УДК 511.11

ГАРМОНИЧЕСКИЙ РЯД $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$

Г. Е. Деев, С. В. Ермаков
Обнинский институт атомной энергетики,
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
georgdeo@mail.ru, ermakov@iate.obninsk.ru

Найдено расположение суммы гармонического ряда на шкалах бесконечностей, определяемых, соответственно, обобщенной разрядной сеткой и числовой гиперосью. Получено представление для эйлеровой константы *C* [1, 2, 3], отличное от ее непосредственного определения: $C=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n)$.

Использованный при этом подход позволяет расширить область применимости вычислительных устройств вплоть до бесконечно больших чисел. Это показано на примере вычислений, проводимых автоматом сдвига.

Ключевые слова: расходимость рядов, обобщенное суммирование, разрядная сетка, гиперсетка, числовая ось, гиперось, числоиды, гиперчисла.

HARMONIC SERIES $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$

G. E. Deev, S. V. Ermakov
Obninsk Nuclear Energy Institute,
National Research Nuclear University MEPhI
georgdeo@mail.ru, ermakov@iate.obninsk.ru

The position of the harmonic series sum on infinity scales is found. These sums are defined by the generalized bit grid and number hyper axis. A representation for the Euler's constant *C* [1, 2, 3] is obtained, which differs from its direct definition: $C=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n)$.

The used approach allows extending the range of applicability of computing devices up to infinitely large numbers. This is shown by the example of calculations carried out by the shift automaton.

Keywords: divergence of series, generalized summation, bit grid, hypergrid, number axis, hyper axis, chisloid, hypernumbers.

Числовые гиперсетки и гипероси. Шкалы бесконечностей

Натуральные числа из $N_0=\{0,1,2,\ldots\}$ представляются на разрядной сетке $Gr^0 \equiv \underbrace{\ldots\underset{3}{-}\underset{2}{-}\underset{1}{-}\underset{0}{-}}_{Gr^0(10^0)}$, в которой горизонтальными черточками обозначены места (разряды). Места занумерованы, на них ставятся цифры системы счисления, в которой происходит рассмотрение. Будем вести изложение в десятичной системе счисления с множеством цифр $Z_{(10)}=\{0,1,2,\ldots,9\}$. Объект, который получается путем простановки цифр на все места разрядной сетки Gr^0, называется *числоидом*. Место в разрядной сетке Gr^0, занумерованное цифрой 0, отмечает *разряд единиц*, цифрой 1 – *разряд десятков*, цифрой 2 – *разряд сотен* и т. д. Например, числоид $\ldots\underset{4}{0}\,\underset{3}{0}\,\underset{2}{7}\,\underset{1}{5}\,\underset{0}{2}$ представляет натуральное число 752. Обычно, записывая его, обходятся без нулей в старших разрядах, хотя полная запись этого числа такова: …00752. Нули в старших разрядах всегда подразумеваются и по мере надобности восстанавливаются. Бесконечное число нулей в старших разрядах $...000$ изображаем символом $\overleftarrow{0}$, так что $...000=\overleftarrow{0}$ и $...00752=\overleftarrow{0}752$. В вычислениях, реализуемых абстрактными вычислительными устройствами (АВУ) [4], символ $\overleftarrow{0}$ играет важную роль. Следует подчеркнуть, что на сетке Gr^0 только натуральные числа имеют представление с $\overleftarrow{0}$: $[\overline{n}\in N_0]\leftrightarrow[\overline{n}=\overleftarrow{0}n_{r-1}...n_1n_0,\ \ n_i\in Z_{(10)},\ \ (i=0,1,...,r-1)]$. Если вместо $\overleftarrow{0}$ стоит иная комбинация знаков, например, $\overleftarrow{1},\overleftarrow{6},\overleftarrow{9},\overleftarrow{75},...$, то такой числоид не представляет натурального числа (заметим, что при общем изображении чисел и числоидов используется черточка наверху: $\overline{n},\overline{q},\overline{x},...$; цифры изображаются без черточек: x, y…).

Множество числоидов, представляющих натуральные числа, порождается из числоида $\overleftarrow{0}$ регулярным образом с помощью *автомата сдвига S*, представленного в десятичной системе счисления (табл. 1). Множество состояний Q автомата состоит из двух элементов: $Q=\{\overleftarrow{0},\overleftarrow{0}1\}$. Входной ($X$) и выходной ($Y$) алфавиты автомата совпадают с множеством цифр системы счисления: $X=Y=Z_{(10)}$. Входной алфавит автомата содержится в левом обрамляющем столбце таблицы, правда, буквы этого алфавита (= цифры) снабжены дополнительно стрелками, учитывающими возможность подачи на вход автомата не только отдельных цифр, но и цифровых массивов типа $\overleftarrow{0}$. В верхней обрамляющей строке находятся состояния автомата. На пересечении строки, отмеченной буквой x входного алфавита и столбца, отмеченного состоянием $\overline{q}$, находится пара вида $\overline{q}',y$, где первый элемент $\overline{q}'$ показывает то состояние, в которое переходит автомат в следующий момент времени, а второй ее элемент y указывает на тот выходной сигнал, который вырабатывается в текущий момент времени. Это словесное описание функционирования автомата может быть изображено диаграммой, показывающей как происходит процесс вычисления в каждый отдельный момент времени t:

$$\begin{array}{ccc}
t+1 & & t \\
\hline
 & & x \\
 & & | \\
\overline{q}' & \leftarrow & \overline{q} \\
 & & \downarrow \\
 & & y.
\end{array}$$

Совокупность таких диаграмм, упорядоченных во времени, образует *развертку* во времени работы автомата.

Таблица 1

Автомат сдвига *S*

$x \backslash \overline{q}$	$\overleftarrow{0}$	$\overleftarrow{0}1$
$\overleftarrow{0}$	$\overleftarrow{0},\overleftarrow{0}$	$\overleftarrow{0},1$
$\overleftarrow{1}$	$\overleftarrow{0},\overleftarrow{1}$	$\overleftarrow{0},2$
$\overleftarrow{2}$	$\overleftarrow{0},\overleftarrow{2}$	$\overleftarrow{0},3$
$\overleftarrow{3}$	$\overleftarrow{0},\overleftarrow{3}$	$\overleftarrow{0},4$
$\overleftarrow{4}$	$\overleftarrow{0},\overleftarrow{4}$	$\overleftarrow{0},5$
$\overleftarrow{5}$	$\overleftarrow{0},\overleftarrow{5}$	$\overleftarrow{0},6$
$\overleftarrow{6}$	$\overleftarrow{0},\overleftarrow{6}$	$\overleftarrow{0},7$
$\overleftarrow{7}$	$\overleftarrow{0},\overleftarrow{7}$	$\overleftarrow{0},8$
$\overleftarrow{8}$	$\overleftarrow{0},\overleftarrow{8}$	$\overleftarrow{0},9$
$\overleftarrow{9}$	$\overleftarrow{0},\overleftarrow{9}$	$\overleftarrow{0}1,\overleftarrow{0}$

Приведем пример порождения непосредственно следующего натурального числа с помощью автомата сдвига.

Пример 1. Пусть $\overline{n} = \overleftarrow{0}745$. Пропустим этот числоид через автомат сдвига *S*. За процессом вычисления проследим с помощью развертки, позволяющей пошагово следить за работой устройства. Развертка такова:

0		$\infty > t \geq 3$		2		1		0	t
		$\overleftarrow{0}$		7		4		5	x
		$\vert$		$\vert$		$\vert$		$\vert$	
$\overleftarrow{0}$	$\leftarrow$	$\overleftarrow{0}$	$\leftarrow$	$\overleftarrow{0}$	$\leftarrow$	$\overleftarrow{0}$	$\leftarrow$	$\overleftarrow{0}1$	$\overline{q}$
		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$	
		$\overleftarrow{0}$		7		4		6	y

Пишем результат: $\overleftarrow{0}745\ S \mid \overleftarrow{0}1 = \overleftarrow{0} \mid \overleftarrow{0}746$. Читаем результат: автомат сдвига *S,* поставленный в начальное состояние $\overline{q} = \overleftarrow{0}1$ (стоит справа от вертикальной черты), при подаче на его вход числа $\overleftarrow{0}745$ переходит в состояние $\overline{q}' = \overleftarrow{0}$ (стоит слева от вертикальной черты) и вырабатывает число $\overleftarrow{0}746$. Таким образом, автомат сдвига *S* обнаруживает, что числом, непосредственно следующим за числом $\overleftarrow{0}745$, является число $\overleftarrow{0}746$.

Обратим внимание, что для обнаружения этого факта нам не потребовались никакие операции более высокого ранга, чем операция сдвига, т. е. упорядочивание множества натуральных чисел происходит с помощью автомата сдвига, автомата самого низкого уровня. Следовательно, упорядоченные структуры также относятся к первичным структурам.

Из примера видно, что автомат сдвига *определяет* и *реализует* отношение *непосредственного следования* на множестве натуральных чисел. По терминологии Пеано, он выступает как *оператор-последователь*.

Заметим, что переход к непосредственно следующему числу происходит только тогда, когда автомат сдвига ставится в начальное состояние $\overline{q} = \overleftarrow{0}1$, что изображается записью: $\overline{n} \prec \overline{n}\ S \mid \overleftarrow{0}1$, где справа от значка $\prec$ стоит число, непосредственно следующее за $\overline{n}$. Если за начальное состояние брать состояние $\overline{q} = \overleftarrow{0}$, то автомат осуществит тождественное отображение: $\overline{n}\ S \mid \overleftarrow{0} = \overleftarrow{0} \mid \overline{n}$.

В дальнейшем будут использоваться три соотношения, рассмотренные в [5].

Первое соотношение имеет вид:

$$\lim_{n\to\infty} 10^n = 10^\infty . \tag{1}$$

Оно является определяющим и *определяет* элемент 10^∞, являющийся идеальным по отношению к последовательности элементов $\{10^n\}$, $(n = 0,1,2,\ldots)$. Элемент 10^n этой последовательности изображается единицей в разряде *n* на сетке $Gr^0 : Gr^0 \equiv \underbrace{\ldots\underset{n}{1}\ldots\underset{2}{-}\underset{1}{-}\underset{0}{-}}_{Gr^0(10^0)}$. При $n \to \infty$ эта единица перемещается влево, в сторону роста разрядов, и при мысленном завершении процесса (т. е. при актуализации) выходит за пределы сетки Gr^0, оказывается в нулевом разряде следующей разрядной сетки Gr^1, места которой имеют общий вес, равный 10^∞. Это соответствует картинке: $\underbrace{\ldots\underset{n}{-}\ldots\underset{2}{-}\underset{1}{-}\underset{0}{1}}_{Gr^1(10^\infty)} \| \underbrace{\ldots\underset{n}{-}\ldots\underset{2}{-}\underset{1}{-}\underset{0}{-}}_{Gr^0(10^0)}$, показывающей расположение единицы после завершения предельного перехода на сетке Gr^0. Две вертикальные черты – это границы раздела двух соседних разрядных сеток Gr^0 и Gr^1. Единица, стоящая на нулевом месте сетки Gr^1 и являющаяся результатом предельного перехода, изображает число 10^∞, имеющее смысл на этой сетке. Так истолковывается соотношение (1).

Приведенная выше картинка индуцирует представление об *обобщенной разрядной сетке*, по-другому говоря, о *гиперсетке*, модель которой такова:

$$Gr \equiv \ldots \| \underbrace{\ldots \underset{3}{-}\,\underset{2}{-}\,\underset{1}{-}\,\underset{0}{-}}_{Gr^2(10^{2\cdot\infty})} \| \underbrace{\ldots \underset{3}{-}\,\underset{2}{-}\,\underset{1}{-}\,\underset{0}{-}}_{Gr^1(10^{1\cdot\infty})} \| \underbrace{\ldots \underset{3}{-}\,\underset{2}{-}\,\underset{1}{-}\,\underset{0}{-}}_{Gr^0(10^0)} |,$$

где сетка $Gr^1(10^{1\cdot\infty})$ представляет мир бесконечно больших величин первого порядка, сетка $Gr^2(10^{2\cdot\infty})$ – мир бесконечно больших величин второго порядка и т. д. Сетка Gr есть не что иное как шкала бесконечностей, представленная с помощью разрядных сеток $Gr^p(10^{p\cdot\infty})$, ($p = 0,1,2,\ldots$) различных весов.

Проследим за работой автомата сдвига на сетках. На сетке Gr^0 среди r-разрядных чисел вида $n = \ldots 000 n_{r-1} \ldots n_2 n_1 n_0 = \overleftarrow{0} n_{r-1} \ldots n_2 n_1 n_0$, где $n_i \in Z_{(10)} = \{0,1,2,\ldots,9\}$ – цифры десятичной системы счисления, достижимыми являются все числа и, в частности, последнее из них, число $\overleftarrow{0}\underbrace{9\ldots999}_{r\ \text{раз}}$. Устремляя r к бесконечности, получим результат: $\ldots 9 \ldots 999 = \overleftarrow{9}$. Этот числоид заполняет девятками все места разрядной сетки Gr^0: $Gr^0 \equiv \ldots \underset{n}{\underline{9}} \ldots \underset{2}{\underline{9}}\,\underset{1}{\underline{9}}\,\underset{0}{\underline{9}}$. Но он не может быть достигнут автоматом сдвига ни за какое конечное время. Только за время равное бесконечности. Это является реальной преградой, непреодолимой никаким устройством, созданным человеком. Однако прыжок к бесконечности можно вообразить мыслью, на что человек способен. В этой работе воображения заключается процедура актуализации бесконечности. Таким образом, процедура актуализации бесконечности оторвана от вычислительного устройства, находится вне его. Но мы, владея ею, приписываем вычислительному устройству дополнительные свойства. Мы переносим наши мыслительные способности на автомат сдвига и помогаем ему *завершить* построение множества натуральных чисел и на этом основании писать: $N_0 = \{0,1,2,\ldots\}$ и говорить о множестве N_0 как об отдельном объекте, подчеркивая (следуя Кантору) его объектную сущность. Таким образом, допуская с помощью актуализации существование на разрядной сетке Gr^0 числоида $\ldots 9 \ldots 999 = \overleftarrow{9}$ как результата предельного перехода, завершающего процесс порождения натуральных чисел, мы можем поставить вопрос о продолжении вычислений с помощью автомата сдвига. Итак, мы хотим узнать, может ли автомат сдвига провести вычисление с числоидом $\overleftarrow{9}$ и, если может, то каков результат такого вычисления. Это рубежный момент, т. к. результат связан с переходом в следующую разрядную сетку. Изображаем развертку, отражающую процесс соответствующего вычисления.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|cc|c|c|c}
 & \infty > t \geq 0 & & \infty > t \geq 0 & & \infty > t \geq 1 & 0 & & \infty > t \geq 0 & t \\
\hline
 & & & \overleftarrow{0} & & \overleftarrow{0} & 0 & & \overleftarrow{9} & x \\
 & & & | & & | & | & & | & \\
\ldots & \overleftarrow{0} & \leftarrow & \overleftarrow{0} & \leftarrow & \overleftarrow{0} \quad \leftarrow & \overleftarrow{0}1 & \leftarrow & \overleftarrow{0}1 & \overline{q} \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & \overleftarrow{0} & & \overleftarrow{0} & 1 & & \overleftarrow{0} & y \\
 & \underbrace{\text{Вычисление на}}_{Gr^3} & & \underbrace{\text{Вычисление на}}_{Gr^2} & & \underbrace{\text{Вычисление на}}_{Gr^1} & & & \underbrace{\text{Вычисление на}}_{Gr^0} &
\end{array}$$

Записываем результат вычисления автоматом сдвига при подаче на его вход числоида $\overleftarrow{9}$:

$$\ldots \| \underset{Gr^2}{\overleftarrow{0}} \| \underset{Gr^1}{\overleftarrow{0}} \| \underset{Gr^0}{\overleftarrow{9}} \| S \,|\, \overleftarrow{0}1 = \ldots \| \underset{Gr^2}{\overleftarrow{0}} \| \underset{Gr^1}{\overleftarrow{0}1} \| \underset{Gr^0}{\overleftarrow{0}} \|,$$

и читаем: если на вход автомата сдвига подан числоид $\overleftarrow{9}$, записанный на сетке Gr^0, то результатом вычисления будет гиперчислоид, содержащий числоид $\overleftarrow{0}$ на сетке Gr^0, числоид $\overleftarrow{0}1$ на сетке Gr^1, числоид $\overleftarrow{0}$ на сетке Gr^2 и т. д.

Привлекает к себе внимание часть вычисления, расположенная на «нашей» сетке Gr^0, поскольку в реальной жизни мы пользуемся только информацией на сетке Gr^0. Мир бесконечно больших и бесконечно малых величин интересен лишь в научных рассмотрениях и реально нам не доступен. Результат на сетке Gr^0 таков:

$$\| \underset{Gr^0}{\overleftarrow{9}} \| S \,|\, \overleftarrow{0}1 = \ \| \underset{Gr^0}{\overleftarrow{0}} \|.$$

Это означает, что, если ограничиться рассмотрениями на сетке Gr^0, то числоид $\overleftarrow{9}$ является непосредственно предшествующим по отношению к числоиду $\overleftarrow{0}$, т. е. к нулю, что может быть записано формулой: $\overleftarrow{9}S \,|\, \overleftarrow{0}1 \prec \overleftarrow{0}$ или кратко $\overleftarrow{9} \prec \overleftarrow{0}$. Следовательно, $\overleftarrow{9}$ играет роль минус единицы, что позволяет записать представительское равенство: $\overleftarrow{9} = -1$. Во всех расчетах, не выходящих за пределы сетки Gr^0, при замене (-1) на $\overleftarrow{9}$ будут получаться правильные результаты. Например, $\overleftarrow{0}78 + \overleftarrow{9} = \overleftarrow{0}77$.

Приведенная выше развертка показывает, что автомат сдвига ведет вычисления на всей гиперсетке, правда, вычисления на разных участках развертки различны по своему характеру: при вычислениях внутри любой разрядной сетки он ведет вычисления регулярным образом, шагая от разряда к разряду, и только на стыках между соседними разрядными сетками в дело включается еще одна операция – актуализация. Актуализация позволяет завершить вычисление на каждой отдельной разрядной сетке. Без нее вычисление на сетке не могло бы быть завершено. Но актуализация – чисто мыслительный процесс, однако, материально реализуемый не только мыслящим существом, но и материальными устройствами. Именно благодаря возможности материальной реализации актуализации бесконечности существуют материальные объекты типа $\overleftarrow{0}$, $\overleftarrow{9}$, а также вышеприведенная развертка. Тем самым актуализация реально принимает участие в вычислениях с бесконечностями. Обратим внимание, что актуализация принимает участие в процессе вычисления на каждой отдельной разрядной сетке в момент, завершающий вычисление, условно говоря, при $t = \infty$. В этот момент происходит перенос информации в соседнюю разрядную сетку. Это вполне аналогично переходу в следующий разряд при регулярных вычислениях автомата сдвига внутри сетки. В самом деле, *в пределах одного разряда* автомат сдвига постепенно поднимает цифры от 0 до 9, после чего происходит перескок в следующий разряд, при этом в текущем разряде девятка переходит в 0, а в следующем разряде появляется единица (если в нем ранее был 0). Аналогично этому *на всей разрядной сетке* автомат сдвига добирается с помощью актуализации до $\overleftarrow{9}$ и в следующий момент времени происходит перескок: на всей разрядной сетке появляется $\overleftarrow{0}$, а в соседней разрядной сетке появляется единица $\overleftarrow{0}1$. Числоид $\overleftarrow{9}$, завершающий работу автомата сдвига на *разрядной сетке*, вполне аналогичен 9, завершающей процесс роста цифр в пределах одного *разряда*. Аналогия совершенно очевидна. В силу этой аналогии ситуацию, имеющую место в момент перехода из разряда в разряд, тоже можно назвать актуализацией, но актуализацией нулевого порядка. Актуализацию же, имеющую место при переходе от одной разрядной сетки к следующей, можно назвать актуализацией первого порядка. Но на этом актуализации не заканчиваются. Далее идет актуализация второго порядка, когда появляется объект $\overleftarrow{\overleftarrow{9}}$ и происходит переход к гипергиперсетке и т. д.

Итак, можно говорить об актуализациях различных порядков: актуализация^0, актуализация^1, актуализация^2, и т. д., а также гиперсетках различных порядков: гиперсетка порядка ноль – это разрядная сетка Gr^0, т. е. гиперсетка^0 = разрядная сетка; гиперсетка порядка один – это определенная нами раннее обобщенная разрядная сетка; настоящая гиперсетка, т. е. гиперсетка^1 = гиперсетка; гиперсетка порядка два – это гипергиперсетка, т. е. гиперсетка^2 = гипергиперсетка и т. д.

Второе соотношение, с которым мы будем встречаться, вытекает из вышесказанного и имеет вид:

$$\lim_{n\to\infty} n = \overleftarrow{9} \tag{3}$$

Оно отражает работу автомата сдвига по порождению натуральных чисел *на сетке* Gr^0 в момент актуализации.

Приведенная развертка является источником еще одного понятия – понятия *гипервремени*. Гипервремя пронизывает всю обобщенную разрядную сетку и задается формулой:

$$t = t_i + i\cdot\infty,\quad (i = 0,1,2,\ldots).$$

При $i=0$ получается время на сетке Gr^0, при $i=1$ – время на сетке Gr^1 и т. д. Символом ∞ условно обозначено актуализированное время, которое требуется автомату сдвига на прохождение любой разрядной сетки, входящей в гиперсетку. По определению считаем: $0\cdot\infty = 0$.

Но работа на разрядных сетках, работа с числоидами – это представительская работа, работа с объектами, представляющими числа, но не с самими числами.

Выражения, содержащие числоиды, носят представительский характер, они лишь представляют соответствующие числовые объекты, «количественной» характеристики они не дают, наподобие того, как 784 – это представительская характеристика вполне определенного количества, правда, легко понимаемая нами. Но она же, записанная в четверичной системе счисления как 30122, с точки зрения количественной воспринимается нами не так легко. Чтобы вскрыть количественное содержание представительских записей, надо провести дополнительное вычисление, проявив количественный смысл каждой содержащейся в записи цифры. Так,

$$784 = 7\cdot10^2 + 8\cdot10^1 + 4\cdot10^0 \text{ и } 30122 = 3\cdot4^4 + 0\cdot4^3 + 1\cdot4^2 + 2\cdot4^1 + 2\cdot4^0.$$

По аналогии находится количественный смысл записи

$$\overleftarrow{9} = \lim_{r\to\infty} \overleftarrow{0}\underbrace{9\ldots99}_{r\ раз} = \lim_{r\to\infty}(10^r - 1) = 10^{1\cdot\infty} - 1 \tag{4}$$

или, с учетом (3), кратко

$$\lim_{n\to\infty} n = 10^{1\cdot\infty} - 1. \tag{5}$$

Соотношение (5) – это *третье соотношение*, которым мы будем пользоваться.

Обратим внимание, что в правой части (5) стоит выражение, не находящееся на разрядной сетке Gr^0. Это не числоид, в то время как на разрядной сетке находятся одни числоиды. Равенство (5) дает *количественную* характеристику результата предельного перехода. Правая часть (5) относится к числу объектов количественной природы, которые не находятся на разрядной сетке. Они получают иную геометрическую интерпретацию.

Для понимания правой части в (5) удобно ее переписать:

$$10^{1\cdot\infty} - 1 = (-1)\cdot10^{0\cdot\infty} + 1\cdot10^{1\cdot\infty} \tag{6}$$

и трактовать так: *первое* слагаемое в (6) – это обыкновенное число (–1), расположенное на известной со школы числовой оси $Ax^0(10^0)$, на которой числа идут с весовым коэффициентом $10^0=10^{0\cdot\infty}$ (рис. 1); *второе* слагаемое – это бесконечно большая величина первого порядка. О порядке бесконечно большой величины мы узнаем по множителю 1, стоящему перед символом бесконечности в показателе. Существует числовая ось, полностью аналогичная нашей оси $Ax^0(10^0)$, на которой числа идут с общим весовым коэффициентом $10^{1\cdot\infty}$ и понимаются как бесконечно большие величины первого порядка. На этой числовой оси выбрано число 1 в качестве результата в (6).

Эти представления укладываются в рамки модели числовой гипероси, представленной далее и в [5–6]. Числовая гиперось является расширением известного понятия числовой оси и дает начальное представление о структуре бесконечности. Числовую ось, имеющую весовой коэффициент $10^{p\cdot\infty}$, обозначаем символами: $Ax^p(10^{p\cdot\infty})$ или Ax^p.

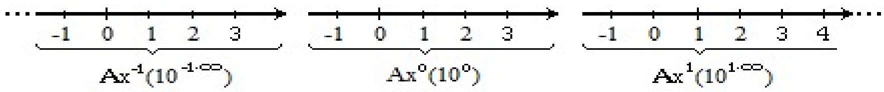

Рис. 1. Числовая гиперось Ax

Числовые оси, входящие в гиперось, упорядочены по признаку порядка p. Поэтому гиперось Ax можно записать как *упорядоченное* объединение числовых осей порядка p:

$$Ax=\bigcup_{-\infty<p<+\infty} Ax^p \tag{7}$$

Наглядное представление о гипероси можно получить из рис. 1. Отрицательным значениям p соответствуют бесконечно малые величины порядка p, положительным – бесконечно большие величины порядка p. Множество значений параметра p может быть как дискретным, так и континуальным, в частности, множеством всех действительных чисел. Видно, что числовая гиперось Ax представляет собою *шкалу бесконечностей*, каждая из которых, в свою очередь, представляется отдельной числовой осью веса p.

Правая часть в (6) – это гиперчисло. Оно записывается так:

$$10^{1\cdot\infty}-1=(-1)\cdot10^0+1\cdot10^{1\cdot\infty}=(-1)\big|_{Ax^0}+1\big|_{Ax^1}+0\big|_{Ax^2}+\ldots\ , \tag{8}$$

или, более компактно:

$$10^{1\cdot\infty}-1\ =\ [\ -1|1|0|\ldots\rangle\ , \tag{9}$$

где справа от равенства после открывающей квадратной скобки стоит число (–1), находящееся на оси Ax^0; число 1 находится на оси Ax^1; число 0 – на оси Ax^2 и т. д. Вертикальные черточки служат для отделения числовых осей друг от друга. Угловая скобка показывает направление роста порядков числовых осей. Нам для записи гиперчисла понадобились числовые оси, начиная с оси Ax^0. Наподобие того, как числа изображаются точками на числовой оси, гиперчисла также изображаются точками на гипероси, правда, для изображения гиперчисла требуется не одна точка, а набор точек, по точке на каждую ось. Гиперчисло (6) изображается так:

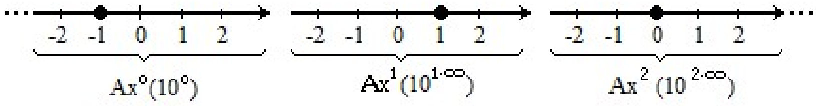

Рис. 2. Представление гиперчисла (6) на числовой гипероси

Замечание 1. Не следует путать числовую гиперось (рис. 1) с обобщенной разрядной сеткой, с гиперсеткой (2).

Замечание 2. По историческим причинам числа на числовых осях растут слева направо. На гиперсетках, наоборот, веса сеток и веса разрядов растут справа налево.

Гармонический ряд

Постановка задачи. Стандартно обозначим через H сумму гармонического ряда:

$$H = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots, \tag{10}$$

через H_n – частичную сумму гармонического ряда:

$$H_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}. \tag{11}$$

Тогда

$$H = \lim_{n\to\infty} H_n. \tag{12}$$

Сделаем рисунок.

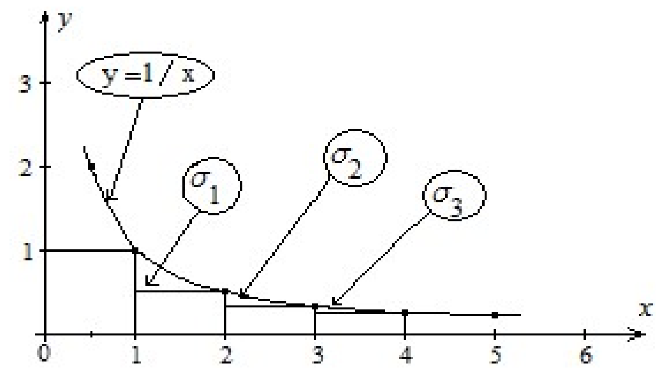

Рис. 3. Геометрическое истолкование суммы *H*

Сумма H равна сумме площадей прямоугольников, изображенных на рис. 3, продолженном до бесконечности. Величины σ_k – это площадки между гиперболой и соответствующими прямоугольниками. Частичная сумма H_n равна:

$$H_n = 1+\int_1^n \frac{dx}{x} - (\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_{n-1}) = 1+\ln n - \sum_{k=1}^{k=n-1}\sigma_k \overset{(\text{по Эйлеру})}{=} \ln n + C + \gamma_n, \tag{13}$$

где C – константа Эйлера, а $\gamma_n \to 0$ при $n\to\infty$. Отсюда $1-\sum_{k=1}^{k=n-1}\sigma_k = C+\gamma_n$, и (см. [1,2,3])

$$C = \lim_{n\to\infty}(1-\sum_{k=1}^{k=n-1}\sigma_k). \tag{14}$$

Из (13) следует:

$$H = \lim_{n\to\infty} H_n = \lim_{n\to\infty} \ln n + C. \tag{15}$$

Требуется найти $\lim\limits_{n\to\infty}\ln n$ и *C*.

Вычисление $\lim\limits_{n\to\infty}\ln n$

При вычислении используется материал из §1 и [5–6]. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\ln n=\lim_{r\to\infty}\ln\max\overleftarrow{0}n_{r-1}...n_1n_0=\lim_{r\to\infty}\ln\overleftarrow{0}\underbrace{9...99}_{r\ раз}=\lim_{r\to\infty}\ln(10^r-1)=\lim_{r\to\infty}\ln10^r(1-10^{-r})=$$
$$=\lim_{r\to\infty}\ln10^r+\lim_{r\to\infty}\ln(1-10^{-r})=\ln10\cdot\lim_{r\to\infty}r+\lim_{r\to\infty}\ln(1-10^{-r})=$$

Прервемся. Для дальнейшего преобразования используются две формулы: формула (5), в силу которой $\lim\limits_{r\to\infty}r=10^{\infty}-1$, и формула [3, с. 371]:

$$\ln(1+x)=x-\tfrac{1}{2}\cdot x^2+\tfrac{1}{3}\cdot x^3-\tfrac{1}{4}\cdot x^4+...\ ,\quad -1<x\le1. \tag{16}$$

Применяя эти формулы, продолжаем прерванное равенство.

$$=\ln10\cdot(10^{\infty}-1)+\lim_{r\to\infty}(-10^{-r}-\tfrac{1}{2}\cdot10^{-2r}-\tfrac{1}{3}\cdot10^{-3r}-\tfrac{1}{4}\cdot10^{-4r}-...)=$$
$$=\ln10\cdot(10^{\infty}-1)-10^{-\infty}-\tfrac{1}{2}\cdot10^{-2\infty}-\tfrac{1}{3}\cdot10^{-3\infty}-\tfrac{1}{4}\cdot10^{-4\infty}-...=$$

Прервемся для пояснения. Располагаем слагаемые по возрастанию весов и продолжаем.

$$=...-\tfrac{1}{4}\cdot10^{-4\infty}-\tfrac{1}{3}\cdot10^{-3\infty}-\tfrac{1}{2}\cdot10^{-2\infty}-10^{-\infty}-\ln10\cdot10^0+\ln10\cdot10^{\infty}+0\cdot10^{2\infty}+...=$$

Получилось гиперчисло, которое мы записываем в компактном виде.

$$=\ \rangle\ ...-\tfrac{1}{4}\mid-\tfrac{1}{3}\mid-\tfrac{1}{2}\mid-1\mid\underbrace{-\ln10}_{Ax^0}\mid\ln10\mid0\mid+...\ \rangle.$$

В компактной записи отсутствует явное указание на веса числовых осей. Вместо этого указано расположение ячейки для нашей числовой оси Ax^0, вес которой равен 10^0, а также указано с помощью угловых скобок, $\rangle$, направление роста весов числовых осей. Этого достаточно для ориентировки.

Итак,

$$\lim_{n\to\infty}\ln n\ =\ \rangle\ ...-\tfrac{1}{4}\mid-\tfrac{1}{3}\mid-\tfrac{1}{2}\mid-1\mid\underbrace{-\ln10}_{Ax^0}\mid\ln10\mid0\mid+...\ \rangle. \tag{17}$$

На шкале бесконечностей, представленных числовыми осями разных весов, в совокупности образующих гиперось, $\lim\limits_{n\to\infty}\ln n$ находит свое точное место, выраженное гиперчислом (17) и, как видно, является бесконечно большой величиной первого порядка.

Нахождение константы С. Из формулы (14), выражающей геометрический смысл константы С, получаем:

$$C=\lim_{n\to\infty}(1-\sum_{k=1}^{k=n-1}\sigma_k)=1-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k=n-1}\sigma_k. \tag{18}$$

Надо найти выражение σ_k, подходящее для дальнейшего исследования. Имеем:

$$\sigma_k=\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}-\frac{1}{k+1}=\ln\frac{k+1}{k}-\frac{1}{k+1}=\ln(1+\tfrac{1}{k})-\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{k}}=$$

Прервем вычисление и воспользуемся далее равенством:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+...,\quad -1<x<1\ , \tag{19}$$

в силу которого

$$\frac{1}{1+\frac{1}{k}}=1-\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^3}+\ldots,\quad (k=2,3,4,\ldots)\,, \tag{20}$$

причем при $k=1$ разложение (19) не работает. Случай $k=1$ рассматривается отдельно.

Предполагая $k=2,3,4,\ldots$, продолжаем прерванное равенство:

$$\begin{aligned}
&\ln(1+\frac{1}{k})-\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{k}}=\\
&=\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{k^3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{k^4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{k^5}-\ldots\\
&-\frac{1}{k}+\ 1\cdot\frac{1}{k^2}-\ 1\cdot\frac{1}{k^3}+\ 1\cdot\frac{1}{k^4}-\ 1\cdot\frac{1}{k^5}+\ldots=\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k^2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{k^3}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{k^4}-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{k^5}+\ldots\ ,\ (k=2,3,4,\ldots)\ .
\end{aligned} \tag{21}$$

Случай $k=1$ рассматривается отдельно:

$$\sigma_1=\int_1^2\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}=\ln 2-\frac{1}{2}. \tag{22}$$

Теперь можно вернуться к (18) и, используя (21) и (22), продолжить:

$$\begin{aligned}
&C=\lim_{n\to\infty}(1-\sum_{k=1}^{k=n-1}\sigma_k)=1-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k=n-1}\sigma_k=1-\sigma_1-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{k=n-1}\sigma_k=\\
&=1-\ln 2+\frac{1}{2}-\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k^2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{k^3}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{k^4}-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{k^5}+\ldots\right)=\\
&=1-\ln 2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-1)+\frac{2}{3}\cdot(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}-1)-\frac{3}{4}\cdot(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}-1)+\frac{4}{5}\cdot(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-1)-\ldots=\\
&=1-\ln 2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot(\varsigma(2)-1)+\frac{2}{3}\cdot(\varsigma(3)-1)-\frac{3}{4}\cdot(\varsigma(4)-1)+\frac{4}{5}\cdot(\varsigma(5)-1)-\ldots=\\
&=1-\ln 2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\varsigma(2)+\frac{2}{3}\cdot\varsigma(3)-\frac{3}{4}\cdot\varsigma(4)+\frac{4}{5}\cdot\varsigma(5)-\ldots+\\
&+(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\ldots)=
\end{aligned}$$

Здесь обратимся к формуле (18) из [3, с. 371], согласно которой:

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\ldots=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots=\ln 2-1\,.$$

Поэтому продолжаем прерванное равенство:

$$\begin{aligned}
&=1-\ln 2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\varsigma(2)+\frac{2}{3}\cdot\varsigma(3)-\frac{3}{4}\cdot\varsigma(4)+\frac{4}{5}\cdot\varsigma(5)-\ldots+\\
&+(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\ldots)=\\
&=1-\ln 2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\varsigma(2)+\frac{2}{3}\cdot\varsigma(3)-\frac{3}{4}\cdot\varsigma(4)+\frac{4}{5}\cdot\varsigma(5)-\ldots+\ln 2-1=
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\varsigma(2)+\frac{2}{3}\cdot\varsigma(3)-\frac{3}{4}\cdot\varsigma(4)+\frac{4}{5}\cdot\varsigma(5)-...=$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{k+1}\cdot\varsigma(k+1)=\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2k-1}{2k}\cdot\varsigma(2k)-\frac{2k}{2k+1}\cdot\varsigma(2k+1)\right],$$

где $\varsigma(x)$ – дзета-функция Римана.

Итак, константа Эйлера C может быть вычислена по любой из двух формул:

$$C=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{k+1}\cdot\varsigma(k+1)\ . \tag{23}$$

$$C=\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2k-1}{2k}\cdot\varsigma(2k)-\frac{2k}{2k+1}\cdot\varsigma(2k+1)\right]. \tag{24}$$

Итоговые результаты. Таким образом, сумма гармонического ряда есть бесконечность, представленная гиперчислом H, получающимся из равенств (15), (17), (23):

$$H=\lim_{n\to\infty}\ln n+C\ ,$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln n\ =\ \rangle\ ...-\frac{1}{4}\ \Big|\ -\frac{1}{3}\ \Big|\ -\frac{1}{2}\ |\ -1\ |\ \underbrace{-\ln 10}_{Ax^0}\ |\ \ln 10\ |\ 0\ |+...\ \rangle\ ,$$

$$C=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{k+1}\cdot\varsigma(k+1)\ .$$

Это гиперчисло имеет вид:

$$H\ =\ \rangle\ ...-\frac{1}{4}\ \Big|\ -\frac{1}{3}\ \Big|\ -\frac{1}{2}\ |\ -1\ |\ \underbrace{C-\ln 10}_{Ax^0}\ |\ \ln 10\ |\ 0\ |+...\ \rangle\ . \tag{25}$$

Тем самым найдено точное расположение суммы гармонического ряда на шкале бесконечностей, представленных числовыми осями разных весов p, $-\infty < p < +\infty$. Как видно из (25), сумма гармонического ряда является бесконечно большой величиной первого порядка.

Таблица 2

Вычисление константы C по формуле (23)

k	$\frac{k}{k+1}$	$\varsigma(k+1)$	$\frac{k}{k+1}\cdot\varsigma(k+1)$	$(-1)^k$
1	$\frac{1}{2}$	1,6449340668482264	0,8224670334241132	_
2	$\frac{2}{3}=0.666666666666$	1,2020569031595942	0,8013712687722614	+
3	$\frac{3}{4}=0.75$	1,0823232337111381	0,8117424252833535	_
4	$\frac{4}{5}=0.8$	1,0369277551433699	0,8295422041146959	+
5	$\frac{5}{6}=0.833333333333$	1,0173430619844491	0,8477858849867018	_
6	$\frac{6}{7}=0.857142857142$	1,0083492773819228	0,8642993806122123	+
7	$\frac{7}{8}=0.875$	1,0040773561979443	0,8785676866732012	_
8	$\frac{8}{9}=0.888888888888$	1,0020083928260822	0,8906741269556268	+

Окончание табл. 2

k	$\frac{k}{k+1}$	$\varsigma(k+1)$	$\frac{k}{k+1}\cdot\varsigma(k+1)$	$(-1)^k$
9	$\frac{9}{10}=0.9$	1,0009945751278180	0,9008951176150362	_
10	$\frac{10}{11}=0.909090909090$	1,0004941886041194	0,9095401714573808	+
11	$\frac{11}{12}=0.916666666666$	1,0002460865533080	0,9168922460065321	_
12	$\frac{12}{13}=0.923076923076$	1,0001227133475784	0,9231901969353030	+

Значения ς-функции Римана взяты из [1, с. 311]

Если ограничиться первыми 12 слагаемыми в формуле (23), то для константы C получается значение:

C_{12} = 0,5 402 669 548 584.

Эйлер подсчитал, используя первозданное определение: $C=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n)$, для величины С значение:

C = 0,5 772 1566 490 153 25.

Видно, что подсчет константы С по формуле (23) достаточно быстро приводит к цели. Правда, для такого подсчета нужна предварительно созданная таблица значений ς-функции Римана.

По проблеме, рассмотренной в статье, смотрите также [7–8].

Считаем приятным долгом выразить благодарность доктору технических наук, профессору А. И. Перегуде за интерес к работе.

Литература

1. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1949. 580 с.
2. Бухштаб А. А. Теория чисел. М. : Просвещение, 1966. 384 с.
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. СПб. : Лань, 2016. 810 с.
4. Деев Г. Е. Абстрактные вычислительные устройства: Эйлеровы вычисления. М. : Энергоатомиздат, 2007. 332 с. ил.
5. Деев Г. Е., Ермаков С.В. Ряд 1+1+1+…. // Вестник кибернетики. 2018. № 2. С. 7–15
6. Деев Г. Е. Вычисления с бесконечностями // Вестник кибернетики. 2017. № 1 С. 49–57
7. Харди Г. Х. Расходящиеся ряды. М. : Изд-во иностран. лит., 1951. 504 с.
8. Выгодский М. Я. Вступительное слово к «Дифференциальному исчислению» Л. Эйлера. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1949, С. 5–34.