичности все рассмотренные тесты показывают значительный процент ошибок. Это говорит о необходимости продолжения соответствующих теоретических исследований и разработке новых способов детектирования разных форм гетероскедастичности.

Список источников

1. Асансеитова С. М., Ковалева Э. В., Свинухов В. Г. Оценка влияния экпорта и прямых иностранных инвестиций на ВВП на примере стран-членов ЕАЭС // Вестник НГИЭИ. 2018. № 9. С. 60–70.
2. Молодченков Д. А. Результаты экспериментальных исследований профилеобразующего катка для гребневого посева пропашных культур // Вестник НГИЭИ. 2018. № 9. С. 114–127.
3. Lyon J. D., Tsai C.-L. A comparison of tests for heteroscedasticity. *The Statistician.* 1996;45(3):337–349.
4. Harvey A. C., Phillips G. D. A. A comparison of the power of some tests for heteroskedasticity in the general linear model. *Journal of Econometrics.* 1974;2:307–316.
5. Griffiths W. E., Surekha K. A Monte Carlo evaluation of the power of some tests for heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*. 1986;31(2):219–231.
6. Dufour J.-M., Khalaf L., Bernard J.-T. et al. Simulation-based finite-sample tests for heteroskedasticity and ARCH effects. *Journal of Econometrics*. 2004;122(2):317–347.
7. Uyanto S. S. Monte Carlo power comparison of seven most commonly used heteroscedasticity tests. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*. 2019;51(4):2065–2082.
8. Bickel P. J. Using residuals robustly I: Tests for heteroscedasticity, nonlinearity. *Ann Statist.* 1978;6(2):266–291.
9. Ramsey J. B. Tests for specification errors in classical linear least-squares regression analysis. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Statistical Methodology).* 1968;31(2):350–371.
10. Carroll R. J., Ruppert D. On robust tests for heteroscedasticity. *Ann Statist.* 1981;9(1):206–210.
11. Breusch T. S., Pagan A. R. A simple test for heteroscedasticity and random coefficient variation. *Econometrica.* 1979;47(5):1287–1294.

References

1. Asanseitova S. M., Kovaleva E. V., Svinukhov V. G. Assessment of the impact of exports and foreign direct investment on GDP based on the example of the EAEU member countries. *Bulletin NGIEI.* 2018;(9):60–70. (In Russian).
2. Molodchenkov D. A. The results of experimental researches of a profilebase rink for rowing of tilled crops. *Bulletin NGIEI.* 2018;(9):114–127. (In Russian).
3. Lyon J. D., Tsai C.-L. A comparison of tests for heteroscedasticity. *The Statistician.* 1996;45(3):337–349.
4. Harvey A. C., Phillips G. D. A. A comparison of the power of some tests for heteroskedasticity in the general linear model. *Journal of Econometrics.* 1974;2:307–316.
5. Griffiths W. E., Surekha K. A Monte Carlo evaluation of the power of some tests for heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*. 1986;31(2):219–231.
6. Dufour J.-M., Khalaf L., Bernard J.-T. et al. Simulation-based finite-sample tests for heteroskedasticity and ARCH effects. *Journal of Econometrics*. 2004;122(2):317–347.
7. Uyanto S. S. Monte Carlo power comparison of seven most commonly used heteroscedasticity tests. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*. 2019;51(4):2065–2082.
8. Bickel P. J. Using residuals robustly I: Tests for heteroscedasticity, nonlinearity. *Ann Statist.* 1978;6(2):266–291.
9. Ramsey J. B. Tests for specification errors in classical linear least-squares regression analysis. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Statistical Methodology).* 1968;31(2):350–371.
10. Carroll R. J., Ruppert D. On robust tests for heteroscedasticity. *Ann Statist.* 1981;9(1):206–210.
11. Breusch T. S., Pagan A. R. A simple test for heteroscedasticity and random coefficient variation. *Econometrica.* 1979;47(5):1287–1294.

12. Cook R. D., Weisberg S. Diagnostics for heteroscedasticity in regression. *Biometrika.* 1983;70(1):1–10.
13. Evans M. A., King M. A point optimal test for heteroscedastic disturbances. *Journal of Econometrics.* 1985;27(2):163–178.
14. Goldfeld S. M., Quandt R. E. Some tests for homoscedasticity. *Journal of the American Statistical Association.* 1965;60(310):539–547.
15. Harrison M. J., McCabe B. P. M. A test for heteroscedasticity based on ordinary least squares residuals. *Journal of the American Statistical Association*. 1979;74(366a):494–499.
16. Horn P. Heteroscedasticity of residuals: A non-parametric alternative to the Goldfeld–Quandt peak test. *Communications in Statistics – Theory and Methods*. 1981;10(8):795–808.
17. Simonoff J. S., Tsai C.-L. Use of modified profile likelihood for improved tests of constancy of variance in regression. *Appl Statist.* 1994;43(2):357–370.
18. Verbyla A. P. Modelling variance heterogeneity: Residual maximum likelihood and diagnostics. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological).* 1993;55(2):493–508.
19. White H. A heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct test for heteroskedasticity. *Econometrica.* 1980;48(4):817–838.
20. Wilcox R. R., Keselman H. J. Detecting heteroscedasticity in a simple regression model via quantile regression slopes. *Journal of Statistical Computation and Simulation.* 2006;76(8):705–712.
21. Yuce M. An asymptotic test for the detection of heteroscedasticity. *Istanbul University Econometrics and Statistics e-Journal.* 2008;8:33–44.
22. Zhou Q. M., Song P. X.-K., Thompson M. E. Profiling heteroscedasticity in linear regression models. *Canadian Journal of Statistics.* 2015;43(3):358–377.

Информация об авторе

А. Д. Черемухин – кандидат экономических наук, доцент.

12. Cook R. D., Weisberg S. Diagnostics for heteroscedasticity in regression. *Biometrika.* 1983;70(1):1–10.
13. Evans M. A., King M. A point optimal test for heteroscedastic disturbances. *Journal of Econometrics.* 1985;27(2):163–178.
14. Goldfeld S. M., Quandt R. E. Some tests for homoscedasticity. *Journal of the American Statistical Association.* 1965;60(310):539–547.
15. Harrison M. J., McCabe B. P. M. A test for heteroscedasticity based on ordinary least squares residuals. *Journal of the American Statistical Association*. 1979;74(366a):494–499.
16. Horn P. Heteroscedasticity of residuals: A non-parametric alternative to the Goldfeld–Quandt peak test. *Communications in Statistics – Theory and Methods*. 1981;10(8):795–808.
17. Simonoff J. S., Tsai C.-L. Use of modified profile likelihood for improved tests of constancy of variance in regression. *Appl Statist.* 1994;43(2):357–370.
18. Verbyla A. P. Modelling variance heterogeneity: Residual maximum likelihood and diagnostics. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological).* 1993;55(2):493–508.
19. White H. A heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct test for heteroskedasticity. *Econometrica.* 1980;48(4):817–838.
20. Wilcox R. R., Keselman H. J. Detecting heteroscedasticity in a simple regression model via quantile regression slopes. *Journal of Statistical Computation and Simulation.* 2006;76(8):705–712.
21. Yuce M. An asymptotic test for the detection of heteroscedasticity. *Istanbul University Econometrics and Statistics e-Journal.* 2008;8:33–44.
22. Zhou Q. M., Song P. X.-K., Thompson M. E. Profiling heteroscedasticity in linear regression models. *Canadian Journal of Statistics.* 2015;43(3):358–377.

Information about the author

A. D. Cheremukhin – Candidate of Sciences (Economics), Docent.