Научная статья
УДК 519.87
https://doi.org/10.35266/1999-7604-2026-1-7

Модификация метода TOPSIS

Павел Константинович Симаков
Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия

Аннотация. В статье рассматривается проблема многокритериального выбора в условиях неопределенности, вызванной субъективным назначением весовых коэффициентов для критериев. Для решения этой проблемы предлагается подход, основанный на использовании интервальных оценок важности критериев вместо точечных значений. Этот подход повышает адекватность модели и устойчивость получаемых решений. Также предложена модификация метода TOPSIS, адаптированная для работы с интервально заданными весами на бесконечном множестве альтернатив. В рамках этого подхода вводится концепция мягкого TOPSIS-решения, устойчивого к вариациям весовых коэффициентов в заданных пределах. Практическая значимость и работоспособность методики проверена на примере оптимизации состава многокомпонентной смеси.

Ключевые слова: многокритериальная задача, принятие решений, неопределенность, интервальные веса, TOPSIS, мягкое решение

Для цитирования: Симаков П. К. Модификация метода TOPSIS // Вестник кибернетики. 2026. Т. 25, № 1. С. 70–83. https://doi.org/10.35266/1999-7604-2026-1-7.

Original article

TOPSIS method modification

Pavel K. Simakov
South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russia

Abstract. The article considers the problem of multi-criteria decision analysis under uncertainty conditions caused by subjective weights of the criteria. The paper addresses the specified issue as well as proposes an approach of interval criteria estimation instead of point assessment. This technique improves the model's sufficiency and solutions stability. The study presents a modification of the TOPSIS method, which lies in its adaptation for interval-defined weights on an infinite set of alternatives. Moreover, the approach introduces a soft TOPSIS concept that is resistant to changes in criteria weights within set limits. The author tests the method's practical significance and efficiency by optimizing a multicomponent mixture formula.

Keywords: multi-criteria decision analysis, decision-making, uncertainty, interval weights, TOPSIS, soft decision

For citation: Simakov P. K. TOPSIS method modification. *Proceedings in Cybernetics*. 2026;25(1):70–83. https://doi.org/10.35266/1999-7604-2026-1-7.

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование поведения сложных управляемых систем неразрывно связано с решением многокритериальных задач. Ключевой проблемой при этом является субъективный характер оценки относительной важности оптимизируемых критериев со стороны лица, принимающего решение (ЛПР). Зачастую даже незначительные вариации в определении весовых коэффициентов могут приводить к существенно различным оптимальным решениям. Несмотря на наличие широкого спектра методов решения многокритериальных задач, их практическое применение часто ограничено трудностью априорного точного задания весов критериев.

Указанную проблему можно смягчить, перейдя от точечных оценок весов к интервальным, что позволяет ЛПР выражать свои предпочтения в форме, требующей менее точной количественной информации. В настоящей работе предлагается подход, в котором ЛПР задает значимость критериев на основе неполной информации, формализуемой в виде интервальной неопределенности. В рамках данного подхода представлена модификация метода TOPSIS для работы с интервальными весами и непрерывным множеством альтернатив. Формализовано новое понятие решения многокритериальной задачи: мягкое TOPSIS-решение, сохраняющее устойчивость при незначительных изменениях весов. Практическая применимость предложенных концепций демонстрируется на примере задачи определения оптимальной рецептуры многокомпонентной смеси в условиях неполной информации о предпочтениях ЛПР.

Моделирование и анализ сложных управляемых систем неизбежно связаны с необходимостью выбора решений, оптимальных одновременно по нескольким критериям. Многокритериальные задачи принятия решений (MCDA) находят широкое применение в различных областях, включая исследование внедрения электромобилей [1], повышение надежности программного обеспечения [2], выбор терапии при сахарном диабете [3], формирование автопарка для междугородных перевозок [4] и анализ проблем, возникающих при внедрении Индустрии 4.0 [5].

Особую актуальность MCDA приобретают в сфере разработки и оптимизации рецептур в пищевой и химической промышленности, где необходимо одновременно учитывать множество зачастую конфликтующих требований: стоимость сырья, питательную ценность, органолептические свойства, технологические параметры и экологические аспекты. В исследовании по разработке рецептуры хлеба с цельнозерновой мукой [6] применялись методы анкетирования потребителей и регрессионного анализа для оптимизации соотношения компонентов по органолептическим и физико-химическим критериям. При оптимизации творожной массы для детского питания [7] использовалась комбинация линейного программирования и матричного метода проектирования для максимизации содержания витамина С при минимизации себестоимости.

Теоретической основой многокритериальной оптимизации служат концепции векторных оптимумов, среди которых оптимальность по Парето [8] нашла наиболее широкое применение в прикладных исследованиях. Однако ключевая практическая проблема использования Парето-оптимальности заключается в том, что полученное множество решений часто оказывается чрезмерно большим для практического выбора.

Для решения этой задачи разработан ряд конструктивных методов, включая метод взвешенной суммы, TOPSIS [9], COPRAS [10] и EDAS [11]. В частности, метод TOPSIS демонстрирует высокую эффективность при работе с конфликтующими критериями. Однако корректное применение этих методов требует от ЛПР точного априорного задания весов критериев, что сопряжено со значительными трудностями из-за субъективной природы понятия «важность критерия».

Использование интервальных весов предлагается в качестве перспективного подхода, упрощающего процесс оценки важности критериев для ЛПР. Данный подход позволяет формализовать неполную информацию о предпочтениях и снижает влияние погрешностей при назначении весов. Важно отметить, что даже незначительные вариации в определении весовых коэффициентов могут привести к существенному изменению итогового выбора альтернативы.

В контексте метода TOPSIS концепция интервальных весов исследовалась ранее, однако существующие подходы имеют ограничения. В работе [12] учитывались только экстремальные значения интервалов, что потенциально ведет к потере информации. В [13] предложена модель, где оценка альтернативы определяется как максимально достижимое значение средневзвешенного показателя. Предлагаемое в настоящем исследовании развитие метода TOPSIS для работы с интервальными весами направлено на преодоление указанных ограничений и повышение устойчивости решений к вариациям в оценках важности критериев.

В теории принятия решений традиционно рассматриваются два типа множеств альтернатив – дискретные и непрерывные. Если в первом случае альтернативы представляют собой конечное число четко определенных вариантов, то во втором мы имеем дело с бесконечным (континуальным) множеством альтернатив, описываемых непрерывными параметрами. Для бесконечных альтернатив множество Парето часто представляет собой непрерывную поверхность или гиперповерхность в пространстве критериев. Проблема выбора наилучшего решения в условиях противоречивых критериев является центральной, а для задач с бесконечным множеством альтернатив, где пространство возможных решений является непрерывным, прямое перечисление и сравнение всех вариантов оказывается невозможным. Это требует разработки специализированных математических методов для поиска и сужения множества Парето-оптимальных решений. В данной работе предлагается модификация метода TOPSIS для применения его с бесконечными альтернативами.

В контексте теории принятия решений альтернатива представляет собой один из возможных вариантов действия, доступных лицу, принимающему решение (ЛПР). Когда множество альтернатив является бесконечным, задача принятия решений трансформируется в задачу математической оптимизации, где решение описывается непрерывными параметрами. Такие задачи характерны для проектирования сложных технических систем, управления технологическими процессами и экономического моделирования.

Рассмотрим существующие методы скаляризации и проблемы корректности для бесконечных множеств. Линейная свертка критериев (взвешенная сумма критериев) – один из наиболее популярных методов сведения многокритериальной задачи к однокритериальной. Однако, как показано в ряде работ [14, 15], область осмысленного применения линейной свертки уже, чем принято считать. Метод является строго обоснованным только в двух случаях: когда отношение предпочтения ЛПР может быть точно представлено линейной функцией полезности или когда множество достижимых векторов является выпуклым. Для невыпуклых множеств метод линейной свертки не позволяет найти все эффективные решения, «пропуская» значительную их часть, что делает его неприменимым в общем случае.

Для преодоления ограничений линейной свертки применяются иные методы скаляризации. Минимум-Максимум функция – универсальна и работает для любых форм Парето-фронта, гарантирует нижнюю оценку для всех критериев. Штрафная функция – фокусируется на одном случайно выбранном критерии на шаге поиска, накладывая штрафы на отклонения других критериев от текущих значений,– также отличается универсальностью.

Также существуют прямые методы поиска в многокритериальном пространстве. Для непосредственного поиска в непрерывных пространствах широко применяются методы, не требующие вычисления производных. Метод Нелдера – Мида (метод деформируемого многогранника) представляет собой метод безусловной оптимизации, не использующий градиентов [16]. Его основная идея заключается в последовательном перемещении и деформировании симплекса вокруг точки экстремума. Это делает его полезным для работы с негладкими и зашумленными функциями. В многокритериальной оптимизации он часто используется для адаптивного поиска оптимальных весов в процедуре скаляризации. Адаптивный случайный поиск

(АСП) выступает альтернативой для сложных задач, где метод Нелдера – Мида может «застревать» в локальных минимумах [17]. АСП, комбинируясь со скалярными функциями агрегирования, позволяет эффективно аппроксимировать все множество Парето даже для негладких и мультимодальных функций.

Существуют комбинированные подходы, помогающие сузить множества Парето. Для преодоления ограничений простых методов скаляризации предлагаются комбинированные подходы. В работе [18] предлагается двухэтапный метод. На первом этапе используется аксиоматический подход, основанный на сборе «квантов информации» от ЛПР, что позволяет построить новый векторный критерий и существенно сузить исходное множество Парето. На втором этапе к уже суженному множеству применяется линейная или мультипликативная свертка для окончательного выбора. Такой подход минимизирует риск ошибки, присущий «слепому» применению сверток ко всему множеству, и делает решение более обоснованным для задач с бесконечными альтернативами.

Анализ последних исследований показывает, что задачи с бесконечными альтернативами в теории принятия решений требуют комплексного подхода. Прямые методы поиска, такие как АСП и Нелдер – Мид, позволяют эффективно аппроксимировать множество Парето в сложных непрерывных пространствах. Однако ключевой вызов заключается в корректном сужении этого множества и выборе итогового решения. Критический анализ линейной свертки демонстрирует ее ограниченную применимость, жестко зависящую от свойств множества Парето. Наиболее перспективными являются комбинированные подходы, которые на первом этапе используют аксиоматические методы для сужения множества на основе информации о предпочтениях ЛПР и лишь на втором применяют стандартные процедуры скаляризации. Перспективным направлением дальнейших исследований является разработка гибридных алгоритмов, сочетающих достоинства прямых методов оптимизации с возможностями современных метаэвристических методов и методов учета предпочтений ЛПР.

Рассмотрим m-критериальную задачу принятия решений. Пусть

$$X = \{x_1, x_2, .., x_m\} \tag{1}$$

является конечным множеством альтернатив, на котором определены m скалярных функций $f_1, f_2, ..f_m$, называемых критериями.

Задача ЛПР состоит в выборе альтернативы $A \in X$, при которой все m критериев f_j примут по возможности большие значения.

Стоит отметить, что достаточно часто, выбирая решение, ЛПР может стремиться уменьшить значение части критериев. Так, например, оптимизируя процесс производства, ЛПР может не только обеспечить максимальный объем выпускаемой продукции, но одновременно с этим минимизировать долю брака. Отметим, что, заменив в такой задаче минимизируемые целевые функции на противоположные, всегда можно получить равносильную задачу (1), в которой уже все функции нужно максимизировать.

Задачу можно отождествить с матрицей решений $F=[f_j(x_i)]_{n\times m}$, где элемент x_{ij} матрицы F совпадает со значением критерия f_j при выборе ЛПР альтернативы A_i. В такой задаче выбор ЛПР некоторой альтернативы означает выбор соответствующей строки матрицы F.

Под решениями задачи (1) обычно понимают [8] векторные максимумы. Одним из них является максимум по Парето.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Метод TOPSIS

Также рассмотрим метод TOPSIS [3]. Основная концепция этого метода заключается в том, что выбранная альтернатива должна иметь наименьшее расстояние от идеального решения и наибольшее расстояние от отрицательно идеального решения в некотором геометрическом смысле.

Метод TOPSIS предполагает, что каждый критерий имеет тенденцию к монотонно увеличивающаяся или уменьшающаяся полезность. Поэтому легко определить идеальные и отрицательно-идеальные решения.

Для оценки относительной близости альтернатив к идеальному решению был предложен подход с использованием евклидова расстояния. Таким образом, порядок предпочтения альтернатив может быть получен путем серии сравнений этих относительных расстояний.

Метод TOPSIS оценивает следующую матрицу решений, относящуюся к m альтернативам, которые оцениваются с точки зрения n критериев:

$$D = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix},$$

где x_{ij} обозначает показатель эффективности i-й альтернативы в терминах j-го критерия.

Далее представлены этапы метода TOPSIS.

Этап 1: Построение нормализованной матрицы решений.

Метод TOPSIS сначала преобразует различные измерения критериев в безразмерные критерии. Таким образом, элемент нормализованной матрицы решений r_{ij} вычисляется следующим образом:

$$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_{kj}^2}}.$$

Этап 2: Постройте Взвешенную нормализованную матрицу решений.

Набор весов $W=(w_1,w_2,w_3,\ldots,w_n)$, $\sum w_i=1$, определенный лицом, принимающим решения, используется с матрицей решений для генерации взвешенной нормализованной матрицы V следующим образом:

$$V = \begin{bmatrix} w_1 r_{11} & w_2 r_{12} & w_3 r_{13} & \cdots & w_n r_{1n} \\ w_1 r_{21} & w_2 r_{22} & w_3 r_{23} & \cdots & w_n r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_1 r_{m1} & w_2 r_{m2} & w_3 r_{m3} & \cdots & w_n r_{mn} \end{bmatrix}.$$

Умножается вес критериев на элементы критерия из нормализованной матрицы принятия решений.

Этап 3: Определите Идеальное и Отрицательно-Идеальное решения.

Идеал, как и отрицательный идеал, обозначаемый как A^- альтернативы (решения) определяются следующим образом:

$$A^+ = \{u^+_{ij1},\ldots, u^+_{ijn}\} = \{(\max_i u_{ij} \,|\, j \in J'),$$
$$(\min_i u_{ij} \,|\, j \in J),\ i=1,2,\ldots,m\} = \{u_{1+},u_{2+},\ldots,u_{n+}\},$$
$$\mathrm{A}^- = \{u^-_{ij1},\ldots, u^-_{ijn}\} = \{(\min_i u_{ij} \,|\, j \in J'),$$
$$(\max_i u_{ij} \,|\, j \in J),\ i=1,2,\ldots,m\} = \{u_1^-,u_2^-,\ldots,u_n^-\},$$

где:

$J = \{j = 1,2,3,\ldots, n\}$, и j связан с критериями выгоды.

$J' = \{j =1,2,3,\ldots, n\}$, и j связан с критериями затрат/потерь.

Из предыдущих определений следует, что альтернатива A^+ указывает на наиболее предпочтительную альтернативу или идеальное решение. Аналогично альтернатива A^- указывает на наименее предпочтительную альтернативу или отрицательно-идеальное решение.

Идеальное решение вычисляется следующим образом. Для положительных качеств берется максимальное значение во всем столбце критериев, для отрицательных – минимальное.

Отрицательно-Идеальное решение вычисляется похоже, только для положительных качеств берется минимальное значение во всем столбце критериев, для отрицательных – максимальное.

Этап 4: Рассчитайте меру разделения.

Затем применяется метод n-мерного евклидова расстояния для измерения расстояний, отделяющих каждую альтернативу от идеального решения и отрицательно-идеального решения. Таким образом, для расстояний от идеального решения получится следующее уравнение:

$$S_{i+} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (u_{ij} - u_{j+})^2}\ , \text{ для } i = 1,2,3,\ldots,m,$$

где S_{i+} – расстояние (в евклидовом смысле) каждой альтернативы от идеального решения.

Аналогично для расстояний от отрицательно-идеального решения мы имеем:

$$S_{i-} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(u_{ij} - u_{j-})^2} \text{ , для } i = 1,2,3,\ldots m,$$

где $S_{i\_}$ – расстояние (в евклидовом смысле) каждой альтернативы от решения с отрицательным идеалом.

Этап 5: Рассчитайте относительную близость к идеальному решению.

Относительная близость альтернативного A_i по отношению к идеальному решению A^+ определяется следующим образом:

$$C_{i*} = \frac{S_{i-}}{S_{i+} + S_{i-}}, \qquad (2)$$

где $1 \geq C_{i*} \geq 0$ и $i = 1,2,3, \ldots, m$.

Этап 6: Ранжируйте порядок предпочтений.

Наилучшая (оптимальная) альтернатива теперь может быть определена в соответствии с порядком ранжирования предпочтений C_{i*}. Поэтому лучшей альтернативой является та, которая имеет наименьшее расстояние до идеального решения. Предыдущее определение также может быть использовано для демонстрации того, что любая альтернатива, имеющая наименьшее расстояние от идеального решения, также гарантированно будет иметь наибольшее расстояние от отрицательно идеального решения.

Модификация методов

Будем теперь считать, что, планируя применить метод TOPSIS, ЛПР выбирает не точные значения весов, а некоторые промежутки, которым эти веса принадлежат.

Предполагается, что вес w_j может быть задан либо числом γ_j (фиксированный вес), либо интервалом, где $[\alpha_j, \beta_j]$ ($j = 1,\ldots,m$), $0 \leq \alpha_j \leq \beta_j$, то есть:

$$w_j \in \{\gamma_j | 0 \leq \alpha_j \leq \beta_j\}.$$

Другими словами, набор весов $w = (w_1, w_2,\ldots,w_m)$ представляет собой интервальную неопределенность [19]. Множество таких неопределенностей обозначим:

$$W = W_1 \times W_2 \times \ldots \times W_m \subset \mathbb{R}^m,$$

где $W_j = [\alpha_j; \beta_j]$ ($j = 1, \ldots,m$), для интервальных весов, а для фиксированных примет следующий вид: $W_j = \gamma_j$ ($j = 1,\ldots,m$).

Для корректной работы алгоритма необходимо, чтобы существовал хотя бы один вектор весов, удовлетворяющий этим условиям. Это выполняется, если сумма всех фиксированных весов и минимальных интервальных весов не превышает 1, а сумма фиксированных весов и максимальных интервальных весов не меньше 1:

$$\sum_{j\in J}\gamma_j + \sum_{j\in K}\alpha_j \leq 1 \leq \sum_{j\in J}\gamma_j + \sum_{j\in K}\beta_j,$$

где J – множество индексов фиксированных весов, K – множество индексов интервальных весов.

Поскольку веса в методе TOPSIS должны быть нормированы, их сумма равна единице. Множество всех допустимых векторов весов представляет собой пересечение m-мерного гиперпараллелепипеда $W=[\alpha_1,\beta_1]\times[\alpha_2,\beta_2]\times\ldots\times[\alpha_m, \beta_m]$ при наличии только интервальных весов и $W = [\alpha_1,\beta_1]\times \gamma_2\times\ldots\times[\alpha_m, \beta_m]$, если некоторые веса заданы фиксированно.

Меру множества W будем обозначать S_W, а именно:

$$S_W = W \cap T,$$

где $T = \{(w_1, \ldots, w_m) \mid w_j \geqslant 0, \sum_{j=1}^{m} w_j = 1\}$.

Будем предполагать, что S_w не пусто. Мера Лебега [20] не подойдет, потому что если некоторые веса заданы точно (фиксированные), например $w_1 = 0{,}4$, то множество допустимых весов имеет меньшую размерность, чем все пространство весов.

В качестве меры будем использовать нормированную меру Лебега, полагая, что она должна быть равна единице. В случае когда множество S_W состоит из конечного числа точек, например когда некоторые веса заданы точно, в качестве меры множества S_W используется считающая мера, также отнормированная к единице.

Далее для каждой альтернативы A_i ($i = 1,\ldots, n$) обозначим через $W(A_i)$ множество всех векторов весов $w \in W$, для которых A_i имеет максимальный оценочный балл C_{i*} (вычисленный по формуле (2)) среди всех альтернатив. Ниже $S_W(A_i)$ означает нормированную меру множества $W(A_i)$, а вероятностная мера на множестве допустимых векторов весов имеет вид:

$$\mu(A_i) = \frac{S_W(A_i)}{S_W}. \qquad (3)$$

Очевидно, что поскольку множество альтернатив конечно, то хотя бы для одной альтернативы A_i ее мера $S_W(A_i)$, а следовательно, и величина $\mu(A_i)$ будут отличны от нуля.

Определение 1. Мягким TOPSIS-решением многокритериальной задачи принятия решений с интервальными весами будем называть множество

$$\tilde{A}^{TOPSIS} = \left\{ \frac{\mu(A_i)}{A_i} \middle| \forall A_i (i = 1,\ldots,n) : \mu(A_i) > 0 \right\},$$

где $\mu(A_i)$ является функцией принадлежности альтернативы A_i и определяется в (3).

Смысл определения 1 в том, что в мягкое TOPSIS-решение входят все те альтернативы, которые являются TOPSIS-решениями. Также оно показывает, для какой доли (вероятности в рамках равномерной модели) всех допустимых векторов весов альтернатива оказывается наилучшей. При этом альтернативы, являющиеся TOPSIS-решениями на множестве меры ноль, в мягкого TOPSIS-решение не попадают. Это гарантирует исключение «неустойчивых» альтернатив из решения.

Для построения мягкого TOPSIS-решения будем придерживаться следующего алгоритма.

1) Выполняем шаги 1–6 алгоритма TOPSIS.

2) Для каждого набора весов $w \in W$ определяем альтернативу A_i, имеющую максимальный оценочный балл C_{i*} (вычисленный по формуле (2)) среди всех альтернатив.

3) Вычисляем S_W и $S_W(A_i)$ (i=1,…,n).

4) Используя формулу (3), строим решение $\tilde{A}^{TOPSIS}$.

При прохождении пунктов 2) и 3) приходится использовать численные методы. Здесь при построении численных алгоритмов можно использовать как постоянную сетку (при небольшом количестве критериев), так и метод Монте-Карло. Затем в качестве приближенного значения функции принадлежности (3) можно для каждой альтернативы A_i взять отношение количества узлов, в которых A_i была лучшей по значению AS альтернативы, к общему числу узлов, в которых проводились вычисления.

Модификация метода TOPSIS для работы с непрерывными альтернативами

Для решения задачи (1) сформулируем непрерывный аналог метода TOPSIS. Изменение в алгоритме метода TOPSIS можно описать следующими шагами.

Шаг 1. На первом этапе определяются критерии и альтернативы задачи принятия решения.

Шаг 2. Затем строится N-вектор-функция

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_N(x)),$$

где x – альтернатива $x \in X\, x = (x_1,\ldots,x_n)$, $x \in \mathbb{R}^n$, j – критерий (функция $f_j(x)$) $X = (f_1(x),\ldots,f_m(x))$ $x_{i_j} = f_j(x)$).

В дискретном случае i – альтернатива $i = \overline{1, n}$ (строка), j – критерий (столбец) $j = \overline{1, m}$. В дискретном случае в матрице x_{ij} указывает значение эффективности i-й альтернативы на основе j-го критерия.

Шаг 3. Построение нормализованного решения.

Метод TOPSIS сначала преобразует различные измерения критериев в безразмерные критерии. Таким образом, элемент r_j вычисляется следующим образом:

$$r_j = \frac{f_j(x)}{\sqrt{\int\limits_x f_j(x)^2 \, dx}}.$$

Шаг 4. Построение взвешенного нормализованного решения.

Набор весов $W = (w_1, w_2, w_3,\ldots, w_n)$, где $\sum w_i = 1$, определенный лицом, принимающим решения, для расчета взвешенного нормализованного решения следующим образом:

$$r_j(x) = w_j r_j.$$

Шаг 5: Нахождение Идеального и Отрицательно-Идеального решения.

Идеал, обозначаемый как A_j^+, и Отрицательный идеал, обозначаемый как A_j^-, альтернативы (решения) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_j^+ &= \{ f^+_j(x)_1, \ldots, f^+_j(x)_n = \\ &= \{(\max_j f_j(x) \mid j \in J')\} = \\ &= \{ r_{1+}(x), r_{2+}(x).,,,. r_{n+}(x)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_j^- &= \{ f^-_j(x)_1, \ldots, f^-_j(x)_n = \\ &= \{(\min_j f_j(x) \mid j \in J')\} = \\ &= \{ r_{1-}(x), r_{2-}(x).,,,. r_{n-}(x)\}, \end{aligned}$$

где:

$J = \{j = 1, 2, 3, \ldots, n\}$, и j связан с критериями выгоды.

$J' = \{j = 1, 2, 3, \ldots, n\}$, и j связан с критериями затрат/потерь.

В зависимости от критерия нужно брать минимум или максимум по функциям (столбцу). Если критерий отрицательный, то A_j^+ будет минимумом функции, а A_j^- – максимумом функции. Если критерий положительный, то A_j^+ будет максимумом функции, а A_j^- – минимумом функции.

Из предыдущих определений следует, что альтернатива A_j^+указывает на наиболее предпочтительную альтернативу, или Идеальное решение. Аналогично, альтернатива A_j^- указывает на наименее предпочтительную альтернативу, или Отрицательно-Идеальное решение.

Шаг 6: Расчет меры разделения.

Затем применяется метод n-мерного евклидова расстояния для измерения расстояний, отделяющих каждую альтернативу от Идеального решения и Отрицательно-Идеального решения. Таким образом, для расстояний от Идеального решения получится следующее уравнение:

$$S_+(x) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (r_j(x) - A_j^+)^2},$$

где S_+ – расстояние (в евклидовом смысле) каждой альтернативы от Идеального решения.

Аналогично, для расстояний от Отрицательно-Идеального решения мы имеем:

$$S_-(x) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (r_j(x) - A_j^-)^2},$$

где S_- – расстояние (в евклидовом смысле) каждой альтернативы от Отрицательно-Идеального решения.

Шаг 7: Расчет относительной близости к Идеальному решению.

$$C_*(x) = \frac{S_-(x)}{S_+(x) + S_-(x)},$$

где $x^* = \arg\max C_*(x)$.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Задача составления оптимальной рецептуры

В свете растущей актуальности рационального питания для здоровья населения и преодоления глобальных вызовов исследования природных ресурсов как основы оптимизации диет приобретают ключевое значение.

Рассматривается рецепт из пяти видов ягод (земляника садовая, крыжовник розовый, малина, смородина красная, жимолость), характеризующийся содержанием четырех минералов (кальций, калий, магний, фосфор) и показателем нерастворимых пищевых волокон (на 100 г). Требуется определить пропорции ягод, минимизирующие содержание волокон при одновременной максимизации концентраций Ca, K, Mg и P, с соблюдением двух ограничений:

1. Соотношение ($Ca^{+2} : Mg^{+2} = 2 : 1$).
2. Соотношение ($Ca^{+2} : P^{+3} = 1 : 1$).

Для полученной оптимальной смеси необходимо указать количественное содержание остальных минеральных элементов.

Биохимические показатели ягод приведены в табл. 1, а минеральные составы ягод, рассматриваемые в этой задаче, в табл. 2.

Поскольку по условиям задачи требуется минимизировать первую, шестую и седьмую функции, а максимизировать – вторую, третью, четвертую и пятую, то при определении состава смеси следует учесть эти требования. ЛПР оценил важность критериев следующими интервальными весами:

$$w_1 = [0.04, 0.61],\ w_2 = [0.04, 0.61],$$
$$w_3 = [0.15, 0.88],\ w_4 = [0.04, 0.61],$$
$$w_5 = [0.04, 0.61],\ w_6 = [0.05, 0.88],$$

$$w_7 = [0.05, 0.88]. \qquad (4)$$

В виде уравнений поставленная задача имеет следующий вид:

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

f_1 – нерастворимые пищевые волокна → min,
f_2 – кальций Ca → max,
f_3 – калий K → max,
f_4 – магний Mg → max,
f_5 – фосфор P → max,
$f_6 = (Ca - 2 \cdot Mg)^2$ → min,
$f_7 = (Ca - P)^2$ → min.

Распишем функции:

$$f_1 = 2{,}1x_1 + 2{,}3x_2 + 4{,}9x_3 + 3x_4 + + 2{,}1(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4).$$

$$f_2 = 486{,}1x_1 + 211{,}2x_2 + 167x_3 + +136{,}3x_4 + 89{,}3(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4).$$

$$f_3 = 2143{,}3x_1 + 1258{,}4x_2 + 813{,}1x_3 + 967{,}2x_4) + + 1140{,}1(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4).$$

$$f_4 = 120{,}3x_1 + 76{,}1x_2 + 132{,}3x_3 + 98{,}54x_4 + + 39{,}41(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4).$$

$$f_5 = 264{,}2x_1 + 416x_2 + 415{,}3x_3 + 347{,}1x_4 + + 212(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4).$$

$$f_6 = (245{,}5x_1 + 59x_2 - 97{,}6x_3 - 60{,}78x_4 + +10{,}48(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4))^2.$$

$$f_7 = (221{,}9x_1 - 204{,}8x_2 - 248{,}3x_3 - - 210{,}8x_4 - 122{,}71(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4))^2.$$

f_6 и f_7 задаются в виде квадрата невязок: для $Ca^{+2} : Mg^{+2} = 2:1$

$$f_6(x) = q_1(x) = f_2(x_1) - 2f_4(x_1),$$

для

$$f_7(x) = q_2(x) = f_2(x_1) - 2f_5(x_1).$$

Ограничения следующие:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 1.$$

Продукты, входящие в состав:

$$x_1, \ldots, x_n,$$

которые образуют $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ – вектор столбец.

Также существует условие того, что рецептура находится на стандартном симплексе:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \end{cases} \qquad (5)$$

при $(i = \overline{1, n})$. Будем называть вектор $\tilde{x}$ рецептом, если выполнено условие (5).

Минералы и полезные вещества, которые содержатся в продуктах, запишем в виде матрицы:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где A_i – i-я строка матрицы A. Точнее говоря, $A_i = (a_{11}, \ldots, a_{1n})$, а a_{ij} – количество элемента i в продукте j при $(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$.

Требуется найти рецепт $\tilde{x}$, при котором будут получаться максимальные или минимальные количества некоторых веществ. Множество номеров таких веществ обозначим $I_{\max}$ и $I_{\min}$ соответственно. Иными словами:

$$f_i(x) = \sum_j a_{ij} x_j \to \max \quad (i \in I_{\max}), \qquad (6)$$

$$f_i(x) = \sum_j a_{ij} x_j \to \min \quad (i \in I_{\min}). \qquad (7)$$

При этом требуется по возможности выдерживать соотношения q между веществами типа:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = k_p \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (8)$$

при ($p = 1, \ldots, q$). И соотношение коэффициент пропорциональности k_p равняется:

$$k_p = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}.$$

Система (5)–(8), как правило, несовместна. Поэтому будем стараться по возможности выдерживать соотношения (6)–(7). Для этого введем следующие функции:

$$q_p(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - k_p \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)^2$$

при $(p = \overline{1, q})$.

Эти функции характеризуют «невязки» между элементами и получившимися соотношениями.

Невязки нужны, чтобы контролировать пропорции веществ в смеси. Они позволяют количественно оценить, насколько фактическое соотношение компонентов отличается от запланированного.

Если невязка равна 0, соотношение соблюдено идеально. Положительная невязка означает избыток одного компонента. Отрицательная невязка означает недостаток одного компонента, что эквивалентно избытку другого.

Квадрат невязки $q_p(x)$ – это просто невязка, возведенная в квадрат. Она нужна, чтобы функцию представить в виде квадратичной функции, которая гладкая и легко дифференцируема, что критически важно для методов оптимизации.

Будем подбирать рецептуру так, чтобы, с одной стороны, были выполнены требования (6)–(7), с другой стороны – требования:

$$q_p(x) \to \min. \tag{9}$$

И при этом должны выполняться ограничения (5). Задачу (5), (6)–(7), (9) назовем задачей составления рецептуры с учетом квадратов невязок. Эта задача представляет собой многокритериальную задачу принятия решений на стандартном симплексе.

В используемой далее вычислительной процедуре при нахождении (3) величина S_w использоваться не будет. Вместо этого для вычисления значений функции принадлежности $\mu(A_i)$ используем вместо сетки с постоянным шагом метод Монте-Карло. При каждом наборе весов в узлах сетки получаем решение задачи A_i из множества решений, при этом обновляем множество $W(A_i)$, добавляя в него рассматриваемый узел сетки. Затем для каждого решения A_i будем считать

$$\mu(A_i) = \frac{K(A_i)}{K},$$

где K (A_i) – количество элементов в множестве, $W(A_i)$ а K – общее число узлов сетки.

Рассмотрим решение задачи на первой итерации используя модифицированный метод TOPSIS для непрерывного случая. Веса для рассматриваемого примера возьмем равным одному. На шаге 3 интеграл для первой функции нормализованного решения примет следующий вид:

$$\int_x f_1(x)^2\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \int_0^{1-x_1-x_2-x_3}$$

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, 1-x_1-x_2-x_3-x_4)^2\, dx_4 dx_3 dx_2 dx_1 =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \int_0^{1-x_1-x_2-x_3}$$

$$(2,1x_1 + 2,3x_2 + 4,9x_3 + 3x_4 +$$

$$+ 2,1(1-x_1-x_2-x_3-x_4))^2\, dx_3 dx_2 dx_1.$$

А само нормализованное решение для первой функции получится следующим:

$$r_1 = \frac{f_1(x)}{\sqrt{\int_x f_1(x)^2\, dx}} =$$

$$= 0,5774x_2 + 8,0829x_2 + 2,5981x_2 + 6,0622.$$

На шаге 4 взвешенное нормализованное решение для первой функции получится следующим:

$$r_1(x) = 1 \cdot 0,5774x_2 + 8,0829x_3 + 2,5981x_4 +$$
$$+ 6,0622.$$

На шаге 5 находим Идеальное и Отрицательно-Идеальное решения для первой функции. Чтобы это сделать, нужно найти максимум и минимум для каждой рассматриваемой функции в задаче. Для этого будем использовать методы роя частей [21] и субградиентный метод MA(αk) [22].

Решение, получившееся методом роя частиц, для первой функции:

$$\max_1 f_1(x) = 14,145081595145829,$$

$$\min_1 f_1(x) = 6,06217782649107.$$

Решение, получившееся субградиентным методом MA(αk), для первой функции:

$$\max_1 f_1(x) = 14,145081595145829,$$

$$\min_1 f_1(x) = 6{,}06217782649107.$$

Далее в зависимости от критерия нужно для A^+_j и A^-_j присвоить получившиеся экстремумы функций.

На шаге 6 мера разделения примет вид:

$$S_+(x) = 4649{,}6385\sqrt{\begin{array}{l}0{,}8841((x_1 - 0{,}2383x_2 - 0.3645x_3 - 0{,}2557x_4 - \\ \qquad - 0{,}3561)^2 - 3{,}3132\cdot10^{-10})^2 + ...\end{array}},$$

$$S_-(x) = 5073{,}5569\sqrt{\begin{array}{l}0{,}7425((x_1 - 0{,}2383x_2 - 0{,}3645x_3 - 0{,}2557x_4 - \\ -0{,}3561)^2 - 0{,}5192)^2 + ...\end{array}}.$$

На шаге 7 расчет относительной близости к Идеальному решению получается следующий:

$$C_*(x) = \frac{4649{,}6385\sqrt{0{,}8841((x_1 - 0{,}2383x_2 - 0.3645x_3 - ...}}{5073{,}5569\sqrt{0{,}7425((x_1 - 0{,}2383x_2 - 0{,}3645x_3 - ...}}.$$

$$x^* = \arg\max C_*(x).$$

Для поиска x^* нужно найти максимум функции $C^*(x)$. Для этого будем использовать методы роя частей и субградиентный метод MA(αk). Для нахождения x_5 в рассматриваемых методах нужно из суммы получившихся найденных точек экстремума вычесть единицу.

Решение, получившееся методом роя частиц:

Максимальное значение функции:

$x^* = 0{,}959467889429241$.

Найденный максимум в точках:

$$[0{,}39928254,\ 0,\ 0{,}60071746,\ 0,\ 0].$$

Решение, получившееся субградиентным методом MA(αk):

Максимальное значение функции:

$x^* = 0{,}959085743483797$.

Найденный максимум в точках:

$$[0{,}39612851,\ 0,\ 0{,}55272025,\ 0,\ 0{,}05115125,\ 0].$$

Теперь возьмем для нашего примера веса (4). В рассмотренном примере общее число точек, в которых проводились вычисления, составило 100. Для поиска экстремума функции использовали метод роя частиц. В результате вычисления было получено нечеткое TOPSIS-решение

$$\tilde{A}^{TOPSIS} = \left\{\frac{0{,}22}{x_1}, \frac{0}{x_2}, \frac{0{,}71}{x_3}, \frac{0{,}07}{x_4}, \frac{0}{x_5}\right\}.$$

Посчитаем получившиеся функции:

$$f_1 = 2{,}1\cdot0{,}22 + 2{,}3\cdot0 + 4{,}9\cdot0{,}7 + 3\cdot0{,}07 + 2{,}1\cdot0,$$
$$f_2 = 486{,}1\cdot0{,}22 + 211{,}2\cdot0 + 167\cdot0{,}71 + $$
$$+ 136{,}3\cdot0{,}07 + 89{,}3\cdot0,$$
$$f_3 = 2143{,}3\cdot0{,}22 + 1258{,}4\cdot0 + 813{,}1\cdot0{,}71 + $$
$$+ 967{,}2\cdot0{,}07 + 1140{,}1\cdot0,$$
$$f_4 = 120{,}3\cdot0{,}22 + 76{,}1\cdot0 + 132{,}3\cdot0{,}71 + $$
$$+ 98{,}54\cdot0{,}07 + 39{,}41\cdot0,$$
$$f_5 = 264{,}2\cdot0{,}22 + 416\cdot0 + 415{,}3\cdot0{,}71 + $$
$$+ 347{,}1\cdot0{,}07 + 212\cdot0,$$
$$f_1 = 4{,}10, f_2 = 235{,}05, f_3 = 1116{,}53,$$
$$f_4 = 127{,}30, f_5 = 377{,}29$$

и получившиеся соотношения:

$$q_1 = f_2 / f_4,\ q_2 = f_2 / f_5,$$

$$q_1 = 1{,}846426,\ q_2 = 0{,}622996.$$

Также приведем решение, получившееся, когда для поиска экстремума функции используется субградиентный метод MA(αk) вместо роя частиц.

В результате вычисления было получено сильное TOPSIS-решение:

$$A^{\text{TOPsIs}*} = x_1 = 1.$$

Посчитаем получившиеся функции:

$$f_1 = 2{,}1\cdot1 + 2{,}3\cdot0 + 4{,}9\cdot0 + 3\cdot0 + 2{,}1\cdot0,$$
$$f_2 = 486{,}1\cdot1 + 211{,}2\cdot0 + 167\cdot0 + 136{,}3\cdot0 + 89{,}3\cdot0,$$
$$f_3 = 2143{,}3\cdot1 + 1258{,}4\cdot0 + 813{,}1\cdot0 + $$
$$+ 967{,}2\cdot0 + 1140{,}1\cdot0,$$
$$f_4 = 120{,}3\cdot1 + 76{,}1\cdot0 + 132{,}3\cdot0 + 98{,}54\cdot0 + 39{,}41\cdot0,$$
$$f_5 = 264{,}2\cdot1 + 416\cdot0 + 415{,}3\cdot0 + 347{,}1\cdot0 + 212\cdot0,$$
$$f_1 = 2{,}1, f_2 = 486{,}1, f_3 = 2143{,}3,$$
$$f_4 = 120{,}3, f_5 = 264{,}2$$

и получившиеся соотношения:

$$q_1 = f_2 / f_4,\ q_2 = f_2 / f_5,$$
$$q_1 = 0{,}017456,\ q_2 = 0{,}007949.$$

Чтобы посмотреть в получившейся смеси количество остальных минеральных элементов, нужно провести минеральный анализ получившейся оптимальной смеси.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленном исследовании предложена модификация метода TOPSIS для решения многокритериальных задач принятия решений в условиях неопределенности, когда веса критериев задаются в виде интервалов, а множество альтернатив является бесконечным (непрерывным). Введено новое понятие мягкого TOPSIS-решения, устойчивого к вариациям весовых коэффициентов в заданных пределах.

К числу основных преимуществ предложенного подхода относятся:

– Учет неопределенности предпочтений ЛПР – переход от точечных оценок весов к интервальным – позволяет ЛПР выражать свои предпочтения в менее строгой и более адекватной форме, что соответствует реальной практике принятия решений, когда точные количественные оценки важности критериев затруднительны. Этот подход может быть использован и в других конструктивных методах [23, 24], применяемых для выбора оптимальных альтернатив.

– Расширение области применения – адаптация метода TOPSIS для работы с непрерывными множествами альтернатив существенно расширяет класс решаемых задач, открывая возможности для применения в таких областях, как оптимизация рецептур, технологических процессов, проектирование сложных систем и параметрическая оптимизация.

– Практическая значимость: разработанный подход успешно апробирован на задаче оптимизации рецептуры многокомпонентной смеси, что демонстрирует его работоспособность и практическую применимость для решения реальных инженерных и производственных задач.

Однако предложенный метод имеет и определенные ограничения:

– Высокая вычислительная сложность. Необходимость многократного решения задач оптимизации для каждого набора весов из интервала в рамках процедуры Монте-Карло существенно увеличивает вычислительные затраты, особенно для задач высокой размерности.

– Зависимость от методов оптимизации. Точность и эффективность метода сильно зависят от используемых алгоритмов оптимизации (метод роя частиц, субградиентные методы), которые могут «застревать» в локальных экстремумах для сложных невыпуклых функций, что требует тщательного подбора и настройки алгоритмов.

– Сложность аналитического анализа. Для сложных критериев и ограничений аналитическое исследование свойств мягкого решения может быть затруднительно, что повышает зависимость от численных экспериментов.

Перспективными направлениями дальнейших исследований являются разработка более эффективных вычислительных алгоритмов, снижающих нагрузку за счет адаптивных стратегий и метаэвристики; адаптация метода для других классов многокритериальных задач, включая задачи с нечеткими интервалами; а также исследование возможностей комбинирования предложенного подхода с другими методами принятия решений в условиях неопределенности для построения гибридных моделей.

Список источников

1. Pradhan P., Shabbiruddin, Pradhan S. Selection of electric vehicle using integrated Fuzzy-MCDM approach with analysis on challenges faced in hilly terrain // Energy Sources, Part A: Recovery, Utilization, and Environmental Effects. 2022. Vol. 44, no. 2. P. 2651–2673. https://doi.org/10.1080/15567036.2022.2056665.
2. Mehta P., Tandon A., Sharma H. Integration of FAHP and COPRAS-G for software component selection // Optimization Models in Software Reliability / Aggarwal A. G., Tandon A., Pham H., eds. Cham : Springer, 2022. P. 263–282. https://doi.org/10.1007/978-3-030-78919-0_12.

References

1. Pradhan P., Shabbiruddin, Pradhan S. Selection of electric vehicle using integrated Fuzzy-MCDM approach with analysis on challenges faced in hilly terrain. *Energy Sources, Part A: Recovery, Utilization, and Environmental Effects.* 2022;44(2):2651–2673. https://doi.org/10.1080/15567036.2022.2056665.
2. Mehta P., Tandon A., Sharma H. Integration of FAHP and COPRAS-G for software component selection. In: Aggarwal A. G., Tandon A., Pham H., eds. Optimization Models in Software Reliability. Cham: Springer; 2022. p. 263–282. https://doi.org/10.1007/978-3-030-78919-0_12.
3. Rani P., Mishra A. R., Mardani A. An extended Pythagorean fuzzy complex proportional assessment ap-

3. Rani P., Mishra A. R., Mardani A. An extended Pythagorean fuzzy complex proportional assessment approach with new entropy and score function: Application in pharmacological therapy selection for type 2 diabetes // Applied Soft Computing. 2020. Vol. 94. https://doi.org/10.1016/j.asoc.2020.106441.
4. Ozdagoglu A., Oztas G. Z., Keles M. K. et al. A comparative bus selection for intercity transportation with an integrated PIPRECIA & COPRAS-G // Case Studies on Transport Policy. 2022. Vol. 10, no. 2. P. 993–1004. https://doi.org/10.1016/j.cstp.2022.03.012.
5. Kaya S. K., Aycin E. An integrated interval type 2 fuzzy AHP and COPRAS-G methodologies for supplier selection in the era of Industry 4.0 // Neural Computing and Applications. 2021. Vol. 33. P. 10515–10535. https://doi.org/10.1007/s00521-021-05809-x.
6. Буховец В. А., Картавенко О. В., Тюрин П. О. и др. Оптимизация рецептуры методом регрессионного анализа // Новые технологии / New technologies. 2024. Т. 20, № 4. С. 11–21. https://doi.org/10.47370/2072-0920-2024-20-4-11-21.
7. Имангалиева Ж. К., Ибрагимов Н. К., Кожахиева М. О. и др. Оптимизация витаминного состава в творожных продуктах // Механика и технологии. 2024. № 3 (85). С. 40–46. https://doi.org/10.55956/YUXY9855.
8. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М. : Наука, 1982. 256 с.
9. Pavic Z., Novoselac V. Notes on TOPSIS Method // International Journal of Research in Engineering and Science. 2013. Vol. 1, no. 2. P. 5–12.
10. Alinezhad A., Khalili J. COPRAS method // New methods and applications in multiple attribute decision making (MADM) / Price C. C., ed. Cham : Springer, 2019. Vol. 277. P. 87–91. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15009-9_12.
11. Keshavarz Ghorabaee M., Amiri M., Zavadskas E. K. et al. Stochastic EDAS method for multi-criteria decision-making with normally distributed data // Journal of Intelligent & Fuzzy Systems. 2017. Vol. 33, no. 3. P. 1627–1638. https://doi.org/10.3233/jifs-17184.
12. Morais D. C., de Almeida A. T., Figueira J. R. A sorting model for group decision making: A case study of water losses in Brazil // Group Decision and Negotiation. 2014. Vol. 23, no. 5. P. 937–960. https://doi.org/10.1007/s10726-012-9321-7.
13. Llamazares B. Using interval weights in MADM problems // Computers & Industrial Engineering. 2019. Vol. 136. P. 345–354. https://doi.org/10.1016/j.cie.2019.07.035.
14. Ногин В. Д. Линейная свертка критериев в многокритериальной оптимизации // Искусственный интеллект и принятие решений. 2014. № 4. Р. 73–82.
15. Кравцов М. К. Применение алгоритма линейной свертки критериев для нахождения эффективных решений в векторной задаче дискретной оптимиproach with new entropy and score function: Application in pharmacological therapy selection for type 2 diabetes. *Applied Soft Computing.* 2020;94. https://doi.org/10.1016/j.asoc.2020.106441.
4. Ozdagoglu A., Oztas G. Z., Keles M. K. et al. A comparative bus selection for intercity transportation with an integrated PIPRECIA & COPRAS-G. *Case Studies on Transport Policy*. 2022;10(2):993–1004. https://doi.org/10.1016/j.cstp.2022.03.012.
5. Kaya S. K., Aycin E. An integrated interval type 2 fuzzy AHP and COPRAS-G methodologies for supplier selection in the era of Industry 4.0. *Neural Computing and Applications*. 2021;33:10515–10535. https://doi.org/10.1007/s00521-021-05809-x.
6. Bukhovets V. A., Kartavenko O. V., Tyurin P. O. et al. Recipe optimization using regression analysis method. *New technologies.* 2024;20(4):11–21. https://doi.org/10.47370/2072-0920-2024-20-4-11-21. (In Russ.).
7. Imangalieva Zh. K., Ibragimov N. K., Kozhakhiyeva M. O. et al. Optimization of vitamin composition in curd products. *Mechanics & Technologies.* 2024;(3):40–46. https://doi.org/10.55956/YUXY9855. (In Russ.).
8. Podinovskiy V. V., Nogin V. D. Pareto-optimalnye resheniya mnogokriterialnykh zadach. Moscow: Nauka; 1982. 256 p. (In Russ.).
9. Pavić Z., Novoselac V. Notes on TOPSIS Method. *International Journal of Research in Engineering and Science*. 2013;1(2):5–12.
10. Alinezhad A., Khalili J. COPRAS method. In: Price C. C., ed. New methods and applications in multiple attribute decision making (MADM). Cham: Springer; 2019. Vol. 277. p. 87–91. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15009-9_12.
11. Keshavarz Ghorabaee M., Amiri M., Zavadskas E. K. et al. Stochastic EDAS method for multi-criteria decision-making with normally distributed data. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*. 2017;33(3):1627–1638. https://doi.org/10.3233/jifs-17184.
12. Morais D. C., de Almeida A. T., Figueira J. R. A sorting model for group decision making: A case study of water losses in Brazil. *Group Decision and Negotiation*. 2014;23(5):937–960. https://doi.org/10.1007/s10726-012-9321-7.
13. Llamazares B. Using interval weights in MADM problems. *Computers & Industrial Engineering*. 2019;136:345–354. https://doi.org/10.1016/j.cie.2019.07.035.
14. Nogin V. D. Linear scalarization in multi-criterion optimization. *Scientific and Technical Information Processing*. 2014;(4):73–82. (In Russ.).
15. Kravtsov M. K. Application of linear convolution criteria algorithm for finding effective solutions in vector problem of discrete optimization. *Ekonomika, modelirovanie, prognozirovanie*. 2021;(15):123–138. (In Russ.).
16. Chernorutskiy I. G. Metody prinyatiya resheniy. St. Petersburg: Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University; 2012. p. 132–135. (In Russ.).

зации // Экономика, моделирование, прогнозирование. 2021. № 15. С. 123–138.
16. Черноруцкий И. Г. Методы принятия решений. СПб. : Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 2012. С. 132–135.
17. Абакаров А. Ш., Сушков Ю. А. О численном подходе к получению Парето-оптимальных альтернатив // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2008. № 5.
18. Ногин В. Д. Комбинированный подход к сужению множества Парето с использованием линейной и мультипликативной сверток критериев // Искусственный интеллект и принятие решений. 2016. № 2. С. 70–77.
19. Жуковский В. И., Кудрявцев К. Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. I. Аналог седловой точки // Математическая Теория Игр и её Приложения. 2013. Т. 5, № 1. С. 27–44.
20. Халмош П. Теория меры / пер. с англ. М. : Рипол Классик. 2013, 298 с.
21. Marini F., Walczak B. Particle swarm optimization (PSO). A tutorial // Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems. 2015. Vol. 149. Pt. B. P. 153–165. https://doi.org/10.1016/j.chemolab.2015.08.020.
22. Tovbis E., Krutikov V., Stanimirović P. et al. A family of multi-step subgradient minimization methods // Mathematics. 2023. Vol. 11, no. 10. https://doi.org/10.3390/math11102264.
23. Kudryavtsev K., Simakov P. The COPRAS method with interval weights // Proceedings of the 24th International Conference “Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies”, November 18–21, 2024, Nizhni Novgorod, Russia / Balandin D., Barkalov K., Meyerov I., eds. Cham : Springer, 2025. Vol. 2363. P. 136–144. https://doi.org/10.1007/978-3-031-80457-1_10.
24. Симаков П. К. Метод TOPSIS с интервальными весами // Системы управления и информационные технологии. 2025. № 2 (100). С. 94–99.

17. Abakarov A. Sh., Sushkov Yu. A. O chislennom podkhode k polucheniyu Pareto-optimalnykh alternativ. *Science and Education of the Bauman MSTU*. 2008;(5). (In Russ.).
18. Nogin V. D. A combined approach to reducing the Pareto set using linear or multiplicative scalarization. *Scientific and Technical Information Processing*. 2016;(2):70–77. (In Russ.).
19. Zhukovskiy V. I., Kudryavtsev K. N. Equilibrating conflicts under uncertainty. Analogue of a saddle-point. *Matematicheskaya Teoriya Igr i ee Prilozheniya*. 2013;5(1):27–44. (In Russ.).
20. Halmos P. R. Measure theory. Vasilkov D. A. Trans. Fomin S. V. ed. Moscow: Ripol Klassik; 2013. 298 p. (In Russ.).
21. Marini F., Walczak B. Particle swarm optimization (PSO). A tutorial. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*. 2015. Vol. 149. Pt. B. p. 153–165. https://doi.org/10.1016/j.chemolab.2015.08.020.
22. Tovbis E., Krutikov V., Stanimirović P. et al. A family of multi-step subgradient minimization methods. *Mathematics*. 2023;11(10). https://doi.org/10.3390/math11102264.
23. Kudryavtsev K., Simakov P. The COPRAS method with interval weights. In: Balandin D., Barkalov K., Meyerov I., eds. *Proceedings of the 24th International Conference “Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies”*, November 18–21, 2024, Nizhni Novgorod, Russia. Cham: Springer; 2025. Vol. 2363. p. 136–144. https://doi.org/10.1007/978-3-031-80457-1_10.
24. Simakov P. K. Metod TOPSIS s intervalnymi vesami. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii*. 2025;(2):94–99. (In Russ.).

Информация об авторе

П. К. Симаков – инженер, аспирант;
https://orcid.org/0009-0008-4844-0378,
pavelsimakov35707@gmail.com

About the author

P. K. Simakov – Engineer, Postgraduate;
https://orcid.org/0009-0008-4844-0378,
pavelsimakov35707@gmail.com