Научная статья
УДК 519.83 + 51-37
https://doi.org/10.35266/1999-7604-2025-4-4

Оптимальное распределение дронов в групповом преследовании целей при реализации венгерского алгоритма в системе компьютерной математики

Александр Анатольевич Дубанов✉, Петр Антонович Болоев
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Улан-Удэ, Россия

Аннотация. В работе рассматривается задача оптимального назначения дронов для группового преследования множественных целей. Представлена реализация в системе компьютерной математики венгерского алгоритма (алгоритма Манкреса) для решения классической задачи назначения в контексте многоагентных систем. Алгоритм обеспечивает глобально оптимальное решение задачи минимизации общей стоимости назначений между преследователями и целями.

Разработанная программа поддерживает загрузку матриц стоимостей из файлов формата MAT и CSV, автоматическое определение переменных в MAT-файлах и интерактивный выбор файлов через графический интерфейс. Реализована функция валидации входных данных с проверкой корректности размерности матриц и отсутствия недопустимых значений.

Проведено сравнительное исследование эффективности венгерского алгоритма относительно жадного подхода на примерах матриц стоимостей размером 10×10. Результаты демонстрируют значительное улучшение качества решения при использовании венгерского алгоритма, что подтверждает его преимущества для задач группового преследования.

Предложенное решение может быть использовано в системах управления беспилотными летательными аппаратами, роботизированных платформах и других многоагентных системах, требующих оптимального распределения ресурсов.

Ключевые слова: венгерский алгоритм, задача назначения, групповое преследование, дроны, многоагентные системы, MATLAB, оптимизация

Для цитирования: Дубанов А. А., Болоев П. А. Оптимальное распределение дронов в групповом преследовании целей при реализации венгерского алгоритма в системе компьютерной математики // Вестник кибернетики. 2025. Т. 24, № 4. С. 35–40. https://doi.org/10.35266/1999-7604-2025-4-4.

Original article

Optimal allocation of drones in group target pursuit implementing the Hungarian algorithm in a computer algebra system

Alexander A. Dubanov✉, Petr A. Boloev
Buryat State University named after D. Banzarov, Ulan-Ude, Russia

Abstract. The paper considers the problem of optimal drone assignment for group pursuit of multiple targets. A MATLAB implementation of the Hungarian algorithm, also known as the Munkres assignment algorithm, is presented for addressing the conventional distribution problem in multi-agent systems. The algorithm provides a globally most suitable solution for minimizing the total cost of assignments between pursuers and targets.

The developed program supports loading cost matrices from MAT and CSV files, automatic variable detection in MAT files, and interactive file selection via a graphical interface. Input data validation checking the correctness of matrix dimensions and the absence of invalid values, is implemented.

An evaluation of the Hungarian algorithm's efficacy compared to the greedy algorithm is performed using 10×10 cost matrices. The results demonstrate a significant improvement in quality of solution finding when using the Hungarian algorithm, which confirms its advantages for group pursuit problems.

The proposed method can be used in control systems for unmanned aerial vehicles, robotic platforms, and other multi-agent systems requiring optimal resource allocation.

Keywords: Hungarian algorithm, assignment problem, group pursuit, drones, multi-agent systems, MATLAB, optimization

For citation: Dubanov A. A., Boloev P. A. Optimal allocation of drones in group target pursuit implementing the Hungarian algorithm in a computer algebra system. *Proceedings in Cybernetics*. 2025;24(4):35–40. https://doi.org/10.35266/1999-7604-2025-4-4.

ВВЕДЕНИЕ

Современные технологии группового управления беспилотными летательными аппаратами (БПЛА) открывают новые возможности для решения сложных задач в различных областях применения, включая военные операции, поисково-спасательные работы, мониторинг территорий и доставку грузов. Одной из ключевых проблем при организации групповых операций БПЛА является оптимальное распределение задач между агентами, что особенно актуально в сценариях группового преследования множественных целей.

Задача назначения представляет собой классическую проблему комбинаторной оптимизации, которая заключается в нахождении оптимального соответствия между элементами двух множеств при заданных ограничениях и целевой функции. В контексте группового преследования дронами задача формулируется как поиск такого назначения преследователей на цели, которое минимизирует общую стоимость (например, время перехвата, энергопотребление или расстояние) при условии, что каждый дрон назначается не более чем на одну цель, а каждая цель преследуется не более чем одним дроном.

Для решения задачи назначения разработано множество алгоритмов, среди которых особое место занимает венгерский алгоритм (алгоритм Манкреса), предложенный в 1955 г. Данный алгоритм гарантированно находит глобально оптимальное решение за полиномиальное время $O(n^3)$, что делает его особенно привлекательным для практических применений. В отличие от жадных подходов, которые принимают локально оптимальные решения на каждом шаге, венгерский алгоритм рассматривает задачу в целом и обеспечивает глобальную оптимальность.

Несмотря на теоретическую разработанность алгоритма, его практическая реализация в среде MATLAB для задач группового преследования дронами требует решения ряда технических вопросов, включая эффективную загрузку данных, валидацию входных параметров, обработку различных форматов файлов и удобный пользовательский интерфейс. Кроме того, важным аспектом является сравнительный анализ эффективности различных подходов к решению задачи назначения.

Целью данной работы является разработка и реализация в MATLAB программного решения для оптимального назначения дронов в задачах группового преследования с использованием венгерского алгоритма, а также проведение сравнительного анализа его эффективности относительно альтернативных подходов.

В работе решаются следующие задачи:

– разработка MATLAB-реализации венгерского алгоритма для решения задачи назначения;

– создание системы загрузки и валидации матриц стоимостей из различных источников данных;

– реализация сравнительного анализа эффективности венгерского и жадного алгоритмов;

– тестирование предложенного решения на примерах различной размерности.

При создании математических моделей дифференциальных игр использовались труды [1–3]. При реализации в системе компьютерной математики венгерского алгоритма применялись работы [4–9]. При сравнении венгерских алгоритмов с жадными опирались на труды [10, 11]. При моделировании группового поведения объектов квазидискретной дифференциальной игры использовались исследования [12–16].

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Рассмотрим задачу оптимального назначения дронов для группового преследования целей. Пусть имеется множество преследователей (дронов) $P = \{p_1 \dots p_m\}$ и множество целей $T = \{t_1 \dots t_n\}$, где m и n – количество преследователей и целей соответственно.

Определим матрицу стоимостей

$$C = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

где c_{ij} представляет стоимость назначения преследователя p_i на цель t_i. В контексте группового преследования стоимость может выражаться через: Евклидово расстояние: $c_{ij} = p_i - t_i$, Время перехвата: $c_{i,j} = \frac{p_i - t_j}{v_i}$, где v_i –скорость i-го дрона, Энергопотребление: $c_{ij} = f(p_i - t_i, v_i)$.

Задача назначения формулируется как задача целочисленного линейного программирования при помощи целевой функции:

$$F(C,X) = \sum_{i}^{m}\sum_{j}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij},$$

где c_{ij} – коэффициенты матрицы стоимостей, x_{ij} – бинарная переменная

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если дрон } i \text{ назначается на цель } j \\ 0, \text{если дрон } i \text{ не назначается на цель } j \end{cases}.$$

Функцию $F(C,X)$ следует минимизировать и найти соответствующий вектор X, который будет характеризовать пары преследователь – цель при оптимальном распределении.

Задача имеет ограничения:

$$\begin{array}{l} x_{11} + \;\dots\; + x_{1j} \;\dots\; + x_{1n} \le 1 \\ \vdots \qquad\quad \ddots \qquad\quad \vdots \\ x_{i1} + \;\dots\; + x_{ij} \;\dots\; + x_{in} \le 1 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ x_{m1} + \;\dots\; + x_{mj} \;\dots\; + x_{mn} \le 1 \end{array}.$$

Каждый дрон назначается не более чем на одну цель, и каждая цель преследуется не более чем одним дроном.

В данной работе рассматривается задача оптимального назначения дронов на цели с целью минимизации общей стоимости операций. Стоимость может выражаться через различные метрики: расстояние полета, время выполнения миссии, энергопотребление или их комбинацию.

Подготовка данных и формирование матрицы стоимостей. Исходные данные могут представлять собой как реальные координаты объектов, полученные с помощью GPS или других систем позиционирования, так и синтетические данные, сгенерированные для тестирования алгоритма. На основе этих данных строится матрица стоимостей C размером $m \times n$, где m – количество дронов, n – количество целей. Элемент c_{ij} матрицы отражает стоимость назначения i-го дрона на j-ю цель.

Перед применением алгоритма необходимо выполнить проверку корректности матрицы: убедиться в неотрицательности всех элементов, отсутствии бесконечных значений и правильности размерности. В случае прямоугольной матрицы $m \neq n$ она дополняется фиктивными строками или столбцами с достаточно большим значением M, что позволяет свести задачу к квадратной форме.

Математическая постановка задачи. Задача формулируется как поиск бинарных переменных $x_{ij} \in \{0,1\}$, где $x_{ij} = 1$ означает назначение i-го дрона на j-ю цель. Целевая функция имеет вид:

$$F(C,X) = \Sigma_i \Sigma_j c_{ij} \cdot x_{ij}.$$

Ограничения задачи обеспечивают, что каждый дрон назначается не более чем на одну цель, а каждая цель получает не более одного дрона. Для квадратной матрицы эти ограничения становятся равенствами, гарантируя полное назначение всех дронов.

Принцип работы венгерского алгоритма. Алгоритм основан на последовательном преобразовании матрицы стоимостей с сохранением оптимальности решения. Первоначально выполняется редукция строк – из каждого элемента вычитается минимальный элемент соответствующей строки. Аналогично производится редукция столбцов. Эти операции создают нулевые элементы, которые являются кандидатами для назначений.

На следующем этапе выполняется жадное назначение независимых нулей, где каждый ноль может быть назначен, только если его строка и столбец еще не заняты. Если все столбцы оказываются покрытыми назначениями, решение найдено.

В противном случае алгоритм ищет непокрытые нули и строит чередующуюся цепочку, чередуя простые и звездные пометки. Этот процесс позволяет перераспределить назначения и увеличить их количество. При отсутствии непокрытых нулей выполняется корректировка матрицы путем вычитания минимального непокрытого элемента из непокрытых строк и добавления его к покрытым столбцам, что создает новые нули для дальнейшего назначения.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Для решения задачи оптимального распределения была написана программа реализации венгерского алгоритма в системе компьютерной математики MATLAB, с которой можно ознакомиться на сайте [17]. В качестве примера была сгенерирована матрица стоимостей [18] размерности [10×10].

Был реализован венгерский алгоритм в MATLAB (подробности и код – в [17]) и проверили его работу на сгенерированной матрице стоимостей [18] размерности [10×10].

На рис. 1 можно увидеть скриншот с работы программы, реализующей венгерский алгоритм оптимизации, где показана матрица стоимостей.

23.3525	47.0351	21.7293	18.1824	31.9699	19.8951	38.1842	41.0537	43.6922	44.4060
14.4693	56.1146	21.3212	25.1606	23.0909	28.2604	46.7115	43.2674	36.1144	42.1533
48.9674	61.6668	50.4464	10.7294	39.9043	11.4373	16.3055	16.3816	70.6060	73.1455
14.1980	65.3544	22.0192	53.3943	38.9205	55.9500	74.4069	70.9698	7.5506	23.7172
19.4112	44.8040	4.7831	44.5500	45.8988	45.5464	62.8176	67.1394	25.2477	17.9217
41.2193	95.8195	52.9261	79.3607	52.5672	82.7667	101.1092	91.2342	26.2738	47.4060
71.7345	50.7069	65.0825	35.8088	71.4186	31.4680	17.4919	45.3949	91.2304	85.5778
63.7746	19.7542	50.4303	44.0627	75.5548	39.9583	40.6558	65.3447	78.0700	65.4468
59.1329	3.4910	43.0962	50.7566	76.5962	47.5719	53.4866	74.7574	69.3893	53.3284
67.4818	19.3322	53.6725	48.2992	79.7630	44.1657	44.1559	69.3283	81.1972	67.7348

Рис. 1. Матрица стоимостей евклидовых расстояний
Примечание: составлено авторами на основании данных, полученных в исследовании.

Каждый элемент этой матрицы есть евклидово расстояние от i-го дрона (по строкам) до j-й цели (по столбцам).

На рис. 2 показан результат работы венгерского алгоритма в виде соответствия дронов и целей. Произведена минимизация целевой функции: $F(C,X) = \Sigma_i \Sigma_j c_{ij} \cdot x_{ij}$ с ограничениями того, что один дрон может преследовать одну цель, и одна цель может преследоваться только одним дроном.

```
Оптимальное назначение:
Row 1 -> Col 5 (стоимость: 31.9699)
Row 2 -> Col 1 (стоимость: 14.4693)
Row 3 -> Col 8 (стоимость: 16.3816)
Row 4 -> Col 10 (стоимость: 23.7172)
Row 5 -> Col 3 (стоимость: 4.78307)
Row 6 -> Col 9 (стоимость: 26.2738)
Row 7 -> Col 7 (стоимость: 17.4919)
Row 8 -> Col 4 (стоимость: 44.0627)
Row 9 -> Col 2 (стоимость: 3.49099)
Row 10 -> Col 6 (стоимость: 44.1657)
Общая стоимость: 226.806
```

Рис. 2. Результат работы венгерского алгоритма
Примечание: составлено авторами на основании данных, полученных в исследовании.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе была рассмотрена задача оптимального назначения дронов к целям на основе матрицы евклидовых расстояний. Для ее решения применялся венгерский алгоритм, который обеспечил минимизацию целевой функции и позволил получить взаимно однозначное соответствие между дронами и целями.

Результаты эксперимента показали, что использование венгерского алгоритма обеспечивает эффективное распределение ресурсов при учете ограничений задачи (каждой цели соответствует ровно один дрон, и каждый дрон назначается только на одну цель). Полученное решение подтверждает целесообразность применения данного метода в задачах многоагентного взаимодействия, включая сценарии преследования целей и распределения заданий.

Список источников

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М. : Мир, 1967. 480 с.
2. Понтрягин Л. С. Линейная дифференциальная игра убегания // Тр. МИАН СССР. 1971. Т. 112. С. 30–63.
3. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М. : Наука, 1974. 456 с.
4. Burkard R. M., Dell'Amico M., Martello S. Assignment problems. Philadelphia, USA : SIAM – Society of Industrial and Applied Mathematics. 2009. Vol. 8. 402 p.
5. Kuhn H. W. The Hungarian method for the assignment problem // Naval Research Logistics Quarterly. 1955. Vol. 2, no. 1–2. P. 83–97.
6. Kuhn H. W. Variants of the Hungarian method for assignment problems // Naval Research Logistics Quarterly. 1956. Vol. 3, no. 4. P. 253–258.
7. Munkres J. Algorithms for the assignment and transportation problems // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. 1957. Vol. 5, no. 1. P. 32–38.
8. Fischetti M. Operation research lessons. N. p. 1995. 236 p.
9. Ahuja R. K., Magnanti T. L., Orlin J. B. Network Flows. Theory, algorithms, and applications. Prentice Hall, 1993. 863 p.
10. Cai X. Canonical coin systems for change-making problems // Proceedings of 2009 Ninth International Conference on Hybrid Intelligent Systems, Shenyang, China. 2009. Vol. 1. p. 499–504. https://doi.org/10.1109/HIS.2009.103.
11. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. и др. Жадные алгоритмы // Алгоритмы. Построение и анализ / пер. с англ. под ред. И. В. Красикова. 2-е изд. М. : Вильямс, 2005. С. 442–481.
12. Вагин Д. А., Петров Н. Н. Задача преследования жестко скоординированных убегающих // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2001. № 5. С. 75–79.
13. Банников А. С. Некоторые нестационарные задачи группового преследования // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2013. № 1. С. 3–46.
14. Банников А. С. Нестационарная задача группового преследования // Вестник Удмуртского Университета. 2008. Вып. 2. С. 14–16.
15. Изместьев И. В., Ухоботов В. И. Задача преследования маломаневренных объектов с терминальным множеством в форме кольца // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2018. Т. 148. С. 25–31.

References

1. Isaacs R. Differential Games. Moscow: Mir; 1967. 480 p. (In Russ.).
2. Pontryagin L. S. A linear differential evasion game. *Proceedings of the Steklov Mathematical Institute of the USSR*. 1971;112:30–63. (In Russ.).
3. Krasovsky N. N., Subbotin A. I. Pozitsionnye differentsyalnye igry. Moscow: Nauka; 1974. 456 p. (In Russ.).
4. Burkard R. M., Dell'Amico M., Martello S. Assignment Problems. Philadelphia, USA: SIAM – Society of Industrial and Applied Mathematics; 2009. Vol. 8. 402 p.
5. Kuhn H. W. The Hungarian method for the assignment problem. *Naval Research Logistics Quarterly*, 1955;2(1–2):83–97.
6. Kuhn H. W. Variants of the Hungarian method for assignment problems. *Naval Research Logistics Quarterly*. 1956;3(4):253–258.
7. Munkres J. Algorithms for the assignment and transportation problems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*. 1957;5(1):32–38.
8. Fischetti M. Lezioni di Ricerca Operativa. N. p. 1995. 236 p. (In Italian).
9. Ahuja R. K., Magnanti T. L., Orlin J. B. Network Flows. Theory, Algorithms, and Applications. Prentice Hall; 1993. 863 p.
10. Cai X. Canonical coin systems for change-making problems. In: *Proceedings of 2009 Ninth International Conference on Hybrid Intelligent Systems*. Shenyang, China. 2009. Vol. 1. p. 499–504. https://doi.org/10.1109/HIS.2009.103.
11. Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L. et al. Greedy Algorithms. Introduction to algorithms. Krasikov I. V., ed. 2nd ed. Moscow: Williams; 2005. P. 482–481 (In Russ.).
12. Vagin D. A., Petrov N. N. A problem of the pursuit of a group of rigidly connected evaders. *Izvestiya Rossiyskoy Akademii Nauk. Teoriya i sistemy upravleniya*. 2001;(5):75–79. (In Russ.).
13. Bannikov A. S. Some non-stationary problems of group pursuit. *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*. 2013;1(41):3–46. (In Russ.).
14. Bannikov A. S. Non-stationary problem of group pursuit. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta*. 2008;2:14–16. (In Russ.).
15. Izmestev I. V., Ukhobotov V. I. Pursuit problem of low-maneuverable objects with a ring-shape terminal set. *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory*. 2018;148:25–31. (In Russ.).

16. Панкратова Я. Б. Решение кооперативной дифференциальной игры группового преследования // Дискретный анализ и исследование операций. 2010. Т. 17, № 2. С. 57–78.
17. Программа венгерского алгоритма в MATLAB. URL: https://github.com/dubanovalex67-eng/Hungarian_Algorithm_MATLAB/blob/main/run_hungarian_from_file.m (дата обращения: 09.09.2025).
18. Матрица стоимостей. URL: https://github.com/dubanovalex67-eng/Hungarian_Algorithm_MATLAB/blob/main/cost_matrix.mat (дата обращения: 09.09.2025).

16. Pankratova Ya. B. Solutions of a cooperative differential group pursuit game. *Discrete Analysis and Operations Research.* 2010;17(2):57–78. (In Russ.).
17. MATLAB program for the Hungarian algorithm. URL: https://github.com/dubanovalex67-eng/Hungarian_Algorithm_MATLAB/blob/main/run_hungarian_from_file.m (accessed: 09.09.2025).
18. Cost matrix. URL: https://github.com/dubanovalex67-eng/Hungarian_Algorithm_MATLAB/blob/main/cost_matrix.mat (accessed: 09.09.2025).

Информация об авторах

А. А. Дубанов – кандидат технических наук, доцент;
https://orcid.org/0000-0002-1855-2562,
alandubanov@mail.ru✉
П. А. Болоев – доктор технических наук, профессор;
https://orcid.org/00020-0002-3940-1296,
lemex74@mail.ru

About the authors

A. A. Dubanov – Candidate of Sciences (Engineering), Docent;
https://orcid.org/0000-0002-1855-2562,
alandubanov@mail.ru✉
P. A. Boloev – Doctor of Sciences (Engineering), Professor;
https://orcid.org/00020-0002-3940-1296,
lemex74@mail.ru