

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ОДНОМЕРНЫХ УПРУГИХ ОБЪЕКТОВ В СИСТЕМАХ ВИРТУАЛЬНОГО ОКРУЖЕНИЯ

Е. В. Страшнов, М. А. Торгашев

*Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт
системных исследований Российской академии наук
strashnov_evg@mail.ru, mtorg@mail.ru*

В работе рассмотрена задача моделирования в масштабе реального времени динамики одномерных нерастяжимых упругих объектов (тросов, канатов и т. д.) в системах виртуального окружения. Для решения этой задачи были задействованы основные положения теории упругости Коссера, описывающей деформацию изгиба и кручения троса. Предложен подход, в котором осуществляется дискретизация троса набором точек, определяющих его положение, и набором элементов между точками, определяющих его ориентацию. Для задания ориентации элементов троса выбраны кватернионы. При таком подходе нерастяжимость троса реализуется с применением метода множителей Лагранжа, что приводит к системе линейных уравнений с матрицей трехдиагонального вида, решаемой с помощью метода прогонки. В свою очередь, изгиб и кручение троса моделируются на основе метода конечных элементов, применяемого для интегрирования потенциальной энергии деформации троса. Кроме того, реализация ограничений, связывающих координаты положения и ориентации троса, осуществляется с помощью метода последовательных импульсов. Апробация предложенных в работе методов была проведена в имитационно-тренажном комплексе, разработанном в Федеральном научном центре Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук, и показала их применимость в системах виртуального окружения.

Ключевые слова: трос, теория упругости Коссера, кватернионы, метод прогонки, вектор Дарбу, метод последовательных импульсов, реальное время, имитационно-тренажерный комплекс.

DYNAMIC SIMULATION OF ONE-DIMENSIONAL ELASTIC OBJECTS IN VIRTUAL ENVIRONMENT SYSTEMS

E. V. Strashnov, M. A. Torgashev

*System Research Institute, Russian Academy of Sciences,
strashnov_evg@mail.ru, mtorg@mail.ru*

The article considers the problem of real time dynamic simulation of one-dimensional inextensible elastic objects (ropes, cables, etc.) in virtual environment systems. To solve this problem, the fundamentals of the Cosserat theory of elasticity for bending and twisting of the rope are used. An approach in which the rope is discretized by a set of points to define its position and a set of elements between points that determine its orientation is proposed. To specify the orientation of the rope elements, quaternions are involved. With this approach, the inextensibility of the rope is realized using the method of Lagrange multipliers, which leads to a system of linear equations with a tridiagonal matrix solved by the tridiagonal matrix algorithm. In turn, the bending and twisting of the rope are based on the finite element method, which is used to integrate the potential energy of rope deformation. In addition, the implementation of constraints respect to coordinates of the rope position and orientation is performed by the sequential impulses method. Approbation of proposed methods was carried out in a training complex, developed in the System Research Institute, Russian Academy of Sciences, and showed their applicability in virtual environment systems.

Keywords: rope, the Cosserat theory of elasticity, quaternions, tridiagonal matrix algorithm, Darboux vector, sequential impulses method, real time, training complex.

Введение. Моделирование динамики одномерных упругих объектов (например, тросов, канатов, веревок, кабелей и т. д.) часто необходимо в робототехнике, компьютерной графике и анимации. В интерактивных системах хирургического моделирования, предназначенных для обучения и планирования проведения хирургических операций, требуется выполнять манипуляции с тонкими объектами [1–3] такими, как хирургические нити, катетеры и иглы. В свою очередь, моделирование прядей волос, растений и веревок [4–5] рассматривается в задачах компьютерной анимации. Такие объекты, как тросы, канаты и кабели применяются в робототехнике в механизмах для подъема и перемещения грузов, для буксировки автомобилей, в задачах прокладки роботом-кабелеукладчиком коммуникационного или силового кабеля и т. д. Поэтому разработка алгоритмов и методов моделирования динамики одномерных упругих объектов является важной и актуальной задачей.

В данной статье рассмотрены одномерные нерастяжимые упругие объекты, подверженные деформациям изгиба и кручения. Задача состоит в том, чтобы смоделировать в реальном времени динамику этих объектов с обеспечением требования визуальной правдоподобности их поведения. Во многих публикациях для моделирования динамики одномерных упругих объектов применяется масс-пружинная модель, суть которой состоит в том, что одномерный объект представляется в виде последовательности материальных точек, соединенных пружинами различного типа [6–8]. Такое решение позволяет реализовать анимацию движения волос игровых персонажей и растений, но не воспроизводит процесс возникновения узлов при закручивании троса. Для преодоления этой проблемы предлагается задействовать основные положения теории упругости Коссера [9–10], изучающей деформацию одномерных упругих объектов. В публикации [1] для моделирования хирургических нитей были задействованы некоторые модели данной теории с последующим решением краевой задачи. Однако полученные в этой статье результаты применимы для объектов специального вида с одним закрепленным концом. Более универсальное решение предложено в работе [11], где теория Коссера применяется совместно с дискретизацией одномерного объекта в явном виде. Недостатком данного подхода является использование штрафных сил при реализации ограничений, что приводит к необходимости уменьшать шаг моделирования динамики. Предлагаемые нами методы и алгоритмы моделирования одномерных упругих объектов базируются на основных идеях, полученных в работе [11], но усовершенствованы для их реализации в реальном времени.

Основной целью работы является разработка методов и алгоритмов моделирования в реальном времени динамики одномерных упругих объектов (для краткости будем называть эти объекты тросами) применительно к имитационно-тренажерным комплексам. Для этого предлагается подход, в котором рассмотрено дискретное представление троса с помощью точек, задающих его положение, и элементов между точками, определяющих его ориентацию. Ориентация троса задается с помощью кватерниона с введением ограничения, чтобы третий вектор ортонормированного базиса ориентации совпадал с вектором касательной к тросу. Применяемые подходы основаны на решении системы трехдиагонального вида методом прогонки для обеспечения нерастяжимости троса, методе последовательных импульсов [12] для реализации ограничений и методе конечных элементов для формирования моментов, вычисляемых путем дифференцирования потенциальной энергии деформации изгиба и кручения для каждого элемента троса. Полученные результаты реализованы в виде программных модулей подсистемы динамики имитационно-тренажерного комплекса, разработанного в ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН.

Математическая модель троса

Одномерный упругий объект (трос) представляет собой тонкое деформируемое тело, ось которого задается в виде кривой (рис. 1). Без ограничения общности можно считать, что трос

имеет круглое поперечное сечение и длина троса L значительно больше, чем его радиус r . Положение троса определяется с помощью радиус-вектора $\mathbf{r}(s)$, а ориентация задается ортонормированным базисом $\mathbf{d}_k(s)$, $k=1,2,3$, где $s \in [0, L]$. При этом вектор $\mathbf{d}_3(s)$ совпадает с направлением касательной к кривой, что соответствует ограничению:

$$\frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|} - \mathbf{d}_3 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r}' = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}. \quad (1)$$

Для представления ориентации троса воспользуемся единичным кватернионом $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z, q_w)^T$, где $\|\mathbf{q}\| = 1$. Так как векторы $\mathbf{d}_k$ являются столбцами матрицы перехода из системы координат троса в мировую систему координат, то через кватернион эти векторы определяются следующим образом [13]:

$$\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} q_x^2 - q_y^2 - q_z^2 + q_w^2 \\ 2(q_x q_y + q_z q_w) \\ 2(q_x q_z - q_y q_w) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} 2(q_x q_y - q_z q_w) \\ -q_x^2 + q_y^2 - q_z^2 + q_w^2 \\ 2(q_y q_z + q_x q_w) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_3 = \begin{pmatrix} 2(q_x q_z + q_y q_w) \\ 2(q_y q_z - q_x q_w) \\ -q_x^2 - q_y^2 + q_z^2 + q_w^2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

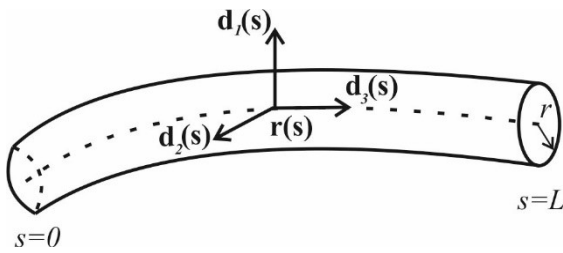


Рис. 1. Одномерный упругий объект (трос)

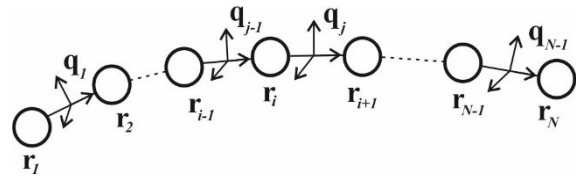


Рис. 2. Дискретное представление троса

Рассмотрим дискретное представление троса (рис. 2), в котором его положение задается узловыми точками $\mathbf{r}_i$, $i = \overline{1, N}$, а ориентация – с помощью элементов между точками троса, определяемых через кватернионы $\mathbf{q}_j$, $j = \overline{1, N-1}$.

В этом случае мы предполагаем, что масса троса сосредоточена в точках $\mathbf{r}_i$ и вычисляется как $m_i = \frac{1}{2} \rho \pi r^2 (l_{i-1} + l_i)$, где ρ – плотность троса, $l_i = \|\mathbf{r}_{i+1}^0 - \mathbf{r}_i^0\|$ – расстояние между i -й и $i+1$ -й точкой в начальном положении (при этом мы полагаем, что $l_0 = l_N = 0$). Применяя второй закон Ньютона, движение точек троса подчиняется следующим уравнениям:

$$m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{f}_i, \quad \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (3)$$

где $\mathbf{v}_i$ – скорость i -й точки троса; $\mathbf{f}_i$ – сумма всех сил, действующих на i -ю точку троса.

Вращательное движение троса основывается на представлении j -го элемента троса как твердого тела, имеющего тензор инерции $\mathbf{I}_j$. Тензор инерции в локальной системе координат j -го элемента троса имеет диагональный вид $\mathbf{I}'_j = (I_{kk}^j)$, $k=1,2,3$, где $I_{11}^j = I_{22}^j = \frac{1}{4} m_j r^2$ и $I_{33}^j = I_{11}^j + I_{22}^j$. Тогда тензор инерции $\mathbf{I}_j$ будет определяться [14] как $\mathbf{I}_j = \mathbf{R}_j \mathbf{I}'_j \mathbf{R}_j^T$, где $\mathbf{R}_j$ – мат-

рица перехода из системы координат j -го элемента троса в мировую систему координат. Используя уравнения Эйлера для вращательного движения твердого тела и кинематические уравнения для кватерниона [13], получим уравнения движения элементов троса:

$$\mathbf{I}_j \dot{\boldsymbol{\omega}}_j = \boldsymbol{\tau}_j - \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{I}_j \boldsymbol{\omega}_j, \quad \dot{\mathbf{q}}_j = \frac{1}{2} \mathbf{Q}_j \boldsymbol{\omega}_j, \quad \mathbf{Q}_j = \begin{pmatrix} -q_{x,j} & -q_{y,j} & -q_{z,j} \\ q_{w,j} & q_{z,j} & -q_{y,j} \\ -q_{z,j} & q_{w,j} & q_{x,j} \\ q_{y,j} & -q_{x,j} & q_{w,j} \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad (4)$$

где $\boldsymbol{\omega}_j$ – угловая скорость j -го элемента троса; $\boldsymbol{\tau}_j$ – сумма всех моментов, действующих на j -й элемент троса; $\mathbf{Q}_j$ – матрица кватерниона для j -го элемента троса.

Дифференциальные уравнения (3) и (4) определяют динамику движения троса, представленного в дискретной форме. Воспользуемся полунявной схемой Эйлера с шагом моделирования Δt для интегрирования этих уравнений. Тогда уравнения (3) примут вид

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i(t + \Delta t) &= \mathbf{v}_i(t) + m_i^{-1} \mathbf{f}_i \Delta t; \\ \mathbf{r}_i(t + \Delta t) &= \mathbf{r}_i(t) + \mathbf{v}_i(t + \Delta t) \Delta t, \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (5)$$

Применяя полунявную схему Эйлера для уравнения (4), получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_j(t + \Delta t) &= \boldsymbol{\omega}_j(t) + \mathbf{I}_j^{-1} (\boldsymbol{\tau}_j - \boldsymbol{\omega}_j(t) \times \mathbf{I}_j \boldsymbol{\omega}_j(t)) \Delta t; \\ \tilde{\mathbf{q}}_j(t + \Delta t) &= \mathbf{q}_j(t) + \frac{1}{2} \mathbf{Q}_j \boldsymbol{\omega}_j(t + \Delta t) \Delta t, \quad j = \overline{1, N-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

После вычисления кватернионов в (6) выполняется их нормализация $\mathbf{q}_j(t + \Delta t) = \frac{\tilde{\mathbf{q}}_j(t + \Delta t)}{\|\tilde{\mathbf{q}}_j(t + \Delta t)\|}$ для обеспечения условия единичности кватерниона.

С помощью уравнений (5) и (6) определяются новые положения точек и ориентации элементов троса, заданного в дискретной форме. Далее опишем методы моделирования нерастяжимости, изгиба и кручения троса, а также метод обработки ограничений вида (1).

Моделирование нерастяжимости троса

Трос является нерастяжимым, если его длина остается постоянной. Для дискретной модели троса это условие означает сохранение расстояния между соседними точками троса, т. е. должны быть выполнены ограничения:

$$G_i = \|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i\| - l_i = 0, \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (7)$$

Дифференцируя (7) по времени, получим ограничения относительно скоростей точек троса:

$$\dot{G}_i = \frac{d}{dt} (\sqrt{(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \cdot (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)} - l_i) = (\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_i = 0, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (8)$$

где $\mathbf{n}_i = \frac{\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i\|}$ – единичные векторы.

Объединяя уравнения (8) в одно, получим следующее матричное соотношение:

$$\mathbf{J}\mathbf{V} = \mathbf{0}, \mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\mathbf{n}_1^T & \mathbf{n}_1^T & \mathbf{0}^T & \cdots & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & -\mathbf{n}_2^T & \mathbf{n}_2^T & \cdots & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \cdots & -\mathbf{n}_{N-1}^T & \mathbf{n}_{N-1}^T \end{pmatrix}, \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_N \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где матрица Якоби $\mathbf{J}$ имеет размерность $N-1$ на $3*N$.

Воспользуемся методом множителей Лагранжа [15], согласно которому силы, обеспечивающие выполнение ограничений (9), имеют вид $\mathbf{f} = \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda}$, где $\mathbf{f}$ – объединенный вектор сил размерности $3*N$; $\boldsymbol{\lambda}$ – вектор неизвестных множителей Лагранжа размерности $N-1$. Объединим первые уравнения из (5) в одно с подстановкой выражения для вектора сил $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{V}(t + \Delta t) = \mathbf{V}(t) + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{p}, \quad (10)$$

где $\mathbf{M}^{-1} = \text{diag} \{m_1^{-1} \mathbf{E}_3, m_2^{-1} \mathbf{E}_3, \dots, m_N^{-1} \mathbf{E}_3\}$ – диагональная матрица обратных масс размерности $3*N$ на $3*N$; $\mathbf{p} = \boldsymbol{\lambda} \Delta t$ – вектор неизвестных импульсов; $\mathbf{E}_3$ – единичная матрица размерности 3 на 3.

Подставляя это уравнение в (9) для момента времени $t + \Delta t$, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{J}\mathbf{V}(t + \Delta t) = \mathbf{J}\mathbf{V}(t) + \mathbf{J}\mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{p} = \mathbf{0}.$$

Эту систему уравнений запишем в виде:

$$\mathbf{V}(t + \Delta t) = \mathbf{V}(t) + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{p}, \quad (11)$$

$$\text{где } \mathbf{A} = \mathbf{J}\mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T = \begin{pmatrix} m_1^{-1} + m_2^{-1} & -m_2^{-1} \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 & 0 & \vdots & 0 \\ -m_2^{-1} \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 & m_2^{-1} + m_3^{-1} & -m_3^{-1} \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -m_3^{-1} \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_3 & m_3^{-1} + m_4^{-1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -m_{N-1}^{-1} \mathbf{n}_{N-2} \mathbf{n}_{N-1} \\ 0 & 0 & \cdots & -m_{N-1}^{-1} \mathbf{n}_{N-2} \mathbf{n}_{N-1} & m_{N-1}^{-1} + m_N^{-1} \end{pmatrix} -$$

трехдиагональная симметричная матрица размерности $N-1$ на $N-1$, $\mathbf{b} = -\mathbf{J}\mathbf{V}(t)$ – вектор правой части размерности $N-1$.

Эта система решается с помощью метода прогонки [16, с. 45], предназначенного для решения систем линейных уравнений с трехдиагональной матрицей. Для возможности применения метода прогонки матрица системы уравнений должна быть с диагональным преобладанием. Покажем, что матрица $\mathbf{A}$ обладает этим свойством. Действительно, рассмотрим i -й столбец матрицы $\mathbf{A}$: $c_i = m_i^{-1} + m_{i+1}^{-1}$ – диагональный элемент матрицы, $a_i = -m_i^{-1} \mathbf{n}_{i-1} \mathbf{n}_i$ – элемент, лежащий выше диагонали, $b_i = -m_{i+1}^{-1} \mathbf{n}_i \mathbf{n}_{i+1}$ – элемент, лежащий ниже диагонали (при этом $a_1 = 0$ и $b_{N-1} = 0$). Тогда, применяя условие единичности векторов $\|\mathbf{n}_i\| = 1$ и неравенство Коши – Буняковского, получим, что справедливо неравенство:

$$|c_i| = m_i^{-1} + m_{i+1}^{-1} = m_i^{-1} \|\mathbf{n}_{i-1}\| \|\mathbf{n}_i\| + m_{i+1}^{-1} \|\mathbf{n}_i\| \|\mathbf{n}_{i+1}\| \geq m_i^{-1} \mathbf{n}_{i-1} \mathbf{n}_i + m_{i+1}^{-1} \mathbf{n}_i \mathbf{n}_{i+1} = |a_i| + |b_i|,$$

которое соответствует условию диагонального преобладания матрицы $\mathbf{A}$.

Таким образом, решая систему (11) и подставляя полученные значения импульсов $\mathbf{p}$ в (10), получим новые скорости $\mathbf{V}(t + \Delta t)$ точек троса, для которых выполнено (9).

В процессе моделирования ограничения (7) могут нарушаться, поэтому для их восстановления применяется стабилизация на основе метода раздельных импульсов [12]. Реализация этого метода основывается на введении на каждом шаге моделирования фиктивных скоростей $\mathbf{V}_i^*$ точек троса. Через эти скорости составляются ограничения, аналогичные (9):

$$\mathbf{J}\mathbf{V}^* = -ERP \frac{\mathbf{G}}{\Delta t}, \quad \mathbf{G} = (G_1, G_2, \dots, G_{N-1})^T,$$

где $ERP \in [0, 1]$ – параметр уменьшения ошибки.

Для обеспечения этих ограничений вычисляются фиктивные импульсы $\mathbf{p}^*$ из системы уравнений $\mathbf{A}\mathbf{p}^* = \mathbf{b}^*$ методом прогонки, где $\mathbf{b}^* = -\mathbf{J}\mathbf{V}^*(t) - ERP \frac{\mathbf{G}}{\Delta t}$. С деталями реализации метода раздельных импульсов можно ознакомиться в [12].

Моделирование изгиба и кручения троса

Моделирование изгиба и кручения троса основывается на рассмотрении вектора Дарбу $\mathbf{u}(s)$, означающего скорость деформации при изгибе и кручении троса. Из дифференциальной геометрии [17] известно, что векторы $\mathbf{d}_k$ из (2) подчиняются следующим соотношениям:

$$\mathbf{d}'_k = \frac{\partial \mathbf{d}_k}{\partial s} = \mathbf{u} \times \mathbf{d}_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Используя эти соотношения и (2) можно показать [11], что компоненты u_k можно представить в следующем виде:

$$u_k = 2\mathbf{B}_k \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}', \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где $\mathbf{B}_k$, $k = 1, 2, 3$ – постоянные кососимметричные матрицы.

Деформация троса при изгибе и кручении определяется отклонением вектора Дарбу от его недеформированного состояния $\hat{\mathbf{u}}(s)$. Используя соотношения (12), получим выражение для потенциальной энергии деформации изгиба и кручения троса в непрерывной форме:

$$V_b = \frac{1}{2} \int_0^L \sum_{k=1}^3 K_{kk} (u_k - \hat{u}_k)^2 ds = \frac{1}{2} \int_0^L \sum_{k=1}^3 K_{kk} (2\mathbf{B}_k \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}' - \hat{u}_k)^2 ds, \quad (13)$$

где K_{kk} – компоненты тензора жесткости, вычисляемые по формулам $K_{11} = K_{22} = E \frac{\pi r^2}{4}$ и $K_{33} = G \frac{\pi r^2}{2}$; E – модуль Юнга при изгибе троса; G – модуль сдвига троса.

Перейдем к дискретной потенциальной энергии деформации изгиба и кручения троса. Для этого воспользуемся методом конечных элементов и проинтегрируем потенциальную энергию из (13) для каждого элемента ориентации. В этом случае кватернион $\mathbf{q}$ в (13) для j -го элемента троса аппроксимируется с помощью постоянной функции формы вида:

$$\bar{\mathbf{q}}_j = \frac{1}{2}(\mathbf{q}_j + \mathbf{q}_{j+1}), \quad j = \overline{1, N-2}.$$

В свою очередь, производная $\mathbf{q}'$ внутри элемента аппроксимируется как

$$\mathbf{q}'_j = \frac{\mathbf{q}_{j+1} - \mathbf{q}_j}{l'_j}, \quad j = \overline{1, N-2},$$

где $l'_j = \frac{1}{2}(l_j + l_{j+1})$; $j = \overline{1, N-2}$ – усредненное значение длины элемента ориентации троса.

Тогда потенциальная энергия (13) для j -го элемента троса примет вид:

$$V_b[j] = \frac{1}{2} \int_0^{l'_j} \sum_{k=1}^3 K_{kk} (2\mathbf{B}_k \bar{\mathbf{q}}_j \cdot \mathbf{q}'_j - \hat{u}_{k,j})^2 d\xi = \frac{l'_j}{2} \sum_{k=1}^3 K_{kk} (\mathbf{B}_k (\mathbf{q}_j + \mathbf{q}_{j+1}) \cdot (\mathbf{q}_{j+1} - \mathbf{q}_j) - \hat{u}_{k,j})^2.$$

Дифференцируя потенциальную энергию $V_b[j]$ деформации изгиба и кручения для j -го элемента троса, вычислим моменты, действующие на j -й и $j+1$ -й элемент троса:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_j &= -\frac{1}{2} \mathbf{Q}_j^T \frac{\partial V_b[j]}{\partial \mathbf{q}_j} = \frac{1}{l'_j} \mathbf{Q}_j^T \sum_{k=1}^3 K_{kk} (\mathbf{B}_k (\mathbf{q}_j + \mathbf{q}_{j+1}) \cdot (\mathbf{q}_{j+1} - \mathbf{q}_j) - \hat{u}_{k,j}) \mathbf{B}_k \mathbf{q}_{j+1}; \\ \boldsymbol{\tau}_{j+1} &= -\frac{1}{2} \mathbf{Q}_{j+1}^T \frac{\partial V_b[j]}{\partial \mathbf{q}_{j+1}} = -\frac{1}{l'_j} \mathbf{Q}_{j+1}^T \sum_{k=1}^3 K_{kk} (\mathbf{B}_k (\mathbf{q}_j + \mathbf{q}_{j+1}) \cdot (\mathbf{q}_{j+1} - \mathbf{q}_j) - \hat{u}_{k,j}) \mathbf{B}_k \mathbf{q}_j. \end{aligned} \quad (14)$$

При дифференцировании было использовано (см. (12)) свойство кососимметричности матриц $\mathbf{B}_k$: $(\mathbf{B}_k \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = -(\mathbf{q}_1, \mathbf{B}_k \mathbf{q}_2)$, $k = 1, 2, 3$.

Моменты деформации изгиба и кручения элементов троса (14) применяются в уравнениях (6) вращательного движения троса.

Моделирование ограничений для троса

В процессе моделирования динамики троса необходимо, чтобы было выполнено ограничение (1). Используя аппроксимацию производной $\mathbf{r}'_i = \frac{\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i}{l_i}$, получим ограничения для дискретной модели троса вида:

$$\mathbf{G}_i = \frac{\mathbf{r}'_i}{\|\mathbf{r}'_i\|} - \mathbf{d}_3(\mathbf{q}_i) = \frac{\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i\|} - \mathbf{d}_3(\mathbf{q}_i) = \mathbf{0}, \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (15)$$

Дифференцируя (15) по времени, получим ограничения относительно линейных и угловых скоростей троса:

$$\dot{\mathbf{G}}_i = \mathbf{R}_{pi}(\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i) - \mathbf{R}_{qi}\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{J}_{p,i+1}\mathbf{v}_{i+1} + \mathbf{J}_{p,i}\mathbf{v}_i + \mathbf{J}_{q,i}\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{0}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (16)$$

где $\mathbf{R}_{pi} = \frac{1}{\|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i\|}(\mathbf{E}_3 - \mathbf{n}_i\mathbf{n}_i^T)$, $\mathbf{n}_i = \frac{\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i\|}$, $\mathbf{R}_{qi} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{d}_3(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \mathbf{Q}_i$. Матрицы $\mathbf{J}_{p,i+1} = -\mathbf{J}_{p,i} = \mathbf{R}_{pi}$ и $\mathbf{J}_{q,i} = -\mathbf{R}_{qi}$ являются матрицами Якоби ограничения (16). При дифференцировании было использовано второе уравнение из (4).

Ограничения вида (16) обрабатываются с помощью метода последовательных импульсов [12]. Аналогично методу множителей Лагранжа импульс, обеспечивающий ограничение (16) для i -го элемента, будет иметь вид $\Delta \mathbf{p}_i = \mathbf{J}^T \Delta \boldsymbol{\lambda}_i$. Переходя от сил к импульсам для первых уравнений (5) и (6), получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{i+1}(t + \Delta t) &= \mathbf{v}_{i+1}(t) + m_{i+1}^{-1} \mathbf{J}_{p,i+1}^T \Delta \boldsymbol{\lambda}_i = \mathbf{v}_{i+1}(t) + m_{i+1}^{-1} \mathbf{R}_{pi}^T \Delta \boldsymbol{\lambda}_i; \\ \mathbf{v}_i(t + \Delta t) &= \mathbf{v}_i(t) + m_i^{-1} \mathbf{J}_{p,i}^T \Delta \boldsymbol{\lambda}_i = \mathbf{v}_i(t) - m_i^{-1} \mathbf{R}_{pi}^T \Delta \boldsymbol{\lambda}_i; \\ \boldsymbol{\omega}_i(t + \Delta t) &= \boldsymbol{\omega}_i(t) + \mathbf{I}_i^{-1} \mathbf{J}_{q,i}^T \Delta \boldsymbol{\lambda}_i = \boldsymbol{\omega}_i(t) - \mathbf{I}_i^{-1} \mathbf{R}_{qi}^T \Delta \boldsymbol{\lambda}_i. \end{aligned} \quad (17)$$

Далее подставим (17) в ограничение (16) для момента времени $t + \Delta t$:

$$[\mathbf{R}_{pi} \mathbf{R}_{pi}^T (m_i^{-1} + m_{i+1}^{-1}) + \mathbf{R}_{qi} \mathbf{I}_i^{-1} \mathbf{R}_{qi}^T] \Delta \boldsymbol{\lambda}_i = \mathbf{R}_{pi}(\mathbf{v}_i(t) - \mathbf{v}_{i+1}(t)) + \mathbf{R}_{qi} \boldsymbol{\omega}_i(t), \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (18)$$

Идея метода последовательных импульсов состоит в том, что мы последовательно вычисляем импульсы $\Delta \boldsymbol{\lambda}_i$ из уравнений (18), а затем, используя (17), определяем новые скорости. Эта процедура выполняется итерационно и продолжается до тех пор, пока не будет выполнено $\|\Delta \boldsymbol{\lambda}_i\| \leq \varepsilon$ для всех ограничений вида (16). Для ускорения сходимости предлагаемого метода вычисленные импульсы $\Delta \boldsymbol{\lambda}_i$ накапливаются и используются на следующем шаге моделирования. В процессе обеспечения (16) ограничения (8) нерастяжимости троса могут нарушаться, поэтому при необходимости потребуется повторное решение системы (11) внутри шага моделирования $t + \Delta t$. Обеспечение ограничений (15) осуществляется с применением стабилизации на основе метода отдельных импульсов [12].

Моделирование троса в имитационно-тренажерном комплексе

Предложенные методы и алгоритмы моделирования динамики тросов были реализованы в виде программных модулей подсистемы динамики имитационно-тренажерного комплекса, разработанного в ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН. Данный программный комплекс предназначен для компьютерной симуляции виртуальных роботов в виртуальном окружении. Виртуальные 3D-модели роботов и окружающей обстановки, содержащие одномерные объекты (тросы, канаты и т. д.), создаются в системе трехмерного моделирования Autodesk 3ds Max. В этой системе задается визуальное поведение троса с помощью модификатора skin, применяемого к геометрии троса. В рамках рассматриваемого модификатора создается набор костей,

располагающихся вдоль троса и влияющих с некоторым коэффициентом на вершины его геометрии. Изменения положений и ориентаций костей позволяют визуализировать деформацию изгиба и кручения троса. При таком подходе подсистема динамики рассчитывает новые координаты троса и других объектов сцены и передает по специальному протоколу в подсистему визуализации, которая синтезирует изображение виртуальной сцены и тросов с новыми положениями и ориентациями объектов. Один шаг моделирования и визуализации занимает не более 40 мс, обеспечивая режим реального времени (не менее 25 кадров в секунду).



Рис. 3. Мобильный робот КРТ100-МП

Апробация созданных программных модулей для моделирования динамики троса была проведена на примере модифицированной виртуальной модели мобильного робота КРТ 100-МП с тележкой (рис. 3), закрепленной к роботу с помощью троса (в оригинальной модели тележка крепится к корпусу робота с помощью сферического шарнира). Для троса выбраны следующие параметры: длина $l = 2,8$ м, радиус $r = 1,5$ см, плотность $\rho = 1200$ кг/м³, модуль Юнга $E = 0,05$ МПа, модуль сдвига $G = 0,1$ МПа. Вектор Дарбу для недеформированного состояния троса выбран $\hat{\mathbf{u}}_j = \mathbf{0}$, $j = \overline{1, N-2}$. Для обеспечения реального времени и стабильности моделирования динамики был выбран шаг Δt , не превышающий 15 мс. Результаты апробации показали, что разработанные в статье методы и алгоритмы являются быстрыми и обеспечивают стабильность моделирования троса.

Заключение. В работе рассмотрена задача моделирования динамики одномерных упругих объектов (тросов и т. д.) в системах виртуального окружения. Отличительной особенностью предлагаемых решений является применение разработанного метода последовательных импульсов совместно с теорией упругости Коссера. Реализация метода прогонки для моделирования нерастяжимых тросов позволяет существенно уменьшить время вычислений. В дальнейшем планируется усовершенствовать предложенные подходы для обработки коллизий троса с самим собой и с другими объектами виртуального окружения.

Данное исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-07-01104.

Литература

1. Pai D. Strands: Interactive simulation of thin solids using cosserat models // Eurographics. 2002. V. 21. № 3. P. 347–352.
2. Chentanez N., Alterovitz R., Ritchie D., Cho L., Hauser K. K., Goldberg K., Shewchuk J. R.

and O'Brien J. F. Interactive simulation of surgical needle insertion and steering // ACM Transactions on Graphics. 2009. V. 28. № 3. P. 88:1–88:10.

3. Lenoir J., Cotin S., Duriez C. and Neumann P. Interactive physically-based simulation of catheter and guidewire // Computer & Graphics. V. 30. № 3. P. 417–423.

4. Muller M., Chentanez N., Kim T.-Y. Fast simulation of inextensible hair and fur. In Proceedings of Virtual Reality Interactions and Physical Simulations (VRIPhys) // Eurographics Association 3, 2012.

5. Kugelstadt T., Schomer E. Position and orientation based Cosserat rods // ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on computer animation. Zurich : Eurographics Association, 2016. P. 169–178.

6. Kubiak B., Pietroni N., Ganovelli F., and Fratarcangeli M. A robust method for real-time thread simulation // Proc. ACM Symp. Virtual Reality Software and Technology (VRST '07). 2007. P. 85–88.

7. Selle A., Lentine M. G., Fedkiw R. A mass spring model for hair simulation // ACM Trans. Graphics (Proc. ACM SIGGRAPH), 2008.

8. Martin S., Kaufmann P., Botsch M., Grinspun E. and Gross M. Unified simulation of elastic rods, shells, and solids // ACM Trans Graph. 2010. V. 28. № 3 (Jul). P. 39:1–39:10.

9. Antman S. S. Nonlinear problems of elasticity. Springer, 2005.

10. Жилин П. А. Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней : учеб. пособие. СПб. : Изд-во Политех. ун-та, 2007. 101 с.

11. Spillmann J., Teschner M. CoRdE. Cosserat rod elements for the dynamic simulation of one-dimensional elastic objects // Eurographics. ACM SIGGRAPH, 2007. P. 1–10.

12. Михайлюк М. В., Страшнов Е. В. Моделирование системы связанных тел методом последовательных импульсов // Тр. НИИСИ РАН. 2014. Т. 4. № 2. С. 52–60.

13. Schwab A. L., Meijaard J. P. How to draw Euler angles and utilize Euler parameters // Proc. IDEETC/CIE 2006, ASME 2006 : International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, 2006.

14. Garstenauer H. A Unified Framework for Rigid Body Dynamics. Master's thesis. Linz : Johannes Kepler Universitat, 2006. 139 p.

15. Shabana A. A. Computational Dynamics, Third edition. John Wiley & Sons Inc., 2010. 528 p.

16. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы : учеб. пособие для вузов. М. : Наука, 1989, 432 с.

17. Позняк Э. Г., Шикин Е. В. Дифференциальная геометрия: первое знакомство. 2-е изд., испр. и доп. М. : Едиториал УРСС, 2003. 408 с.