

Научная статья

УДК 621.391 + 621.396.96

<https://doi.org/10.35266/1999-7604-2025-3-3>



Система сигналов на основе кодов Задова – Чу. Часть 2. Взаимнокорреляционные свойства

Анатолий Ильич Дёмко

Сургутский государственный университет, Сургут, Россия

Аннотация. Системы сигналов достаточно подробно описаны в литературе, однако их изучение является по-прежнему актуальной задачей. Показано, что максимальное число вариантов имеет система сигналов, состоящая из простого числа элементов в последовательности. Приведены результаты расчета уровня боковых лепестков взаимнокорреляционных функций такой системы сигналов. В первой части статьи исследованы автокорреляционные свойства сигналов из системы сигналов на основе кодов Задова – Чу. Полученные результаты могут быть использованы в электрической связи.

Ключевые слова: система сигналов, код Задова – Чу, взаимно простые числа, взаимнокорреляционная функция, уровень боковых лепестков

Для цитирования: Дёмко А. И. Система сигналов на основе кодов Задова – Чу. Часть 2. Взаимнокорреляционные свойства // Вестник кибернетики. 2025. Т. 24, № 3. С. 26–33. <https://doi.org/10.35266/1999-7604-2025-3-3>.

Original article

Signal system based on Zadoff–Chu sequence. Part 2. Cross-correlation properties

Anatoly I. Dyomko

Surgut State University, Surgut, Russia

Abstract. Despite the detailed descriptions in the literature, the study of signal systems remains relevant. The paper reveals that the signal system with maximum variants consists of prime integers of elements in sequence. Calculation of the cross-correlation properties sidelobe level in the signal system is presented. In the first part of the paper, the autocorrelation properties of signals from a signal system based on Zadoff–Chu sequence are examined. Results can be used for electrical communication.

Keywords: signal system, Zadoff–Chu sequence, coprime integers, cross-correlation function, sidelobe level

For citation: Dyomko A. I. Signal system based on Zadoff–Chu sequence. Part 2. Cross-correlation properties. *Proceedings in Cybernetics*. 2025;24(3):26–33. <https://doi.org/10.35266/1999-7604-2025-3-3>.

ВВЕДЕНИЕ

Система сигналов принципиально отличается от набора разнотипных сигналов, поскольку объединяет совокупность сигналов с определенной общностью параметров, но в то же время проявляющих ярко выраженные отличные свойства. Преимущества использования системы сигналов по сравнению

с сигналами разного типа состоит в определенных предсказуемых перекрестных корреляционных связях, определяемых взаимнокорреляционными функциями (ВКФ). В связи с этим актуальными являются исследования по поиску системы сигналов с максимальным числом составляющих и хорошими свойствами перекрестной корреляции.

Для многоканальных систем электрической связи предпочтительными являются сигналы с минимальным уровнем ВКФ. Целью статьи является исследование взаимнокорреляционных свойств системы сигналов на основе кодов Задова – Чу, имеющих нулевой уровень боковых лепестков периодической автокорреляционной функции и низкий уровень боковых лепестков автокорреляционной функции.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Рассмотрим систему многофазных сигналов [1–7] на основе кода Задова – Чу с нулевым уровнем боковых лепестков (УБЛ) периодической автокорреляционной функции (АКФ). Фаза таких сигналов (1) изменяется по квадратичному или линейно-квадратичному закону.

$$\varphi_n = \begin{cases} \frac{\pi}{N} n^2 \cdot q, & N - \text{четное} \\ \frac{\pi}{N} \cdot q \cdot n(n+1), & N - \text{нечетное} \end{cases} \quad (1)$$

$$n = 0, \dots, N - 1,$$

где N – число элементов в последовательности;

n – порядковый номер элемента, начиная с нулевого;

q – целое число, взаимно простое с N .

Примечательность сигналов на основе кодов Задова – Чу состоит в большом объеме различных вариантов: для данного числа N элементов в последовательности существует

N_1 вариантов реализации, определяемых количеством взаимно простых с N чисел q .

В табл. 1 представлены наборы взаимно простых чисел для последовательностей с разным числом элементов (жирным курсивом выделены варианты, имеющие простое число элементов последовательности N).

Эффективность системы сигналов на основе кода Задова – Чу состоит в использовании последовательностей с таким числом элементов N , для которых, с одной стороны, количество вариантов N_1 реализации будет максимально большим, а с другой стороны, взаимнокорреляционные свойства максимального их числа будут хорошими (максимальный уровень ВКФ будет меньше установленного порогового значения). Эти два критерия сужают число сигналов относительно потенциально возможного, что связано с величиной установленного порогового значения, диктуемого областью использования системы сигналов.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

В качестве примера на рис. 1 для сигнала на основе кода Задова – Чу из 13 элементов изображены АКФ ($q = 1$) и ВКФ ($q_1 = 1$ и $q_2 = 5$).

Из анализа приведенных зависимостей следует, что для системы сигналов на основе кодов Задова – Чу автокорреляция (УБЛ АКФ –17,3 дБ) получается существенно лучше взаимокорреляции (уровень ВКФ –9,1 дБ).

Таблица 1

Взаимно простые числа

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
q	1	1 2	1 3	1 2 3 4	1 5	1 2 3 4 5 6	1 3 5 7	1 2 4 5 7 8	1 3 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	1 5 7 11	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	1 3 5 9 11 13	1 2 4 7 11 13 14	1 3 5 7 11

Примечание: составлено автором на основании данных, полученных в исследовании.

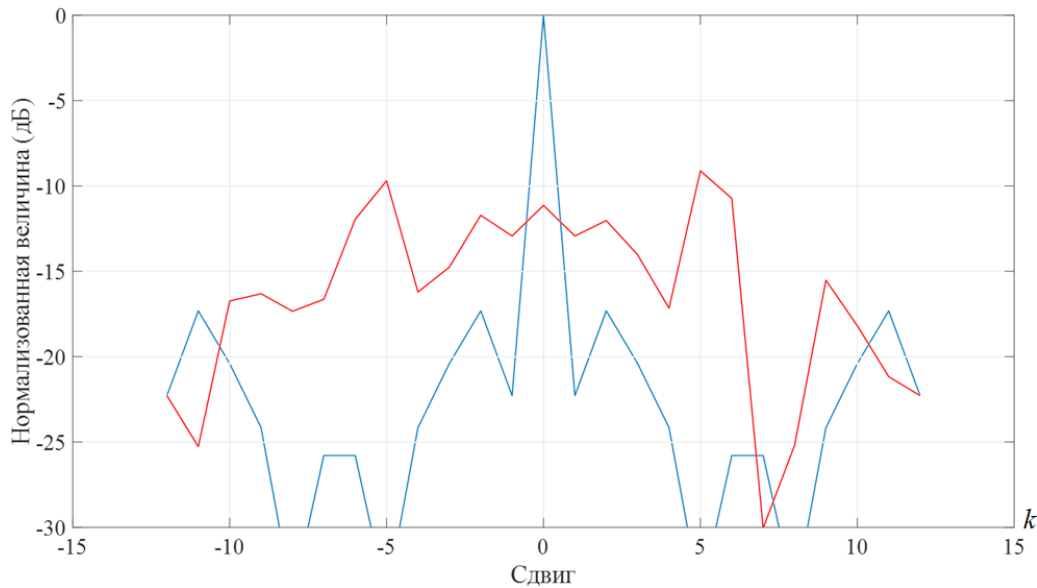


Рис. 1. АКФ (синяя) для $q = 1$ и ВКФ (красная) при $q_1 = 1$ и $q_2 = 5$ для последовательности из 13 элементов
 Примечание: составлено автором на основании данных, полученных в исследовании.

АКФ имеет симметричный относительно нулевого сдвига и более регулярный характер по сравнению с ВКФ, причем при сдвиге на 12 элементов уровни АКФ и ВКФ численно совпадают, что доказывается в [8] при обосновании коэффициента эффективности радиопульсных последовательностей.

Анализ корреляционных и взаимокорреляционных характеристик системы сигналов на основе кодов Задова – Чу выявил необходимость разделения системы сигналов на четыре категории в зависимости от числа элементов N в последовательности:

- простые числа;
- нечетные числа за исключением простых;
- четные числа, относящиеся к ряду 2^n , $n = 1, 2, 3, 4, \dots$;
- четные числа за исключением чисел, относящихся к ряду 2^n , $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

Для иллюстрации этого в табл. 2–5 представлены УБЛ АКФ и уровень ВКФ:

$N = 13$ – простое число;

$N = 14$ – четное число, не относящееся к 2^n ;

$N = 15$ – нечетное число, не относящееся к простым;

$N = 16$ – четное число, относящееся к 2^n ($n = 4$).

Максимально большое количество взаимно простых чисел N_1 получается для последо-

вательностей, состоящих из простого числа элементов (3, 5, 7, 11, 13, 17 и т.д.):

$$N_1 = N - 1.$$

В табл. 2 приведены УБЛ АКФ и уровень ВКФ последовательности из 13 элементов (числа по главной диагонали соответствуют УБЛ АКФ, выше главной диагонали – уровень ВКФ).

Из табл. 2. следует, что наилучшие корреляционные свойства (значения на главной диагонали) имеют сигналы с $q = 1$ и $q = 12$. На рис. 2 изображена гистограмма распределения максимальных значений уровня ВКФ для последовательности из 13 элементов (УБЛ АКФ для $q = 1$ при этом составляет $-17,3$ дБ).

В табл. 3 приведены УБЛ АКФ и уровень ВКФ последовательности из 14 элементов (четное число).

На рис. 3 изображена гистограмма распределения максимальных значений уровня ВКФ для последовательности из 14 элементов (УБЛ АКФ для $q = 1$ при этом составляет $-17,8$ дБ).

Сравнение рис. 3 и 2 показывает лучшие взаимокорреляционные свойства для простого числа 13 (гистограмма при этом расположена левее – в области меньших значений УБЛ).

Таблица 2

Уровень боковых лепестков (дБ) для $N = 13$

q_1/q_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	-17,3	-9,6	-9,6	-7,9	-9,1	-9,3	-9,1	-8,8	-9,6	-8,6	-8,7	-7,6
2		-9,9	-9,0	-9,6	-7,2	-9,1	-7,7	-8,8	-8,7	-8,4	-8,6	-8,7
3			-11,5	-9,1	-10,6	-8,9	-6,8	-8,5	-7,9	-8,7	-8,4	-8,6
4				-13,4	-9,1	-10,1	-8,3	-9,7	-6,5	-7,9	-8,7	-9,6
5					-10,4	-8,7	-9,6	-7,1	-9,7	-8,5	-8,8	-8,8
6						-16,2	-9,1	-9,6	-8,3	-6,8	-7,7	-9,1
7							-16,2	-8,7	-10,1	-8,9	-9,1	-9,3
8								-10,4	-9,1	-10,6	-7,2	-9,1
9									-13,4	-9,1	-9,6	-7,9
10										-11,5	-9,0	-9,6
11											-9,9	-9,7
12												-17,3

Примечание: составлено автором на основании данных, полученных в исследовании.

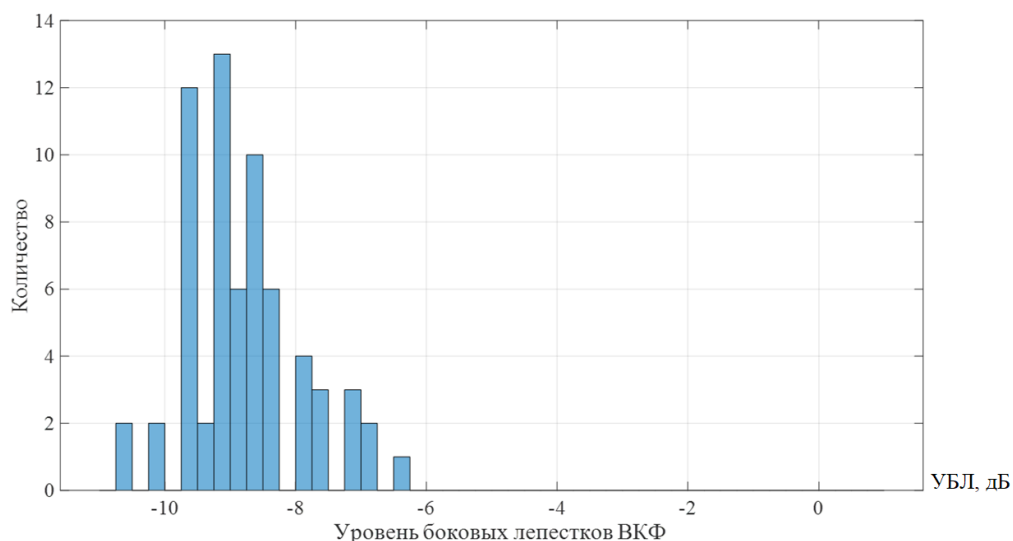


Рис. 2. Гистограмма максимальных значений уровня ВКФ для 13 элементов в последовательности (простое число)

Примечание: составлено автором на основании данных, полученных в исследовании.

Таблица 3

Уровень боковых лепестков (дБ) для $N = 14$

q_1/q_2	1	3	5	9	11	13
1	-17,8	-7,1	-8,5	-6,8	-7,7	-7,8
3		-10,8	-7,7	-7,7	-8,5	-7,7
5			-13,9	-8,5	-7,7	-6,8
9				-13,9	-7,7	-8,5
11					-10,8	-7,1
13						-17,8

Примечание: составлено автором на основании данных, полученных в исследовании.

В табл. 4 приведены УБЛ АКФ и уровень ВКФ последовательности из 15 элементов (нечетное число, не являющееся простым).

На рис. 4 изображена гистограмма распределения максимальных значений уровня

ВКФ для последовательности из 15 элементов (УБЛ АКФ для $q = 1$ при этом составляет $-18,3$ дБ).

Особенностью гистограммы для 15 элементов в последовательности является значи-

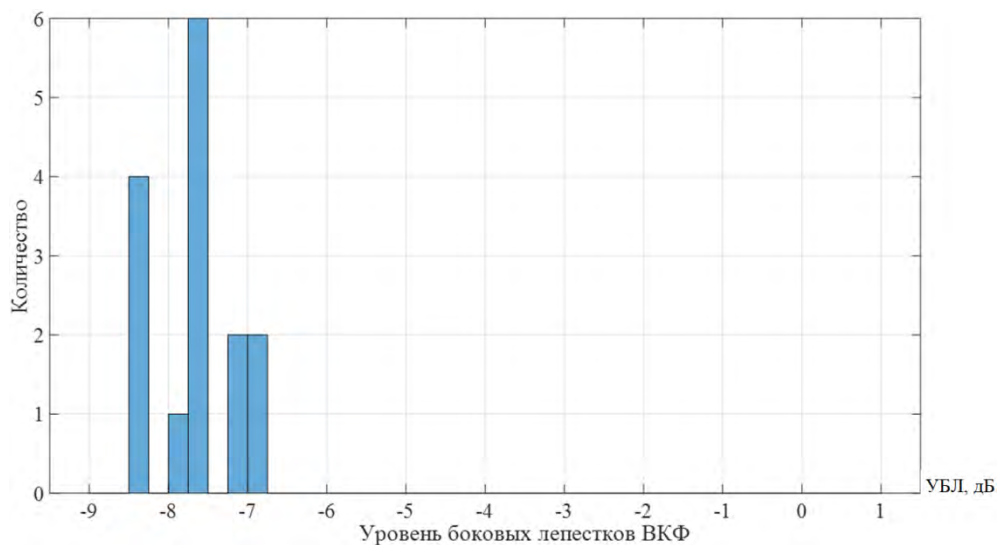


Рис. 3. Гистограмма максимальных значений уровня ВКФ для 14 элементов в последовательности (четное число)

Примечание: составлено автором на основании данных, полученных в исследовании.

Таблица 4

Уровень боковых лепестков (дБ) для $N = 15$

q_1/q_2	1	2	4	7	8	11	13	14
1	-18,3	-9,4	-9,4	-6,9	-9,4	-4,7	-6,9	-7,9
2		-9,9	-9,7	-8,6	-6,9	-9,0	-8,2	-6,9
4			-12,5	-10,0	-8,5	-9,6	-9,0	-4,8
7				-15,8	-9,7	-8,5	-6,9	-9,4
8					-15,8	-10,0	-8,6	-6,9
11						-12,5	-9,7	-9,4
13							-9,9	-9,4
14								-18,3

Примечание: составлено автором на основании данных, полученных в исследовании.

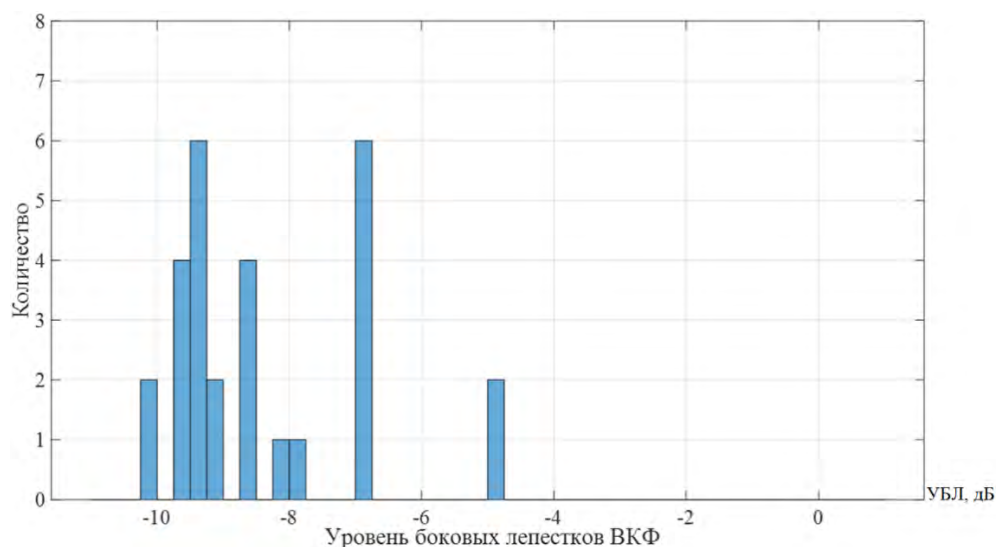


Рис. 4. Гистограмма максимальных значений уровня ВКФ для 15 элементов в последовательности (нечетное число)

Примечание: составлено автором на основании данных, полученных в исследовании.

тельный удельный вес сигналов с достаточно большим уровнем ВКФ (-7 дБ и -5 дБ).

В табл. 5 приведены УБЛ АКФ и уровень ВКФ последовательности из 16 элементов.

На рис. 5 изображена гистограмма распределения максимальных значений уровня ВКФ для последовательности из 16 ($16 = 2^4$) элементов (УБЛ АКФ для $q = 1$ при этом составляет $-18,3$ дБ).

Особенностью гистограммы для 16 элементов в последовательности является значительный удельный вес сигналов (42,8%) с очень большим уровнем ВКФ (-6 дБ и -3 дБ).

Анализ приведенных таблиц и гистограмм показывает, что наилучшие взаимнокорреляционные свойства системы сигналов на основе кода Задова – Чу (максимальное смещение максимума гистограммы влево – в сторону

минимальных боковых лепестков и минимальное наличие остатков с большим уровнем боковых лепестков справа) наблюдается для последовательностей с числом элементов N , являющихся простым числом. Наихудший результат показывают последовательности с четным числом элементов, представляющим собой $N = 16 = 2^4$.

С ростом числа элементов в последовательности гистограммы распределения максимального уровня ВКФ становятся более регулярными одномодовыми (для нечетного числа элементов в последовательности N) или многомодовыми (для четного числа элементов в последовательности N). На рис. 6 изображены распределения максимальных значений уровня ВКФ для большого числа элементов в последовательности (простое число 257).

Таблица 5

Уровень боковых лепестков (дБ) для $N = 16$

q_1/q_2	1	3	5	7	9	11	13	15
1	-18,7	-8,3	-6,0	-9,0	-3,0	-9,0	-6,0	-8,3
3		-11,5	-8,7	-6,0	-9,0	-3,0	-9,0	-6,0
5			-14,9	-8,3	-6,0	-9,0	-3,0	-9,0
7				-10,1	-9,0	-6,0	-9,0	-3,0
9					-10,1	-8,3	-6,0	-9,0
11						-14,9	-8,7	-6,0
13							-11,5	-8,3
15								-18,7

Примечание: составлено автором на основании данных, полученных в исследовании.

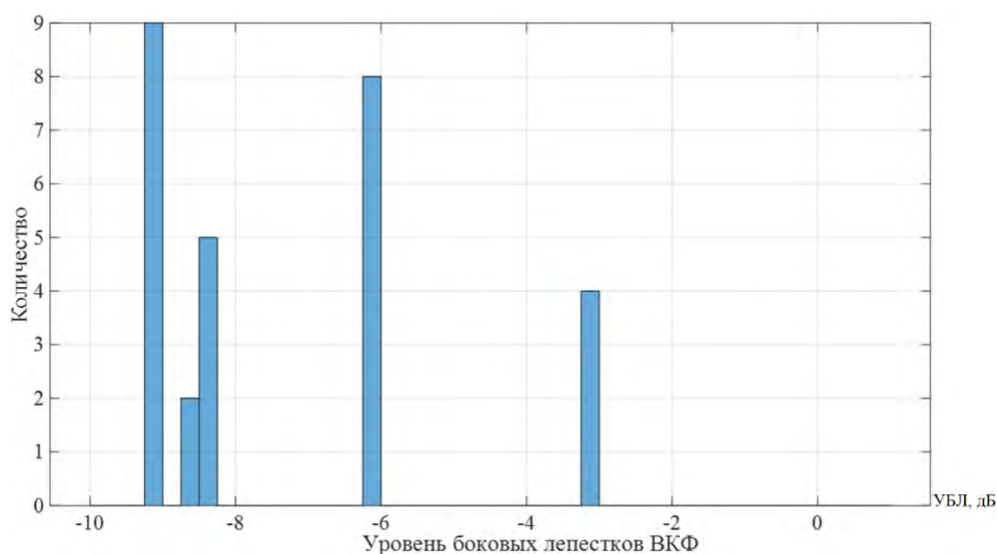
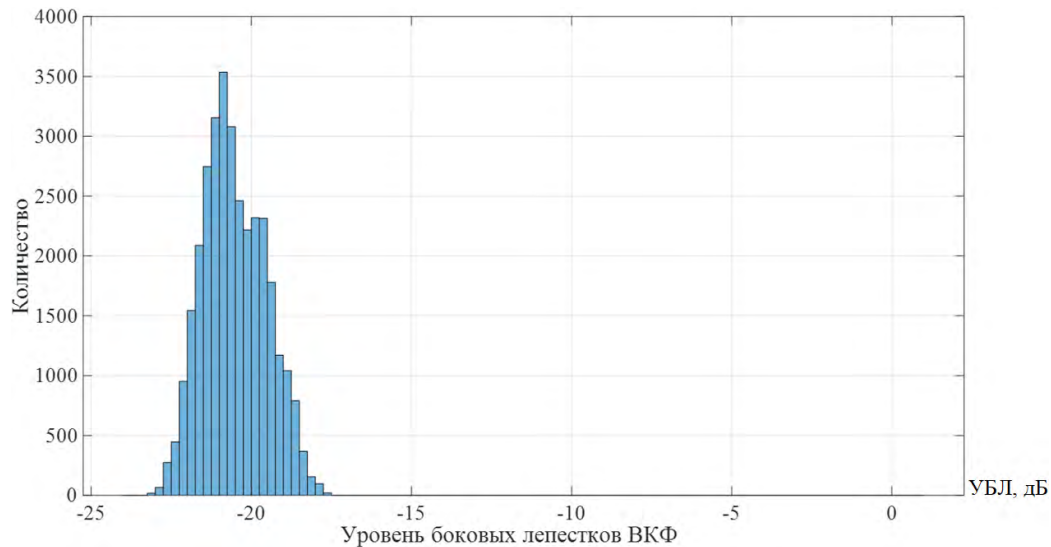


Рис. 5. Гистограмма максимальных значений уровня ВКФ для 16 элементов в последовательности (четное число $16 = 2^4$)

Примечание: составлено автором на основании данных, полученных в исследовании.



**Рис. 6. Гистограмма максимальных значений уровня ВКФ
для 257 элементов в последовательности (простое число)**

Примечание: составлено автором на основании данных, полученных в исследовании.

Максимум гистограммы максимальных значений УБЛ ВКФ расположен правее на 9 дБ относительно координаты УБЛ АКФ (–30,4 дБ).

Приведенные зависимости УБЛ ВКФ и корреляционных свойств дают информацию для выбора параметров сигналов из системы сигналов на основе кодов Задова – Чу в качестве системы сигналов, либо для выбора определенных вариантов реализации при ограничении на конкретное число элементов в последовательности N .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Сложные системы многофазных радиопульсных сигналов на основе кодов Задова – Чу обладают идеальными периодическими автокорреляционными свойствами (нулевой УБЛ периодической АКФ) и реализуемыми схемами формирования.

2. Максимальный объем $N_1 = N - 1$ имеют системы сигналов на основе кодов Задова – Чу при простом числе элементов N , меньший объем (в интервале от $0,5N$ до $0,86N$) при нечетном (не являющимся простым) числе элементов, еще меньше (около $0,5N$) при четном числе элементов.

3. Минимальный уровень взаимной корреляции демонстрируют системы сигналов на основе кодов Задова – Чу при простом числе элементов N , однако его величина превышает уровень боковых лепестков автокорреляционных функций сигналов, взаимная корреляция которых рассматривается.

4. Представленные результаты могут быть полезными при выборе системы сигналов многоканальной системы связи, поскольку такие сигналы могут передаваться в общей полосе частот и одновременно по времени, но будут разделены на приемной стороне при согласованной обработке.

Список источников

1. Zhou Z., Hellesteth T., Parampalli U. A family of polyphase sequences with asymptotically optimal correlation // *IEEE Transactions on Information Theory*. 2018. Vol. 64, no. 4. P. 2896–2900. <http://dx.doi.org/10.1109/TIT.2018.2796597>.
2. Русанов В. Э. Исследование свойств автокорреляционной функции одного периода последовательности Задова – Чу // *Экономика и качество систем связи*. 2024. № 1. С. 53–59.

References

1. Zhou Z., Hellesteth T., Parampalli U. A family of polyphase sequences with asymptotically optimal correlation. *IEEE Transactions on Information Theory*. 2018;64(4):2896–2900. <http://dx.doi.org/10.1109/TIT.2018.2796597>.
2. Rusanov V. E. Research of the properties of the autocorrelation function of one period of the Zadov–Chu sequence. *Ekonomika i kachestvo sistem svyazi*. 2024;(1):53–59. (In Russ.).

3. Степутин А. Н., Николаев А. Д. Последовательности Задова – Чу (ZC последовательности). URL: <https://1234g.ru/book/ZC.pdf> (дата обращения: 10.04.2025).
4. Киселева Т. П. Исследование свойств циклической автокорреляционной функции последовательности Задова – Чу в зависимости от характеристик квантования элементов последовательности // Цифровая Обработка Сигналов. 2018. № 4. С. 40–44.
5. Казачков В. О. Исследование реализации синхронизации по сигналам Задова – Чу в стандарте Long Term // Интернет-журнал «Науковедение». 2015. Т. 7, № 1. <http://dx.doi.org/10.15862/39TVN115>.
6. Салтыков О. В. Алгоритм тактовой и частотной синхронизации КВ-модема // Техника радиосвязи. 2021. Вып. 3. С. 7–16. <https://doi.org/10.33286/2075-8693-2021-50-07-16>.
7. Киселева Т. П. Применение комплексных последовательностей Задова – Чу для заполнения циклического префикса OFDM-символов технологии LTE: патент № 2766286C1 Российская Федерация, № 2021102576; заявл. 04.02.2021; опубл. 11.03.2022, бюл. № 8. 10 с.
8. Дёмко А. И. Алмазова Е. Г. Оценка минимального достижимого уровня боковых лепестков функции неопределенности радиоимпульсных последовательностей // Вестник кибернетики. 2024. Т. 23, № 3. С. 96–102.
3. Steputin A. N., Nikolaev A. D. Posledovatelnosti Zadova–Chu (ZC posledovatelnosti). URL: <https://1234g.ru/book/ZC.pdf> (accessed: 10.04.2025). (In Russ.).
4. Kiseleva T. P. Investigation of properties of cyclic autocorrelation function of the sequence depending on the characteristics of quantization of the sequence elements. *Digital Signal Processing*. 2018;(4):40–44. (In Russ.).
5. Kazachkov V. O. Investigation of synchronization implementation on Zadoff-Chu signals in Long Term Evolution standard for fading channel. *Naukovedenie*. 2015;7(1). <http://dx.doi.org/10.15862/39TVN115>. (In Russ.).
6. Saltykov O. V. HF modem clock and frequency synchronization algorithm. *Radio Communication Technology*. 2021;(3):7–16. <https://doi.org/10.33286/2075-8693-2021-50-07-16>. (In Russ.).
7. Kiseleva T. P. Application of complex sequences of Zadoff-Chu for filling of OFDM-symbols cyclic prefix of LTE technology. RU Patent 2766286C1 No. 2021102576, filed February 4, 2021, issued March 11, 2022. 10 p. (In Russ.).
8. Dyomko A. I., Almazova E. G. Assessment of minimum achievable sidelobes level of ambiguity function for radio pulse sequences. *Proceedings in Cybernetics*. 2024;23(3):96–102. (In Russ.).

Информация об авторе

А. И. Дёмко – кандидат технических наук, доцент, почетный работник высшего образования РФ;

<https://orcid.org/0000-0003-0747-0294>,
dai321@mail.ru

About the author

A. I. Dyomko – Candidate of Sciences (Engineering), Docent, Honored Worker of Higher Education of the Russian Federation;

<https://orcid.org/0000-0003-0747-0294>,
dai321@mail.ru