

Научная статья

УДК 519.866:369

<https://doi.org/10.35266/1999-7604-2024-3-5>



Анализ срабатываний предикторов в функции Леонтьева для объема финансирования отделения социального фонда

Сергей Иванович Носков¹, **Александр Петрович Медведев²**,
Иван Владимирович Овсянников³

^{1, 2, 3}*Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, Россия*

¹*sergey.noskov.57@mail.ru*

²*medvedeff.a.p@yandex.ru*

³*ivani29030609@gmail.com*

Аннотация. В работе дан краткий обзор публикаций по применению методов математического моделирования в области пенсионного обеспечения. В частности, рассмотрены: применение модели Хестона – Халла – Уайта в управлении пенсионным фондом; описание доходов пенсионных фондов в Испании и Великобритании с помощью авторегрессионной модели и нейронной сети; модель участников пенсионного плана в Словацкой Республике; проблема оптимального управления пенсионными фондами с установленными взносами; задача оптимального инвестирования участника пенсионной схемы, столкнувшегося со стохастической инфляцией; модель нелинейной оптимизации для итальянской пенсионной системы с фиксированными взносами. В статье разработаны две версии кусочно-линейной функции Леонтьева для суммарного годового объема финансирования отделения социального фонда России по Иркутской области – обычная и с оптимальными преобразованиями независимых переменных. Обе эти версии характеризуются допустимой точностью. Их векторы срабатываний указывают на то, что фактором, в основном определяющим динамику выходной переменной, является количество самозанятых (плательщиков взносов за себя).

Ключевые слова: кусочно-линейная функция Леонтьева, пенсионный фонд, задача линейно-булева программирования, страховые пенсии, самозанятые, получатели пособий, застрахованные лица, количество пенсионеров

Для цитирования: Носков С. И., Медведев А. П., Овсянников И. В. Анализ срабатываний предикторов в функции Леонтьева для объема финансирования отделения социального фонда // Вестник кибернетики. 2024. Т. 23, № 3. С. 40–45. <https://doi.org/10.35266/1999-7604-2024-3-5>.

Original article

Analysis of predictor responses in the Leontief function for financing amount of the social fund department

Sergey I. Noskov¹, **Aleksandr P. Medvedev²**, **Ivan V. Ovsyannikov³**

^{1, 2, 3}*Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia*

¹*sergey.noskov.57@mail.ru*

²*medvedeff.a.p@yandex.ru*

³*ivani29030609@gmail.com*

Abstract. The paper gives a brief review of publications on the application of mathematical modeling methods in pension provision. Regarding the application of the Heston-Hull-White model in pension fund management, specifically, we examine: the description of pension fund returns in Spain and Great Britain using an autoregressive model and neural network; the model of pension plan participants in the Slovak Re-

public; the problem of optimal management of defined contribution pension funds; the problem of optimal investment of a pension scheme participant facing stochastic inflation; the nonlinear optimization model for the Italian defined contribution pension system. The paper develops two versions of the Leontief piecewise linear function for the total annual funding of the Russian Social Fund's Irkutsk Oblast branch: the ordinary version and the version with optimal transformations of the independent variables. Both versions are characterized by acceptable accuracy. Their triggering vectors indicate that the factor determining the dynamics of the output variable is the number of self-employed (payers of contributions for themselves).

Keywords: Leontief piecewise linear function, pension fund, linear Boolean programming problem, insurance pensions, self-employed, benefit recipients, insured persons, number of pensioners

For citation: Noskov S. I., Medvedev A. P., Ovsyannikov I. V. Analysis of predictor responses in the Leontief function for financing amount of the social fund department. *Proceedings in Cybernetics*. 2024;23(3):40–45. <https://doi.org/10.35266/1999-7604-2024-3-5>.

ВВЕДЕНИЕ

Пенсионное обеспечение населения является важнейшей социальной функцией любого государства. Вопросам анализа устойчивых закономерностей этого процесса и поиска путей повышения его эффективности в мире уделяется большое внимание. Традиционным средством проведения исследований в этой области является математическое моделирование. При этом используются как традиционные линейные, так и существенно нелинейные модели.

Так, в работе [1] представлена модель Хестона – Халла – Уайта в управлении пенсионным фондом. В явном виде представлены оптимальная политика инвестирования и выплаты пособий с возможностью просадки доходов. Управляющему пенсионным фондом разрешено инвестировать средства фонда в безрисковые и рискованные активы. Динамика цен рискованных активов развивается в соответствии с моделью гибридной стохастической волатильности. В источнике [2] показано, как доходы пенсионных фондов в Испании и Великобритании адекватно описываются соответственно с помощью авторегрессионной модели и нейронной сети. Статья [3] посвящена описанию многопериодной стохастической оптимизационной модели для решения задачи оптимального выбора пенсионного фонда участником пенсионного плана. В модели участникам пенсионного плана предоставляется возможность периодически переключаться между J-типами фондов с разными профилями риска и таким образом ак-

тивно управлять своей подверженностью риску и ожидаемой доходностью. Минимизация показателя отклонения среднего значения риска за несколько периодов при ограничении ожидаемой доходности приводит к крупномасштабной линейной программе для пенсионной системы Словацкой Республики. В исследовании [4] изучается проблема оптимального управления пенсионными фондами с установленными взносами на этапе распределения в условиях инфляции, смертности и неопределенности модели. При этом применяются методы робастного управления и динамического программирования. В источнике [5] рассматривается задача оптимального инвестирования участника пенсионной схемы, столкнувшегося со стохастической инфляцией, с использованием критерия средней дисперсии Марковица, методов Лагранжа и стохастического динамического программирования.

В работе [6] исследуется эффективность испанских пенсионных фондов с использованием ряда линейных и нелинейных моделей эффективности. Поскольку в выборке представлены характеристики моментов высокого порядка, традиционные показатели эффективности искажаются. Поэтому формируются альтернативные модели производительности, которые включают факторы риска, моделирующие асимметрию и эксцесс. При этом учитываются факторы, которые отражают нелинейность, присущую некоторым базовым активам, используемым в пенсионных фондах. В исследовании [7]

показано, как критерий средней дисперсии может быть применен к многопериодной ситуации, чтобы получить эффективные портфели в контексте активов и пассивов. Модель оптимизации позволяет оценить транзакционные издержки и стохастические волатильности как активов, так и обязательств. Кроме того, дается общая основа для прогнозирования обязательств пенсионного фонда, а также для формирования доходности активов. В источнике [8] представлена новая нелинейная стохастическая модель процентных ставок, которая, как особый случай, содержит стандартную линейную модель Паркера. Получено множество практических применений для движения финансов и пенсий. В статье [9] предлагается надежная основа для управления пенсионным фондом с установленными выплатами, основанная на оптимизации. Показывается, что этот подход позволяет гибко моделировать многие особенности проблемы управления пенсионным фондом. Он является вычислительно приемлемой альтернативой подходам, основанным на стохастическом программировании. Наконец, в источнике [10] представлена модель нелинейной оптимизации для итальянской пенсионной системы с фиксированными взносами, основанной на трех контрольных переменных: индексации пенсий, условной ставке и ставке взносов. Целевая функция учитывает как социальную адекватность, так и устойчивость ставок взносов в условиях ограничений на ликвидность и устойчивость.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

В публикации [11] представлена разработанная на основе статистической информации за 2012–2022 гг. линейная по параметрам, но нелинейная по независимым переменным регрессионная модель объема финансирования отделения пенсионного фонда в России:

$$y = -4927260 + 0,35293x_1 + 115801 \frac{x_2 + x_3}{x_1} + \frac{59811000}{\ln x_4}, \quad (1)$$

$R = 0,995371$; $F = 501,69$; $E = 0,85$; $T = (-31,11; 4,487; 3,475; 28,1)$.

Приведем весь полный набор зависимой и потенциальных независимых переменных, использованных при проведении конкурса альтернативных вариантов для модели (1):

y – суммарный годовой объем финансирования отделения социального фонда России по Иркутской области, тыс. руб.;

x_1 – количество страховых пенсий по старости;

x_2 – количество страхователей-работодателей, чел.;

x_3 – количество самозанятых (плательщиков взносов за себя), чел.;

x_4 – количество получателей пособий единовременной выплаты, чел.;

x_5 – количество застрахованных лиц, чел.;

x_6 – количество пенсионеров, чел.;

x_7 – количество работающих пенсионеров, чел.

Для оценки адекватности модели использованы критерии адекватности:

R – критерий множественной детерминации;

F – критерий Фишера;

E – средняя относительная ошибка аппроксимации;

T – вектор значений критерия Стьюдента для параметров модели.

Таким образом, в модель (1) оказались включены лишь четыре независимых переменных из семи возможных. Она является весьма адекватной исследуемому объекту, на что указывают значения перечисленных выше критериев.

Поставим задачу построения на основе той же информации кусочно-линейной функции Леонтьева:

$$y = \min(a_1x_1, a_2x_2, \dots, a_7x_7). \quad (2)$$

Ее отличительной особенностью является то, что для любого наблюдения выборки минимум в модели (2) реализуется на одной независимой переменной, значение которой лимитирует значение y . При этом любое значение других переменных не изменит выходную переменную. Это свойство модели (2) позволяет сформировать вектор срабатываний $\lambda = (\lambda_2, \dots, \lambda_{11})$, k -я компонента которого

λ_k равна номеру независимой переменной, на которой реализовался минимум в (2).

Оценивание неизвестных параметров кусочно-линейной модели (2) сводится к решению задачи линейно-булева программирования (ЛБП) (см., например, [12]).

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

При разработке кусочно-линейной зависимости (2) будем иметь в виду, что так же, как и при построении регрессии (1), финальный вариант модели может не содержать все переменные x_i , $i = \overline{1,7}$. В результате проведения соответствующего конкурса альтернатив он принял вид:

$$y = \min(3,5784x_2, 2,0353x_3, 0,0579x_4), \quad (3)$$

$$E = 8,1211; \lambda = (3,3,3,3,3,3,3,4,2).$$

По точности модель (3), если судить по критерию E , существенно уступает модели (1), что совершенно естественно ввиду кусочного характера первой. Тем не менее значение средней относительной ошибки аппроксимации (8,1211 %) для нее вполне приемлемо. На рисунке приведены значения фак-

тических, заданных в выборке, и расчетных, вычисленных по модели, значений выходной переменной y .

В модель (3) удалось включить лишь три независимые переменные из семи возможных вследствие статистической незначимости остальных. При этом в девяти годах из одиннадцати (в 2012–2020 гг.) лимитирующим фактором является количество самозанятых (плательщиков взносов за себя). Таким образом, именно этот показатель главным образом и определяет характер динамики суммарного годового объема финансирования отделения Социального фонда России по Иркутской области. Сделаем некоторые пояснения к этому результату.

К самозанятым гражданам относятся их категории, уплачивающие налог на профессиональный доход 4 или 6 %. Налоговые ставки зависят от источника дохода налогоплательщика. Ставка 4 % используется, если доход за товар, работы или услуги поступил от физического лица. Ставка 6 % применяется, если это поступление от юридического лица или индивидуального предпринимателя. Ограничение накладывает и лимит на доходы самоза-

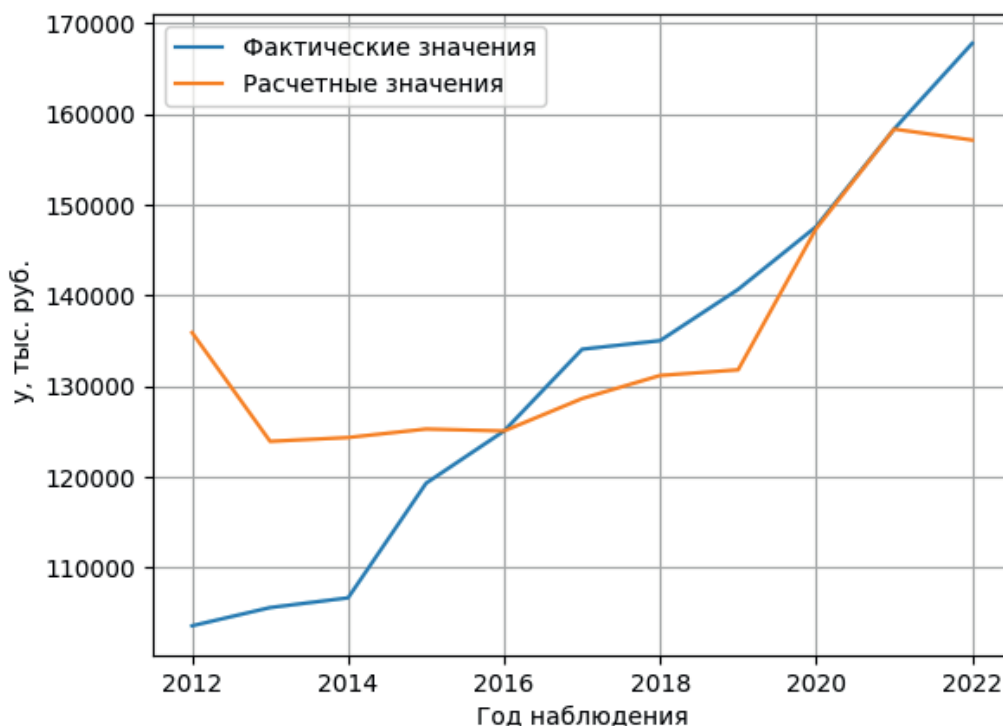


Рисунок. Расчетные и фактические значения зависимой переменной

Примечание: составлено авторами.

нятого – суммарный годовой доход не должен превышать 2,4 млн руб. В случае превышения лимита гражданин теряет право применять этот режим налогообложения.

В общем случае самозанятые категории граждан не платят обязательные страховые взносы, однако с целью формирования пенсии такие категории могут добровольно вступать в правоотношения по обязательному пенсионному страхованию, направив заявление в территориальный орган Социального фонда России и уплачивать страховые взносы самостоятельно. Вместе с этим утратится их право на индексацию пенсии; страховую пенсию по случаю потери кормильца в связи с уходом за детьми до 14 лет; на пенсию, назначенную по предложению службы занятости; на компенсационные выплаты по уходу за нетрудоспособными лицами и часть других выплат. Таким образом, категория самозанятых граждан (в случае добровольной оплаты взносов на обязательное пенсионное страхование) должна рассматриваться как с точки зрения количественной характеристики, непосредственно определяющей размеры страховых взносов, так и с точки зрения качественной величины, одновременно накладывающей ограничения на индексацию пенсий и часть социальных выплат.

Список источников

1. Mwanakatwe P., Song L., Hagenimana E. et al. Management strategies for a defined contribution pension fund under the hybrid stochastic volatility model // *Computational and Applied Mathematics*. 2019. Vol. 38, no. 2. <https://doi.org/10.1007/s40314-019-0790-z>.
2. Alda M., Agudo L. Linear and nonlinear financial time series: evidence in a sample of pension funds in Spain and the United Kingdom // *Applied Economics Letters*. 2012. Vol. 19, no. 18. P. 1933–1937. <https://doi.org/10.1080/13504851.2012.669454>.
3. Kilianová S., Pflug G. C. Optimal pension fund management under multi-period risk minimization // *Annals of Operations Research*. 2008. Vol. 166, no. 1. P. 261–270. <https://doi.org/10.1007/s10479-008-0405-3>.
4. Baltas I., Dopierala L., Kolodziejczyk K. et al. Optimal management of defined contribution pension funds under the effect of inflation, mortality and uncertainty // *European Journal of Operational Research*. 2022. Vol. 298, no. 3. P. 1162–1174. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2021.08.038>.

Построим теперь модифицированный аналог кусочно-линейной модели Леонтьева (3), выбрав в соответствии с алгоритмом из источника [12] оптимальные преобразования для каждой независимой переменной из некоего набора элементарных функций – логарифмических, степенных и показательных. В результате получим модель:

$$y = \min(0,0155x_2^{1,5}; 0,0078x_3^{1,5}; 332,6545\sqrt{x_4}), \quad (4)$$

$$E = 7,921; \lambda = (3,3,3,3,3,3,3,3,4,2).$$

Модель (4) характеризуется несколько большей точностью, чем (3), однако их векторы срабатываний совпадают.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построены два варианта кусочно-линейной функции Леонтьева для суммарного годового объема финансирования отделения Социального фонда России по Иркутской области – обычный и с оптимальными преобразованиями независимых переменных. Оба варианта обладают приемлемой точностью, а анализ их векторов срабатывания указывает на то, что показателем, главным образом и определяющим характер динамики выходной переменной, является количество самозанятых (плательщиков взносов за себя).

References

1. Mwanakatwe P., Song L., Hagenimana E. et al. Management strategies for a defined contribution pension fund under the hybrid stochastic volatility model. *Computational and Applied Mathematics*. 2019;38(2). <https://doi.org/10.1007/s40314-019-0790-z>.
2. Alda M., Agudo L. Linear and nonlinear financial time series: evidence in a sample of pension funds in Spain and the United Kingdom. *Applied Economics Letters*. 2012;19(18):1933–1937. <https://doi.org/10.1080/13504851.2012.669454>.
3. Kilianová S., Pflug G. C. Optimal pension fund management under multi-period risk minimization. *Annals of Operations Research*. 2008;166(1):261–270. <https://doi.org/10.1007/s10479-008-0405-3>.
4. Baltas I., Dopierala L., Kolodziejczyk K. et al. Optimal management of defined contribution pension funds under the effect of inflation, mortality and uncertainty. *European Journal of Operational Research*. 2022;298(3):1162–1174. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2021.08.038>.

5. Yao H., Yang Z., Chen P. Markowitz's mean-variance defined contribution pension fund management under inflation: a continuous-time model // *Insurance: Mathematics and Economics*. 2013. Vol. 53, no. 3. P. 851–863. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2013.10.002>.
6. Alda M., Agudo L., Gallagher L. Performance of Spanish pension funds: robust evidence from alternative models // *Applied Financial Economics*. 2013. Vol. 23, no. 4. P. 297–314. <https://doi.org/10.1080/09603107.2012.720011>.
7. Frauendorfer K., Jacoby U., Schwendener A. Regime switching based portfolio selection for pension funds // *Journal of Banking & Finance*. 2007. Vol. 31, no. 8. P. 2265–2280. <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2007.02.003>.
8. Stehlik M., Kiseľák J., Potocký R., Jordanova P. Generalized interest rate dynamics and its impacts on finance and pensions // *Stochastic Analysis and Applications*. 2016. Vol. 35, no. 1. P. 178–190. <https://doi.org/10.1080/07362994.2016.1224975>.
9. Iyengar G., Ka A., Chun M. A robust optimization approach to pension fund management // *Asset and Liability Management Handbook*. 2011. P. 308–330. https://doi.org/10.1057/9780230307230_12.
10. Devolder P., Levantesi S., Menzietti M. Automatic balance mechanisms for notional defined contribution pension systems guaranteeing social adequacy and financial sustainability: an application to the Italian pension system // *Annals of Operations Research*. 2020. Vol. 299, no. 1–2. P. 765–795. <https://doi.org/10.1007/s10479-020-03819-x>.
11. Носков С. И., Медведев А. П. Реализация конкурса регрессионных моделей при оценке объема финансирования социального и пенсионного обеспечения // *Инженерный вестник Дона*. 2024. № 4. URL: <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2024/9155> (дата обращения: 17.05.2024).
12. Носков С. И., Попов Е. С. Подход к построению функции Леонтьева с нелинейными предикторами // *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*. 2024. № 2. С. 105–108.
5. Yao H., Yang Z., Chen P. Markowitz's mean-variance defined contribution pension fund management under inflation: a continuous-time model. *Insurance: Mathematics and Economics*. 2013;53(3):851–863. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2013.10.002>.
6. Alda M., Agudo L., Gallagher L. Performance of Spanish pension funds: robust evidence from alternative models. *Applied Financial Economics*. 2013;23(4):297–314. <https://doi.org/10.1080/09603107.2012.720011>.
7. Frauendorfer K., Jacoby U., Schwendener A. Regime switching based portfolio selection for pension funds. *Journal of Banking & Finance*. 2007;31(8):2265–2280. <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2007.02.003>.
8. Stehlik M., Kiseľák J., Potocký R., Jordanova P. Generalized interest rate dynamics and its impacts on finance and pensions. *Stochastic Analysis and Applications*. 2016;35(1):178–190. <https://doi.org/10.1080/07362994.2016.1224975>.
9. Iyengar G., Ka A., Chun M. A robust optimization approach to pension fund management. *Asset and Liability Management Handbook*. 2011:308–330. https://doi.org/10.1057/9780230307230_12.
10. Devolder P., Levantesi S., Menzietti M. Automatic balance mechanisms for notional defined contribution pension systems guaranteeing social adequacy and financial sustainability: an application to the Italian pension system. *Annals of Operations Research*. 2020;299(1–2):765–795. <https://doi.org/10.1007/s10479-020-03819-x>.
11. Noskov S. I., Medvedev A. P. Implementation of a competition for regression models in assessing the amount of social and pension funding. *Engineering Journal of Don*. 2024;(4). URL: <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2024/9155> (accessed: 17.05.2024). (In Russ.).
12. Noskov S. I., Popov E. S. Approach to constructing the Leontief function with nonlinear predictors. *News of the Tula state university. Technical sciences*. 2024;(2):105–108. (In Russ.).

Информация об авторах

С. И. Носков – доктор технических наук, профессор.
А. П. Медведев – ассистент.
И. В. Овсянников – студент.

About the authors

S. I. Noskov – Doctor of Sciences (Engineering), Professor.
A. P. Medvedev – Assistant Professor.
I. V. Ovsyannikov – Student.