

Научная статья
УДК 621.396.962.3
<https://doi.org/10.35266/1999-7604-2024-3-11>



Оценка минимального достижимого уровня боковых лепестков функции неопределенности радиоимпульсных последовательностей

Анатолий Ильич Дёмко^{1✉}, Елена Геннадьевна Алмазова²
^{1,2}Сургутский государственный университет, Сургут, Россия
¹dai321@mail.ru[✉], <https://orcid.org/0000-0003-0747-0294>
²egalmazova@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-5523-7222>

Аннотация. В радиолокации и связи широко используются сложные сигналы, что определяет актуальность синтеза, исследования и оптимизации подобных сигналов. Целью статьи является получение расчетных формул оценки минимальной границы достижимого уровня боковых лепестков нулевого сечения функции неопределенности дискретно кодированных радиоимпульсных последовательностей. Введено понятие коэффициента оптимальности, показывающего превышение уровня боковых лепестков над потенциально достижимым минимальным значением. Показано, что радиоимпульсные последовательности на основе кодов Баркера являются оптимальными по критерию минимального уровня боковых лепестков нулевого сечения функции неопределенности. Приведены результаты проведенного анализа оптимальности многофазных радиоимпульсных последовательностей на основе кода Фрэнка, многофазных последовательностей на основе кода Чу и фазоманипулированных М-последовательностей. Полученные результаты могут быть использованы в радиолокации и связи.

Ключевые слова: нулевое сечение, функция неопределенности, боковые лепестки, радиоимпульсные последовательности, коэффициент оптимальности

Для цитирования: Дёмко А. И., Алмазова Е. Г. Оценка минимального достижимого уровня боковых лепестков функции неопределенности радиоимпульсных последовательностей // Вестник кибернетики. 2024. Т. 23, № 3. С. 96–102. <https://doi.org/10.35266/1999-7604-2024-3-11>.

Original article

Assessment of minimum achievable sidelobes level of ambiguity function for radio pulse sequences

Anatoly I. Dyomko^{1✉}, Elena G. Almazova²
^{1,2}Surgut State University, Surgut, Russia
¹dai321@mail.ru[✉], <https://orcid.org/0000-0003-0747-0294>
²egalmazova@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-5523-7222>

Abstract. The wide usage of complex signals in radiolocation and communication determines the relevance of synthesizing, researching, and optimizing such signals. This article aims to derive calculation formulas for estimating the minimum limit of the achievable level of sidelobes of the zero section for the ambiguity function of discretely encoded radio pulse sequences. The introduction of the optimality coefficient provides a measure of the excess of the sidelobe level above the potentially achievable minimum. Radio pulse sequences based on Barker codes are shown to be optimal according to the criterion of the minimum level of the sidelobes of the zero section for the ambiguity function. The results of the optimality analysis of multiphase radio pulse sequences based on the Frank code, multiphase sequences based on the Chu code and phase-manipulated M-sequences are presented. The results can be used in radiolocation and communication.

Keywords: zero cross section, ambiguity function, sidelobes, radio pulse sequences, optimality coefficient

For citation: Dyomko A. I., Almazova E. G. Assessment of minimum achievable sidelobes level of ambiguity function for radio pulse sequences. *Proceedings in Cybernetics*. 2024;23(3):96–102. <https://doi.org/10.35266/1999-7604-2024-3-11>.

ВВЕДЕНИЕ

В радиолокации, радионавигации и электрической связи широко применяются сложные сигналы, имеющие произведение длительности на ширину спектра больше единицы. Способность совместного разрешения по дальности и скорости определяется функцией неопределенности сигнала [1], которая характеризует степень отличия сигнала от своих копий, сдвинутых по времени и частоте во всем диапазоне возможных значений. Функция неопределенности характеризуется областью сильной корреляции (главный максимум) и областью слабой корреляции (боковые лепестки). Наличие боковых лепестков является нежелательным фактором, ухудшающим качество решения радиолокационных, радионавигационных и связных задач. В связи с этим актуальной является оценка оптимальности сигнала с точки зрения степени близости уровня боковых лепестков функции неопределенности к минимально достижимой величине.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Для радиотехнических систем, обработка сигнала в которых позволяет использовать несколько периодов повторения, можно использовать периодическую функцию неопределенности (ФН, ПФН), существуют сигналы с нулевым уровнем боковых лепестков нулевого сечения ПФН (сигналы с идеальными периодическими корреляционными свойствами) [2]. При обработке одного периода сигнала следует рассматривать импульсную (одиночную) ФН (1), уровень боковых лепестков нулевого сечения которой ненулевой и зависит от конкретного сигнала.

$$\chi(\tau, F) = \int_{\tau}^{T_c} \dot{S}(t) \cdot \dot{S}^*(t - \tau) e^{j2\pi Ft} dt, \quad 0 \leq \tau \leq T_c, \quad (1)$$

где $\dot{S}(t)$ – комплексная форма представления сигнала;

$\dot{S}^*(t)$ – комплексно-сопряженный сигнал;

τ – временной сдвиг;

F – частотный сдвиг;

T_c – длительность сигнала.

Для примера на рис. 1 приведено тело неопределенности (трехмерное графическое изображение импульсной ФН) многофазной радиоимпульсной последовательности на основе кода Фрэнка из 64 элементов [3, 4].

Нормирование графика выполнено относительно начала координат $x(0,0)$. Центр изображения ($\tau = 0, F = 0$) соответствует главному максимуму ФН, где оба сигнала в подынтегральном выражении (1) максимально похожи друг на друга. Остальная область тела неопределенности меньшего уровня содержит боковые лепестки (в идеальном случае должны отсутствовать), характеризующие степень непохожести сигналов подынтегрального выражения (1) при отдалении от начала координат ($\tau \neq 0, F \neq 0$). Наблюдается сложная структура боковых лепестков во всем интервале возможных временных задержек и частотных сдвигов (1).

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Определим нижнюю оценку уровня боковых лепестков нулевого сечения ФН, ниже которой уровень боковых лепестков получить невозможно для дискретно кодированных сигналов в виде радиоимпульсных последовательностей.

Радиоимпульсная последовательность из N радиоимпульсов:

$$s(t) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(t) e^{j\psi_n(t)}, & nT + \tau_n \leq t \leq nT + \tau_n + \tau_u; \\ 0, & nT + \tau_n + \tau_u < t < (n+1)T + \tau_{n+1}, \end{cases} \quad (2)$$

где $S_n(t)$ – амплитуда радиоимпульса (возможна внутриимпульсная амплитудная, частотная или фазовая модуляция);

n – порядковый номер радиоимпульса;

T – период следования радиоимпульсов;

$\psi_n(t)$ – начальная фаза n -го радиоимпульса;

τ_n – сдвиг радиоимпульса относительно тактового (nT) момента времени;

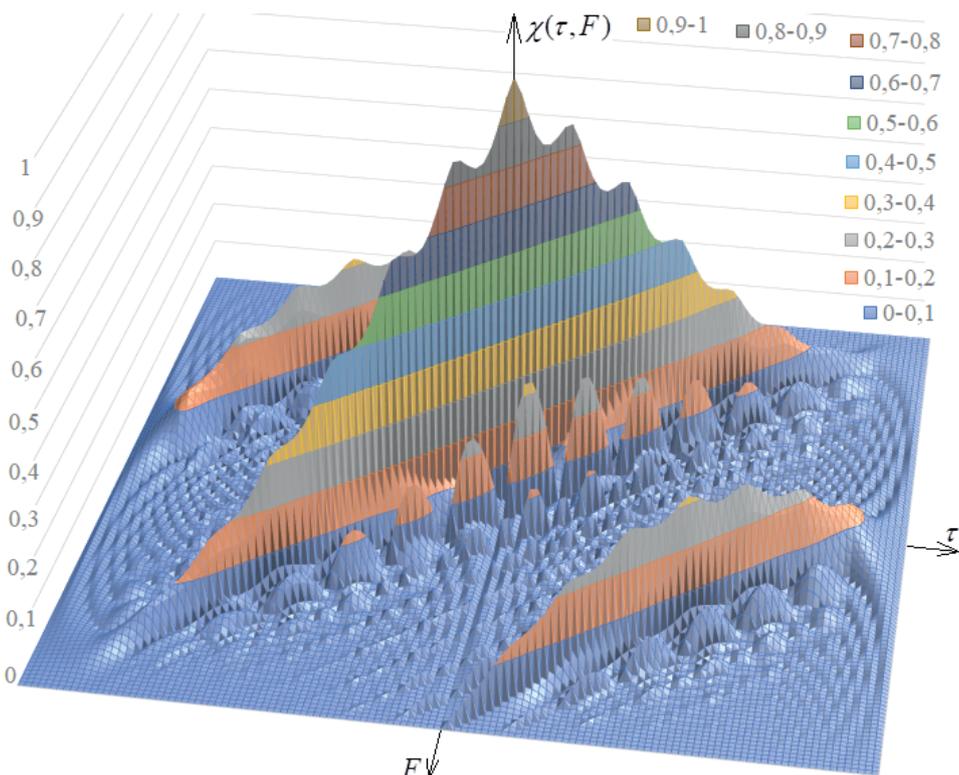


Рис. 1. Огибающая нормированного тела неопределенности сигнала на основе кода Фрэнка для последовательности из 64 элементов

Примечание: составлено авторами на основании данных, полученных в исследовании.

τ_u – длительность радиоимпульса;

N – число радиоимпульсов в последовательности.

$$T_c = NT. \quad (3)$$

Можно не ограничивать вид последовательности, допуская как однородные последовательности (следующие с одинаковым сдвигом радиоимпульсов относительно предыдущих, с модуляцией одного параметра, например начальной фазы радиоимпульсов), так и различные варианты неоднородных и разнопараметрических радиоимпульсных последовательностей.

$$\chi(\tau, F) = \int_{\tau}^{T_c} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} S_m(t) \exp j\psi_n(t) \right\} \times \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} S_m(t) \exp j[-\psi_k(t-\tau)] \right\} e^{j2\pi Ft} dt. \quad (4)$$

Найдем значения ФН при нулевом частотном сдвиге F (нулевое сечение функции неопределенности) при двух значениях сдвига по оси задержек:

а) нулевом ($\tau = 0$), когда при вычислении интеграла (4) пересекаются все радиоимпульсы с одинаковыми номерами;

б) максимальном ($\tau = NT - T$), когда пересекаются только последний радиоимпульс исходной последовательности с первым радиоимпульсом задержанной последовательности.

Значение функции неопределенности при нулевом ($\tau = 0$) временном сдвиге:

$$\chi(0,0) = \int_0^{T_c} \dot{S}(t) \cdot \dot{S}^*(t) dt, \quad 0 \leq \tau \leq T_c. \quad (5)$$

$$\chi(0,0) = \int_0^{T_c} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} S_m(t) \exp j\psi_n(t) \right\} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} S_m(t) \exp j[-\psi_k(t)] \right\} dt \quad (6)$$

$$\chi(0,0) = \int_0^{T_c} \sum_{n=0}^{N-1} S_m^2(t) dt = \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^{\tau_u} S_m^2(t) dt. \quad (7)$$

Для получения замкнутых форм выражения (7) ограничимся рассмотрением вариантов радиоимпульсных последова-

тельностью с прямоугольной огибающей радиоимпульсов:

$$S_m(t) = S_m = \text{const}, \quad (8)$$

$$\chi(0,0) = \sum_{n=0}^{N-1} S_m^2 \int_0^{\tau_u} dt = \sum_{n=0}^{N-1} S_m^2 \tau_u = NS_m^2 \tau_u. \quad (9)$$

Абсолютное значение нулевого сечения функции неопределенности при нулевом временном сдвиге (9) пропорционально энергии радиоимпульса и числу радиоимпульсов в последовательности.

Вычислим значение нулевого сечения функции неопределенности при максимальном временном сдвиге, когда пересекаются только два радиоимпульса:

$$\tau_{\max} = (N-1)T. \quad (10)$$

При этом в подынтегральном выражении (6) исчезают суммы, поскольку ненулевым остается лишь интеграл от произведения последнего радиоимпульса первой последовательности с первым радиоимпульсом второй последовательности.

$$\chi((N-1)T,0) = \int_{(N-1)T}^{(N-1)T+\tau_u} \left\{ \sum_{n=N-1}^{N-1} S_m \exp j\psi_n(t) \right\} \left\{ \sum_{k=0}^0 S_m \exp j[-\psi_k(t)] \right\} dt \quad (11)$$

$$\chi((N-1)T,0) = \int_{(N-1)T}^{(N-1)T+\tau_u} \{S_m \exp j\psi_{N-1}(t)\} \{S_m \exp j[-\psi_0(t)]\} dt \quad (12)$$

$$\chi((N-1)T,0) = S_m^2 \int_{(N-1)T}^{(N-1)T+\tau_u} \exp j\{\psi_{N-1}(t) - \psi_0(t)\} dt. \quad (13)$$

Дальнейшие преобразования интеграла (13) требуют конкретизации закона изменения фазы $\psi(t)$, однако модуль интеграла от гармонической функции не зависит от аргумента гармонической функции, а определяется только пределами интегрирования, поэтому верхнюю оценку интеграла можно записать в виде:

$$|\chi((N-1)T,0)| = S_m^2 \tau_u. \quad (14)$$

На основании выражений (9) и (14) можно произвести оценку нормированной величины бокового лепестка нулевого сечения функции неопределенности при сдвиге по оси задержки на величину $(N-1)T$. Назовем эту величину коэффициентом оценки уровня боковых лепестков дискретно кодированных сигналов

$$k_{N-1} = \frac{|\chi((N-1)T,0)|}{\chi(0,0)} = \frac{S_m^2 \tau_u}{NS_m^2 \tau_u} = 1/N = N^{-1}. \quad (15)$$

Расчетная формула для вычисления коэффициента оценки уровня боковых лепестков k_{N-1} в логарифмических единицах.

$$k_{N-1} = 201g(N^{-1}) = -201g(N), \quad \text{дБ}. \quad (16)$$

Очевидно, что при любых меньших временных сдвигах kT ($k \neq N-1$) уровень боковых лепестков нулевого сечения функции неопределенности может как больше, так и меньше, но максимальное значение M_{\max} уровня боковых лепестков не может быть меньше, чем величина k_{N-1} . Для примера на рис. 2 изображено нормированное нулевое сечение ФН многофазной радиоимпульсной последовательности на основе кода Фрэнка из 256 элементов и коэффициент оценки уровня боковых лепестков k_{255} .

Уровень боковых лепестков при таком числе элементов в последовательности составляет $M_{\max} = -34$ дБ. Боковые лепестки располагаются симметрично относительно главного максимума (вне зависимости от знака временной задержки), имеют сложную структуру и большой динамический диапазон (на рисунке 29 дБ – от минус 34 дБ до минус 63 дБ, хотя минимальные значения достигают минус 100 дБ).

Практическая полезность коэффициента оценки уровня боковых лепестков k_{N-1} определяется двумя факторами:

а) k_{N-1} определяет минимально достижимый уровень боковых лепестков нулевого сечения функции неопределенности при данном числе элементов в последовательности для данной радиоимпульсной последовательности;

б) k_{N-1} соответствует значению уровня бокового лепестка при максимально возможной величине временного сдвига $\pm (N-1)T$.

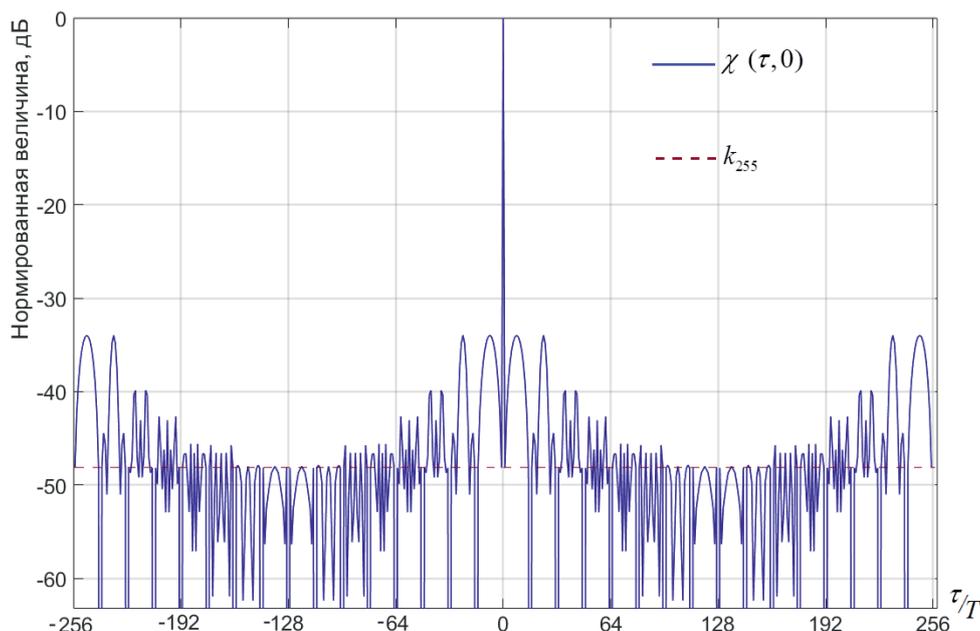


Рис. 2. Функция неопределенности многофазной радиоимпульсной последовательности на основе кода Фрэнка из 256 элементов и коэффициент оценки уровня боковых лепестков k_{255}
 Примечание: составлено авторами на основании данных, полученных в исследовании.

Введем параметр, характеризующий величину отличия уровня боковых лепестков M_{max} нулевого сечения функции неопределенности от коэффициента оценки уровня боковых лепестков k_{N-1} и назовем его коэффициентом оптимальности k_{opt} :

$$k_{opt} = k_{N-1} - M_{max} = -20 \lg(N) - M_{max}, \text{ дБ.} \quad (17)$$

Коэффициент оптимальности большинства сигналов является отрицательным: чем больше по модулю его значение, тем в большей степени корреляционные свойства отличаются от оптимальных.

Известны бинарные коды Баркера [5] для 3, 4, 5, 7, 11 и 13 элементов в последовательности. Уровень боковых лепестков нулевого сечения функции неопределенности радиоимпульсных последовательностей на основе кодов Баркера совпадает с (16), поэтому для них коэффициент оптимальности k_{opt} равен нулю, следовательно такие сигналы имеют минимально возможный уровень боковых лепестков.

На рис. 3 приведены зависимости коэффициента оптимальности для многофазных последовательностей на основе кода Фрэнка, многофазных последовательностей на основе

кода Чу [6, 7] и псевдослучайных последовательностей максимальной длины (М-последовательностей) [8].

Как видно, для многофазных и фазоманипулированных радиоимпульсных последовательностей наиболее оптимальными (корреляционные параметры которых максимально приближаются к потенциально достижимым) являются последовательности небольшой длины. При увеличении длины последовательности становятся менее оптимальными, следовательно увеличиваются возможности для дополнительной оптимизации с целью улучшения корреляционных свойств сигналов [9].

Аналогично можно оценить степень отличия от оптимальных (по критерию максимального уровня боковых лепестков нулевого сечения функции неопределенности) для других радиоимпульсных последовательностей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для радиоимпульсных сигналов уровень бокового лепестка на границах максимальной задержки не зависит от вида модуляции, определяясь числом элементов в последовательности N .

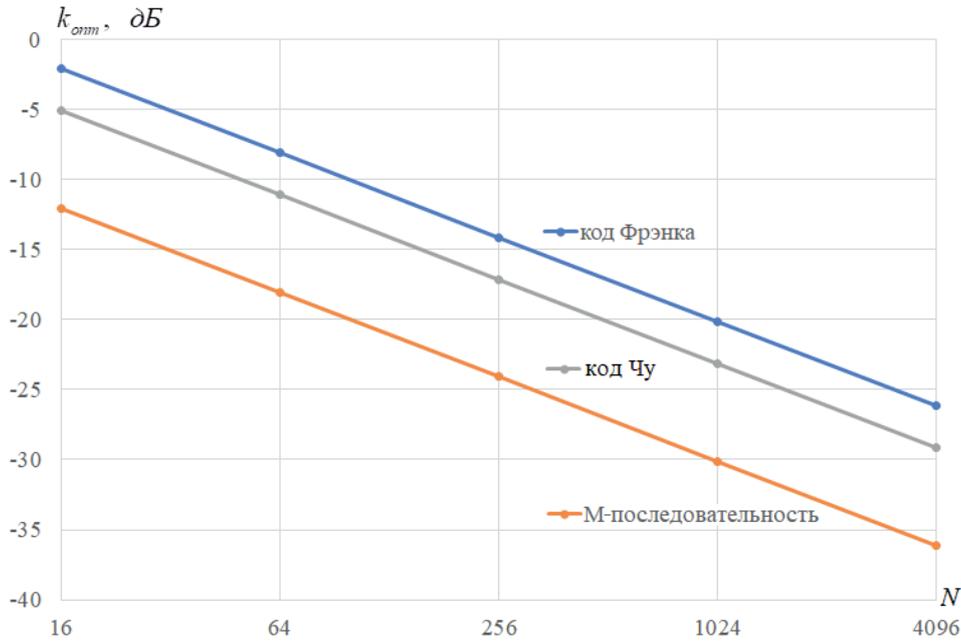


Рис. 3. Зависимость коэффициента оптимальности от числа элементов в последовательности

Примечание: составлено авторами на основании данных, полученных в исследовании.

Коэффициент оценки уровня боковых лепестков радиоимпульсной последовательности k_{N-1} (18):

$$k_{N-1} = -201g(N), \quad \text{дБ} \quad (18)$$

определяет минимально-достижимый уровень боковых лепестков нулевого сечения функции неопределенности при данном числе элементов N в последовательности для данной радиоимпульсной последовательности и соответствует значению уровня бокового лепестка при максимально возможной величине временного сдвига $\pm (N-1)T$.

Коэффициент оптимальности k_{opt} (19) характеризует отличие максимального уровня боковых лепестков радиоимпульсных последовательностей

M_{max} нулевого сечения функции неопределенности от потенциально достижимого:

$$k_{opt} = k_{N-1} - M_{max} = -201g(N) - M_{max}, \quad \text{дБ.} \quad (19)$$

Коэффициент оптимальности k_{opt} радиоимпульсных сигналов на основе бинарных кодов Баркера равен нулю, т. е. такие сигналы имеют минимально достижимый уровень боковых лепестков нулевого сечения функции неопределенности.

Для многофазных последовательностей на основе кода Фрэнка, многофазных последовательностей на основе кода Чу и M-последовательностей коэффициент оптимальности k_{opt} уменьшается при увеличении числа радиоимпульсов N в последовательности со скоростью 6 дБ/окт.

Список источников

1. Вакман Д. Е. Сложные сигналы и принцип неопределенности в радиолокации. М. : Сов. Радио, 1965. 304 с.
2. Кук Ч., Бернфельд М. Радиолокационные сигналы. Теория и применение / пер. с англ. ; под ред. В. С. Кельзона. М. : Сов. Радио, 1971. 567 с.
3. Дёмко А. И. О связи корреляционных свойств сигналов на основе кодов Фрэнка с погрешностями их

References

1. Vakman D. E. Slozhnye signaly i printsip neopredelenosti v radiolokatsii. Moscow: Sov. Radio, 1965. 304 p. (In Russ.).
2. Kuk Ch., Bernfeld M. Radiolokatsionnye signaly. Teoriya i primeneniye. Trans. and ed. V. S. Kelzon. Moscow: Sov. Radio, 1971. 567 p. (In Russ.).
3. Dyomko A. I. On relation between correlation characteristics of signals based on the frank codes and

- формирования // Вестник кибернетики. 2023. Т. 22, № 3. С. 23–31.
4. Frank R., Zadoff S., Heimiller R. Phase shift pulse codes with good periodic correlation properties (corresp.) // *IRE Transactions on Information Theory*. 1962. Vol. 8, no. 6. P. 381–382.
 5. Дворников С. В., Дворников С. С., Марков Е. В. Модифицированные импульсные последовательности на основе кодов Баркера // Труды учебных заведений связи. 2022. Т. 8, № 1. С. 8–14. <https://doi.org/10.31854/1813-324X-2022-8-1-8-14>.
 6. Chu D. Polyphase codes with good periodic correlation properties (corresp.) // *IEEE Transactions on information theory*. 1972. Vol. 18, no. 4. P. 531–532.
 7. Zhou Z., Hellesteth T., Paramalli U. A family of polyphase sequences with asymptotically optimal correlation // *IEEE Transactions on Information Theory*. 2018. Vol. 64. no. 4. P. 2896–2900.
 8. Сенин А. И. Корреляционные свойства последовательностей, построенных на основе М-последовательностей и последовательностей Уолша // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия «Приборостроение». 2014. № 5. С. 88–97.
 9. Вакман Д. Е., Седлецкий Р. М. Вопросы синтеза радиолокационных сигналов. М. : Сов. радио, 1973. 312 с.
4. Frank R., Zadoff S., Heimiller R. Phase shift pulse codes with good periodic correlation properties (corresp.). *IRE Transactions on Information Theory*. 1962;8(6):381–382.
 5. Dvornikov S., Dvornikov S., Markov E. Modified Pulse Sequences Based on Barker Codes. *Proceedings of Telecommunication Universities*. 2022;8(1):8–14. <https://doi.org/10.31854/1813-324X-2022-8-1-8-14>. (In Russ.).
 6. Chu D. Polyphase codes with good periodic correlation properties (corresp.). *IEEE Transactions on information theory*. 1972;18(4):531–532.
 7. Zhou Z., Hellesteth T., Paramalli U. A family of polyphase sequences with asymptotically optimal correlation. *IEEE Transactions on Information Theory*. 2018;64(4):2896–2900.
 8. Senin A. I. Correlation properties of sequences formed on the basis of m-sequences and Walsh sequences. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Instrument Engineering*. 2014;(5):88–97. (In Russ.).
 9. Vakman D. E., Sedletskiy R. M. Voprosy sinteza radiolokatsionnykh signalov. Moscow: Sov. radio, 1973. 312 p.

Информация об авторах

А. И. Дёмко – кандидат технических наук, доцент, почетный работник высшего образования РФ.

Е. Г. Алмазова – старший преподаватель.

About the authors

A. I. Dyomko – Candidate of Sciences (Engineering), Docent, Honored Worker of Higher Education of the Russian Federation.

E. G. Almazova – Senior Lecturer.