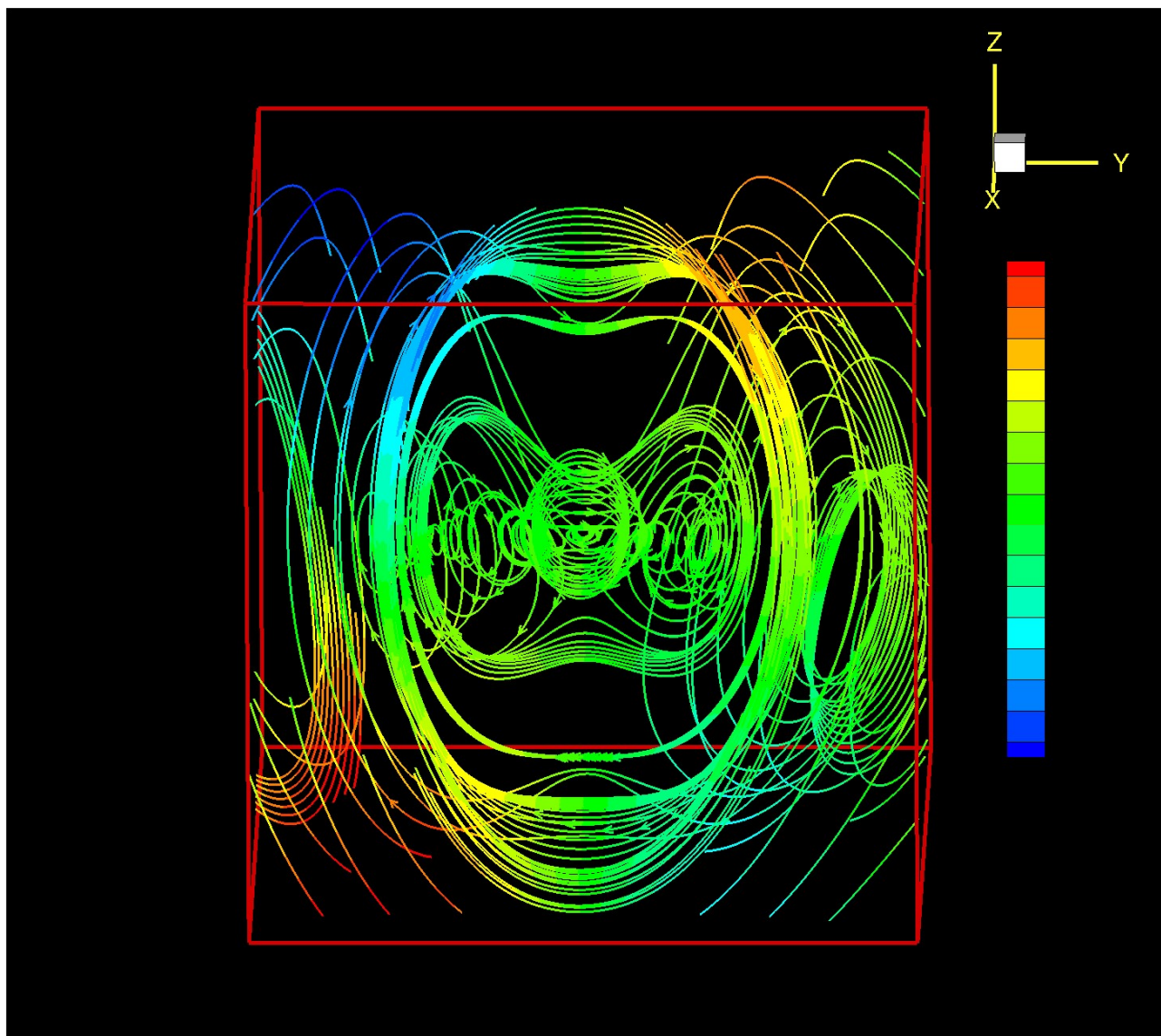




Вестник кибернетики

Международный журнал

Proceedings in Cybernetics

International Journal

№ 3 (31)

12+

2018

БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ХАНТЫ-МАНСИЙСКОГО АВТОНОМНОГО ОКРУГА – ЮГРЫ
«СУРГУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Вестник кибернетики

Международный журнал

Proceedings in Cybernetics

International Journal

№ 3 (31)

Сургут
2018

Учредитель и издатель

бюджетное учреждение высшего образования Ханты-Мансийского автономного округа – Югры
«Сургутский государственный университет»

Главный редактор

Бетелин Владимир Борисович, академик РАН, д. ф.-м. н., профессор, Москва

Заместитель главного редактора

Галкин Валерий Алексеевич, д. ф.-м. н., профессор, Сургут

Ответственный секретарь

Гавриленко Тарас Владимирович, к. т. н., Сургут

Члены редакционной коллегии:

Панченко Владислав Яковлевич, академик РАН, д. ф.-м. н., профессор, Москва
Семёнов Алексей Львович, академик РАН и РАО, д. ф.-м. н., профессор, Москва
Савин Геннадий Иванович, академик РАН, д. ф.-м. н., профессор, Москва
Сойфер Виктор Александрович, академик РАН, д. т. н., профессор, Самара
Чаплыгин Юрий Александрович, академик РАН, д. т. н., профессор, Москва
Чубариков Владимир Николаевич, д. ф.-м. н., профессор, Москва
Смирнов Николай Николаевич, д. ф.-м. н., профессор, Москва
Губайдуллин Амир Анварович, д. ф.-м. н., профессор, Тюмень
Тишкин Владимир Федорович, член-корреспондент РАН, д. ф.-м. н., профессор, Москва
Якобовский Михаил Владимирович, член-корреспондент РАН, д. ф.-м. н., профессор, Москва
Цибульский Владимир Романович, д. т. н., профессор, Тюмень
Шагалиев Рашит Мирзагалиевич, д. ф.-м. н., Саров
Острейковский Владислав Алексеевич, д. т. н., профессор, Сургут
Пападопулос Атанас, профессор, Страсбург, Франция
Де Роза Феличе, профессор, Болонья, Италия

Выпускающий редактор

Аширова Анна Владимировна

Редактор

Егоров Александр Алексеевич, к. т. н.

Верстка

Смирнова Яна Викторовна,
Мельникова Екатерина Алексеевна

Переводчик

Бенская Марина Олеговна

Рисунок на обложке:

Визуализация магнитогидродинамических расчетов для точного решения внутри сферы
© В. А. Галкин, А. В. Гореликов

Решением Высшей аттестационной комиссии с 29 мая 2017 года журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» по следующим группам научных специальностей: 01.01.00 – математика, 01.02.00 – механика, 05.01.00 – инженерная геометрия и компьютерная графика, 05.13.00 – информатика, вычислительная техника и управление, 05.27.00 – электроника.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации средства массовой информации
ЭЛ № ФС 77–63407 от 16.10.2015.

Издается с 2002 года. Выпускается 4 раза в год.

Адрес редакции:

БУ ВО «Сургутский государственный университет»,
628412, Россия, Ханты-Мансийский автономный округ – Югра, г. Сургут, пр. Ленина, 1.
Тел.: (3462) 76-29-88, факс: (3462) 76-29-29, e-mail: jc@surgu.ru. Сайт: surgu.ru

Founder and Publisher
Surgut State University

Chief Editor

Prof. Vladimir B. Betelin, member of the Russian Academy of Sciences (RAS),
Doctor of Science (Phys&Math), Moscow

Vice Chief Editor

Prof. Valerii A. Galkin, Doctor of Science (Phys&Math), Surgut

Executive Editor

Taras V. Gavrilenko, PhD (Engineering), Surgut

Editorial Board:

Prof. Vladislav Ya. Panchenko, member of the Russian Academy of Sciences (RAS),
Doctor of Science (Phys&Math), Moscow

Prof. Alexey L. Semyonov, member of the Russian Academy of Sciences (RAS) and the Russian Academy of Education, Doctor of Science (Phys&Math), Moscow

Prof. Gennady I. Savin, member of the Russian Academy of Sciences (RAS),
Doctor of Science (Phys&Math), Moscow

Prof. Viktor A. Soifer, Doctor of Science (Engineering), member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Samara

Prof. Yuri A. Chaplygin, Doctor of Science (Engineering), member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Moscow

Prof. Vladimir N. Chubarikov, Doctor of Science (Phys&Math), Moscow

Prof. Nikolay N. Smirnov, Doctor of Science (Phys&Math), Moscow

Prof. Amir A. Gubaidullin, Doctor of Science (Phys&Math), Tyumen

Prof. Vladimir F. Tishkin, corresponding member of the Russian Academy of Sciences (RAS),
Doctor of Science (Phys&Math), Moscow

Prof. Mikhail V. Iakobovski, corresponding member of the Russian Academy of Sciences (RAS),
Doctor of Science (Phys&Math), Moscow

Prof. Vladimir R. Tsibulsky, Doctor of Science (Engineering), Tyumen

Prof. Rashit M. Shagaliyev, Doctor of Science (Phys&Math), Sarov

Prof. Vladislav A. Ostreikovskiy, Doctor of Science (Engineering), Surgut

Prof. Athanase Papadopoulos, Strasbourg, France

Prof. Felice De Rosa, Bologna, Italy

Publishing Editor

Anna V. Ashirova

Editor

Alexander A. Egorov, PhD (Engineering)

Layout

Yana V. Smirnova,

Ekaterina A. Melnikova

Translator

Marina O. Benskaya

Cover Image:

A visualization of magnetohydrodynamic analysis used to find an exact solution within a sphere

© V. A. Galkin, A. B. Gorelikov

Since 29.05.2017 the journal is included in the List of Leading Peer-Reviewed Scientific Journals

Published in the RF by the Higher Attestation Commission,

which publishes main scientific results of doctor's and candidate's theses, on the following subject groups: 01.01.00 – Mathematics; 01.02.00 – Mechanics; 05.01.00 – Engineering Geometry and Computer Graphics; 05.13.00 – Computer Science, Computing, and Control; 05.27.00 – Electronics.

The journal is registered with the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media.

Mass media registration certificate EL No. FS 77–63407 dated on 16.10.2015.

Published since 2002. 4 issues per year.

Editorial Board Address:

Surgut State University, Russia 628412, Khanty-Mansi Autonomous Okrug – Ugra, Surgut, Lenin pr., 1

Tel.: +7(3462) 76-2988, fax: +7 (3462) 76-2929, e-mail: jc@surgu.ru. Web: surgu.ru

© Surgut State University

© Authors

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Рыбакин Б. П., Смирнов Н. Н., Горячев В. Д., Кравченко М. Н., Стамов Л. И. Компьютерное моделирование процесса вскрытия пласта с использованием кумулятивных зарядов	9
Деев Г. Е., Ермаков С. В. Гармонический ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$	19
Афанаскин И. В., Вольпин С. Г., Чен-лен-сон Ю. Б., Штейнберг Ю. М. Эмпирические модели для интерпретации методом наилучшего совмещения гидродинамических исследований горизонтальных скважин и скважин с трещиной гидроразрыва пласта, работающих с переменным дебитом.....	31
Страшнов Е. В., Торгашев М. А. Моделирование динамики одномерных упругих объектов в системах виртуального окружения	41
Дубовик О. А., Дубовик А. О. Представления группы движений псевдоевклидовой плоскости и функции Бесселя	51
Ефимова Н. П., Афанаскин И. В., Колеватов А. А., Солопов Д. В., Ялов П. В. Анализ зависимости результатов математического моделирования разработки нефтяных месторождений от исходных данных на примере модели двухфазной фильтрации	58
Задорожный В. Н., Юдин Е. Б. Распределения степеней в графах с линейным правилом предпочтительного связывания и в графах Джексона – Роджерса.....	68
Назаренко А. И., Усовик И. В. Неустойчивость решения задачи об определении времени падения спутников на эллиптических орбитах.....	82
Страшнов Е. В., Тимохин П. Ю. Блочный подход для разрешения коллизий виртуальных объектов.....	91
Задорожный В. Н., Захаренкова Т. Р. Ускоренный метод расчета вероятностей потерь в фрактальных системах с очередями ..	102
Шошин Е. Л. Радиолокационные методы контроля навигационной судоходной обстановки.....	113
Бутнев О. И., Кузнецов В. Ю., Пронин В. А., Сидоров М. Л., Кац Р. М., Афанаскин И. В., Королев А. В., Ялов П. В. Методика расчета двухфазной фильтрации жидкости в пористых средах на призматических сетках различного вида.....	135
Колеватов А. А., Штейнберг Ю. М., Чен-лен-сон Ю. Б., Дяченко А. Г., Солопов Д. В. Оценка точности результатов гидропрослушивания для математического моделирования разработки месторождений.....	153
Попов А. А., Бобоев Ш. А. Получение разреженных решений с использованием d-оптимального разбиения исходной выборки на обучающую и тестовую части и критерия регулярности.....	162
Горынин Г.Л., Григорьев Ю.И. Моделирование плит покрытий из древесины и композитных материалов на основе разномодульной теории.....	169

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Мальцев А. В., Омельченко Д. В. Использование пространственного разбиения при реализации взаимодействия систем частиц с виртуальной средой на GPU	181
Гребенникова Е. К., Кандалов П. И. Оптимизация времени работы алгоритма для многоядерных процессоров в программном комплексе теплового проектирования электронных модулей	188
Гавриленко Т. В., Горбунов Д. В., Белощенко Д. В., Башкатова Ю. В. Расчет квазиаттракторов для параметров движений человека	195
Бизянов Е. Е., Гутник А. А. Интеллектуальная обработка информации: аксиоматический и метрологический аспекты..	200
Мальцев А. В., Михайлюк М. В. Распределенная реалистичная визуализация виртуальных сцен с использованием текстур физических параметров материалов	206
Зарипова Л. Р., Бушмелева К. И. Модель мультиверсионной информационной системы управления изменениями программного обеспечения в информационных проектах	212
Галкин В. А., Филатова О. Е., Гавриленко Т. В., Горбунов Д. В. Теория Н. А. Бернштейна об организации движений и кибернетические механизмы регуляции	217
Яценко Е. А. Аспекты разработки эргономичного интерфейса пользователя прикладных программ....	222
Еськов В. М., Филатова О. Е., Галкин В. А., Манина Е. А. Понятие однородной системы в современной науке	227
Миронов Д. Т., Вольпин С. Г., Юдин В. А. Технологические подходы при эксплуатации скважин бажендовской свиты и оценка возможности подключения в разработку ресурсов недренируемых зон	233
Тимохин П. Ю., Михайлюк М. В. Технология создания мультизадачной графической оболочки системы визуализации цифровой модели керна	247

CONTENTS

PHYSICS AND MATHEMATICS

Rybakin B. P., Smirnov N. N., Goryachev V. D., Kravchenko M. N., Stamov L. I. Computer Simulation of Formation Exposing Process Using Cumulative Shaped Charges	9
Deev G. E., Ermakov S. V. Harmonic series $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$	19
Afanaskin I. V., Volpin S. G., Chen-len-son Yu. B., Shteinberg Yu. M. Empirical Models for Interpretation by Best Matching of Horizontal Wells and Fractured Wells, Operated at Variable rate, During Flow Tests	31
Strashnov E. V., Torgashev M. A. Dynamic Simulation of One-Dimensional Elastic Objects in Virtual Environment Systems	41
Dubovik O. A., Dubovik A. O. Representations of Group of Motions of the Pseudo-Euclidean Plane and the Bessel Functions ..	51
Efimova N. P., Afanaskin I. V., Kolevatov A. A., Solopov D. V., Yalov P. V. Analysis of Dependence of Mathematical Modeling Results of Oil Fields Development on Initial Data Using the Two-Phase Filtration	58
Zadorozhnyi V. N., Yudin E. B. Degrees Distributions in Linear Preferential Attachment Graphs and Jackson – Rogers Graphs	68
Nazarenko A. I., Usovik I. V. Instability of Solution for Determination of Time of Satellites Falling on Elliptic Orbits	82
Strashnov E. V., Timokhin P. Yu. Block Approach for Collision Response of Virtual Objects	91
Zadorozhnyi V. N., Zakharenkova T. R. Rapid Method for Calculation of Loss Probabilities in Fractal Queueing Systems	102
Shoshin E. L. Radar Methods for Monitoring Navigational Environment	113
Butnev O. I., Kuznetsov V. Yu., Pronin V. A., Sidorov M. L., Kats R. M., Afanaskin I. V., Korolev A. V., Yalov P. V. Two-Phase Fluid Flow Calculation Methodology for Porous Media at Different Prismatic Grid Types	135
Kolevatov A. A., Steinberg Yu. M., Chen-len-son Yu. B., Dyachenko A. G., Solopov D. V. Accuracy Evaluation of Well Interference Testing Results for Fields Development Simulation	153
Popov A. A., Boboev Sh. A. Obtaining of Sparse Solutions with D-Optimal Partitioning of Original Sample into Training and Test Parts and Regularity Criterion	162
Gorynin G.L., Grigoryev Y.I. Modeling of roof slabs from wood and composite materials on the basis of the different-modulus theory	169

ENGINEERING

Maltsev A. V., Omelchenko D. V. Using Spatial Subdivision in Implementing the Interaction of Particle Systems with Virtual Environment on GPU	181
---	-----

Grebennikova E. K., Kandalov P. I. Optimization of Algorithm Execution Time for Multi-Core Processors in Thermal Designing Software of Electronic Modules.....	188
Gavrilenko T. V., Gorbunov D. V., Beloshchenko D. V., Bashkatova Yu. V. Calculation of Quasi-attractors for Parameters of Human Movements	195
Bizyanov E. E., Hutnik A. A. Intelligent Information Processing: The Axiomatic and Metrological Aspects.....	200
Maltsev A. V., Mikhaylyuk M. V. Distributed Realistic Visualization of Virtual Scenes Using Textures of Materials' Physical Parameters	206
Bushmeleva K. I., Zaripova L. R. Multiversion Information System Model for Managing Software Changes in Information Projects	212
Galkin V. A., Filatova O. E., Gavrilenko T. V., Gorbunov D. V. Bernstein's Theory on Regulation of Movements and Cybernetic Mechanisms of Regulation..	217
Yatsenko E. A. Development Aspects of Ergonomic Interface for User of Application Programs.....	222
Eskov V. M., Filatova O. E., Galkin V. A., Manina E. A. Concept of Homogeneous System in Modern Science	227
Mironov D. T., Volpin S. G., Yudin V. A. Technological Approaches for Bazhenov Formation Wells Operation and Possibility Assess- ment of Addition of Resource Recovery from Low-Permeable Zones	233
Timokhin P. Yu., Mikhaylyuk M. V. Implementation Technology of Multitasking Graphical Shell of Visualization System for Digital Model of the Core Material.....	247

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 622.245.142.6:004.94

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВСКРЫТИЯ ПЛАСТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КУМУЛЯТИВНЫХ ЗАРЯДОВ

**Б. П. Рыбакин^{1,2}, Н. Н. Смирнов^{1,2}, В. Д. Горячев³,
М. Н. Кравченко⁴, Л. И. Стамов^{1,2}**

¹ *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

² *Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт
системных исследований Российской академии наук*

³ *Тверской государственный технический университет*

⁴ *РГУ нефти и газа (НИУ) им. И. М. Губкина, г. Москва*

*rybakin@vip.niisi.ru, ebifsun1@mech.math.msu.su, gdv.vdg@yandex.ru,
dep.ngipg@yandex.ru, lyubenstamov@mail.ru*

Работа посвящена анализу лабораторных экспериментов и численному моделированию процесса образования перфорационного канала в комбинированной преграде под действием кумулятивной струи, возникающей при детонации взрывчатого вещества. Данный процесс характерен для вторичного и последующего вскрытия пласта путем применения кумулятивных перфораторов, где создание качественной гидродинамической связи «скважина – пласт» способствует сохранению стабильного притока нефти и газа к скважине.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, пиропатроны, детонация, высокопроизводительные вычисления.

COMPUTER SIMULATION OF FORMATION EXPOSING PROCESS USING CUMULATIVE SHAPED CHARGES

**B. P. Rybakin^{1,2}, N. N. Smirnov^{1,2}, V. D. Goryachev³,
M. N. Kravchenko⁴, L. I. Stamov^{1,2}**

¹ *Lomonosov Moscow State University*

² *System Research Institute, Russian Academy of Sciences*

³ *Tver State Technical University*

⁴ *Gubkin University, Moscow*

*rybakin@vip.niisi.ru, ebifsun1@mech.math.msu.su, gdv.vdg@yandex.ru,
dep.ngipg@yandex.ru, lyubenstamov@mail.ru*

The work is devoted to the laboratory experiment analysis and numerical modeling of perforation tunnel formation in a combined barrier under the action of a cumulative jet, which occurs during the detonation of an explosive (explosive substances). This process is typical for secondary and subsequent formation exposing process by using jet perforator, where the creation of high-quality hydrodynamic connection “well – reservoir” helps maintain a stable flow of oil and gas to the well.

Keywords: computer simulation, explosive charges, detonation, high-performance computing.

Эффективность процесса нефтедобычи во многом определяется качеством вскрытия пласта. Создание связи с пластом осуществляется в большей части проектов путем перфорирования обсадной колонны, цементного камня и создания зоны повышенной проницаемости вокруг скважины. Способ вскрытия пласта, выбор метода перфорирования и перфорационных инструментов зависит от фильтрационно-емкостных свойств пласта (пористости, проницаемости, состава минерального скелета, упругости и прочности пористой матрицы пласта, особенностей строения и типа анизотропии коллектора, наличия и направления имеющихся тре-

щин, сбросов и т. п.). Качество гидродинамической связи скважины с пластом тем эффективней, чем большую длину имеют сами перфорационные каналы и чем шире система трещин, возникающих вокруг перфорационных отверстий, за счет чего повышается пористость и проницаемость призабойной зоны, загрязненной в результате проведения буровых работ. Поэтому создание эффективных перфорационных систем с наибольшей глубиной вскрытия и повышенной дренажной системой трещин в области интервала перфорации продуктивного пласта остается актуальной задачей нефтегазового инжиниринга. Для вскрытия пласта используются различные способы: гидropескоструйная перфорация, химическая перфорация, сверлильные, пулевые, торпедные и аккумуляционные системы перфорации.

При гидropескоструйном перфорировании в скважине, обсадной колонне и цементном камне образуются крупные отверстия, а в скелете породы широкие каверны, форма и размер которых зависят от прочности горной породы и скорости струи, при этом сама возникающая каверна заполняется песком [1]. При химическом методе перфорации вскрытие пласта происходит за счет кислотного воздействия: обсадная колонна еще на поверхности просверливается и отверстия закупориваются пробками, которые на забое разрушаются при обработке кислотой. Существуют и модифицированные методы – кумулятивно-химические, сочетающие закачку активных химических агентов и использование энергии зарядов *взрывчатых веществ* (ВВ) [2]. Механические типы воздействия основаны на использовании сверлильных, пулевых и снарядных инструментов. При использовании сверлильных перфораторов размеры полученных отверстий ограничены выходом сверла и его диаметром [3]. Положительным фактором является отсутствие уплотнения породы вокруг перфорационного канала.

Пулевые, торпедные и коммуляционные методы считаются наиболее эффективными и относятся к группе взрывных методов перфорации: используется энергия разложения ВВ, запускается процесс с помощью детонатора [4–5]. При пулевой перфорации происходит пробой обсадной колонны, цементного камня и образуется в породе перфорационный канал длиной до 200 мм и диаметром около 12 мм. При торпедной перфорации используются разрывные снаряды диаметром 32 или 22 мм, снаряд заходит в горную породу на глубину около 160 мм, где взрывается с образованием системы трещин.

При кумулятивной перфорации образование канала происходит за счет энергии газовой струи, сфокусированной благодаря специальной форме металлического корпуса снаряда. При подрыве ВВ с помощью детонатора образуется высокоскоростная и высокотемпературная газометаллическая струя, которая пробивает металл обсадной колонны, цементный камень вокруг трубы и создает протяженный канал (до 750 мм). Отрицательный момент заключается в образовании «корки спекания» вокруг канала, частично разрушить которую и создать систему трещин можно за счет интерференции струй при использовании нескольких снарядов [6].

Во многом интенсивность притока к скважине на начальном этапе разработки месторождения определяется именно качеством установленной связи с продуктивным пластом за счет создания протяженных перфорационных каналов с сеткой трещин. При этом наиболее эффективными признаны методы вскрытия пласта с использованием энергии ВВ. Энергия разложения ВВ используется и на последующих этапах разработки для стимуляции притока. Эффективность первичного и вторичного вскрытия существенно зависит от геологических особенностей строения месторождения, фильтрационно-емкостных свойств пласта-коллектора, минерального фракционного (гранулометрического) состава, упругости и прочности минеральной матрицы коллектора, а также от самой технологической схемы первичной разработки. Качество вскрытия существенно зависит от выбора способа перфорирования, устройства перфоратора, формы оболочки снаряда, компоновки снарядов, типа ВВ [7].

Для анализа лабораторных и промысловых экспериментов авторами созданы несколько типов математических моделей. Первая дает возможность рассчитать параметры кумулятивной струи, создающей перфорационный канал в бетонном кольце вокруг скважины и породе, а также сетку трещин в пористом скелете [8]. Вторая фильтрационная модель используется для расчета более позднего этапа стимулирования притока с использованием энергии ВВ [9].

Интерес к созданию симуляторов процесса перфорирования связан с тем, что численное моделирование позволяет оптимизировать процесс вскрытия пласта-коллектора путем подбора типа ВВ, конструкции перфоратора с учетом геометрии расположения зарядов, оценить влияние динамической депрессии с целью повышения качества процесса перфорирования и улучшения гидродинамической связи между продуктивным пластом и скважиной. Моделирование использования водных растворов ВВ (метод термогазохимического воздействия на пласт) на более поздних этапах разработки дает возможность оптимизировать технологию добычи и повысить коэффициент извлечения нефти [10–12].

В работе рассмотрен процесс инициирования разложения ВВ в оболочке кумулятивного заряда с последующей деформацией и разрушением корпуса заряда, возникновением кумулятивной струи, проникающей через слои нескольких металлических поверхностей (элемента поверхности корпуса перфоратора и стенки обсадной колонны скважины), с образованием перфорационного канала в бетонном кольце вокруг скважины и в пластовой породе. Под действием кумулятивной струи в призабойной зоне возникает несколько зон различной проницаемости, в том числе свободный канал, уплотненная узкая зона вокруг основного канала и область дополнительной трещиноватости на периферии канала. Длина перфорационного канала, его диаметр и размер зоны трещиноватости меняются в зависимости от типа и физических характеристик породы, параметров кумулятивного заряда, а также типа перфоратора и геометрии расположения зарядов [13].

На начальном этапе проводилось детальное изучение лабораторных испытаний одиночных и спаренных кумулятивных зарядов [7–8] и анализ результатов по исследованию зоны повреждения, размеров перфорационного канала, заполнения перфорационных каналов продуктами взрыва и твердыми частицами (за счет разрушения оболочки заряда, цементного камня и породы). Испытательный стенд представлял из себя коммулятивный снаряд в сборе (или два снаряда), установленный на многослойную мишень из нескольких металлических стальных пластин и бетонной преграды, имитирующих корпус перфоратора, стенку обсадной колонны и горную породу.

Анализ рентгеновских (томографических) снимков бетонной мишени показал, во-первых, наличие узкой уплотненной области сниженной проницаемости («корки спекания»), прилегающей к «конусу» перфорационного канала, толщина которой уменьшается к носику канала, во-вторых, наличие сетки трещин на периферии вокруг перфорационного канала. Эксперимент также показал, что использование пары близкорасположенных зарядов частично разрушает область уплотнения за счет интерференции ударных волн в зоне взаимодействия зарядов и способствует образованию дополнительной сетки трещин между перфорационными каналами, что приводит к улучшению фильтрационных характеристик в интервале перфорации [8].

Математическое моделирование процесса активации заряда ВВ, возникновения высокотемпературной газовой струи с последующим прониканием кумулятивной струи в комбинированную преграду позволяет оптимизировать форму пиропатрона, геометрию расположения нескольких зарядов, конструкцию самого перфоратора, оценить влияние динамической депрессии, что в конечном итоге дает возможность улучшить качество перфорирования и повысить гидродинамическую связь между продуктивным пластом и скважиной. Математическая модель представляет из себя систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [14], описывающих нестационарный процесс разложения твердого ВВ, образования газовой струи и динамического нагружения конструкций с учетом влияния различных факторов (геологических и гидромеханических) [15–16].

В последние годы решение широкого класса задач нестационарной динамики упруго-пластических сред в значительной мере определяется достигнутыми результатами в области компьютерного моделирования различных процессов и физических явлений [8, 17–18]. Известно, что при высокоскоростном нагружении многие материалы проявляют как упругие, так

и пластические свойства. При математическом моделировании высокоскоростного нагружения такого рода материалов целесообразно применять модель повреждаемой упругопластической среды. Для разработки методики численного решения двумерных нестационарных задач динамического нагружения конструкций была выбрана двумерная конечно-разностная схема сквозного счета. Эта схема основана на модифицированной схеме Уилкинса, имеет 2-й порядок точности по пространству и по времени [14]. Исходная система уравнений представлена таким образом, что описывает с единых позиций упругую, упругопластическую и гидродинамическую стадии движения среды [19–20].

Основные уравнения. Будем рассматривать пласт, латеральная плоскость (направление напластования) которого перпендикулярна к оси скважины, пласт считаем изотропным. Напряженное состояние пласта в прискважинной зоне определяется естественным горным давлением и гидродинамическим пластовым давлением. Внутри скважины находится стандартный кумуляционный перфоратор с помещенными в него пиропатронами (рис. 1), расположенными радиально. В реальности корпус перфоратора помещается в скважину, заполненную буровой жидкостью. В данном расчете, моделирующем лабораторный эксперимент, полагаем, что ось пиропатрона перпендикулярна к стенке скважины. Целью исследования является моделирование процесса преобразования твердого ВВ (рис. 1) в продукты детонации, развитие детонации, образование высокотемпературной газовой струи, пробивание слоя металла и образование канала в цементном камне.

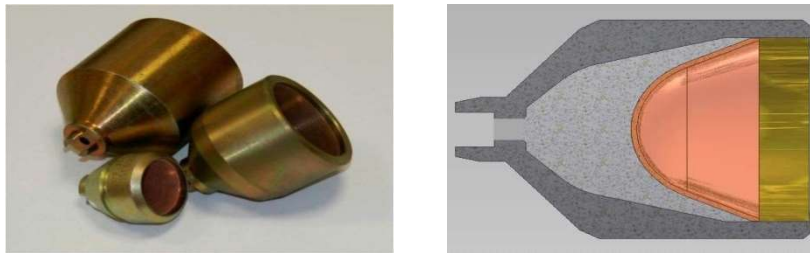


Рис. 1. Схематическое изображение пиропатрона (слева), фотография оболочек зарядов (справа)

В работе приняты следующие допущения:

- массовыми силами пренебрегается;
- параметры задачи не зависят от пространственной координаты, нормальной к плоскости пласта;
- предполагается плоская деформация пласта,
- задача решается в двумерной постановке;
- пласт моделируется повреждаемой термоупруго-пластической средой;
- процесс деформирования считается адиабатическим.

Систему определяющих уравнений, с учетом принятых допущений можно записать в двумерной цилиндрической системе координат в виде законов сохранения массы (1), количества движения (2)–(3) и энергии (4):

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} + \alpha \frac{u}{r} \right], \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial S_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} + \alpha \frac{S_{rr} - S_{\theta\theta}}{r} - \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (2)$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial S_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} + \alpha \frac{S_{rz}}{r} - \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (3)$$

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \left[S_{rr} \frac{\partial u}{\partial r} + S_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} + \alpha S_{\theta\theta} \frac{u}{r} + S_{rz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right], \quad (4)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial t} &= u, \frac{\partial S_{rr}}{\partial t} = 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{3\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial r}{\partial t} &= w, \frac{\partial S_{zz}}{\partial t} = 2\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{3\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial S_{\theta\theta}}{\partial t} &= 2\mu \left(\alpha \frac{u}{r} + \frac{1}{3\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right), \frac{\partial S_{rz}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right),\end{aligned}$$

здесь ρ – плотность среды, u , w – компоненты вектора скорости, t – время, E – удельная внутренняя энергия, S – компоненты девиатора тензора напряжений. Тензор напряжения представлен в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= -P\delta_{ij} + S_{ij}, (i = 1, 2, j = 1, 2) \\ P &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii}.\end{aligned}$$

Параметр $\alpha = 0$ соответствует плоскому деформированному состоянию, $\alpha = 1$ – осесимметричному.

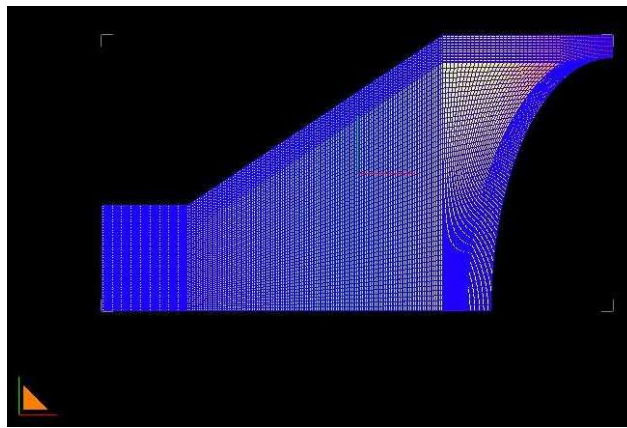


Рис. 2. Расчетная сетка 1, построенная с учетом критериев качества

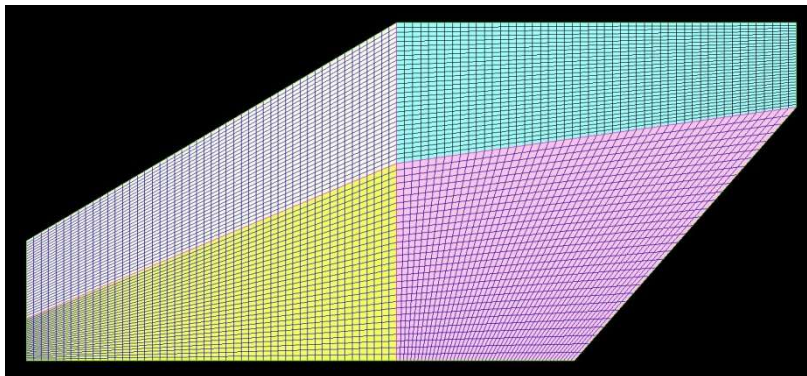


Рис. 3. Расчетная сетка 2, построенная с учетом критериев качества

В расчетах используется модель пластического течения Мизеса, т. е. второй инвариант девиатора тензора напряжений в области пластичности удовлетворяет условию текучести Мизеса [14] :

$$S_{rr}^2 + S_{zz}^2 + S_{\theta\theta}^2 + S_{rz}^2 \leq \frac{2}{3} Y_0^2 \quad (5)$$

В работе используется несколько разных уравнений состояния для давления в форме ударной адиабаты, Ми-Грюнайзена и т. д. для различных материалов. Один из типов уравнения состояния приведен в уравнении:

$$P = a_1(\eta - 1) + a_2(\eta - 1)^2 + a_3(\eta - 1)^3 + a_4\eta E, \quad (6)$$

здесь $\eta = \rho/\rho_0$, ρ_0 – начальная плотность.

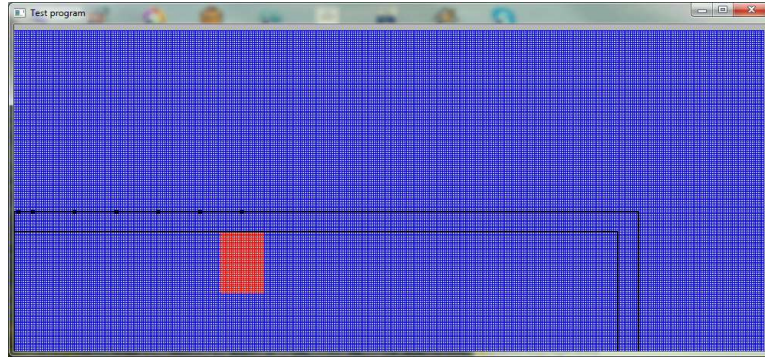


Рис. 4. Красным цветом показана начальная форма заряда ВВ

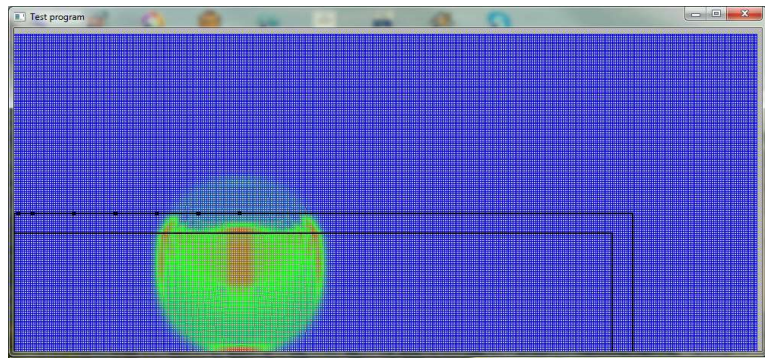


Рис. 5. Распространение ударной волны в буровом растворе и в стальной стенке скважины в момент времени $t = 5,29$ мс

Построение сетки. Для решения задач математического моделирования большую роль играет оптимальное распределение узлов вычислительной сетки. Кроме того, известно, что распределение граничных и внутренних узлов сетки зачастую влияет на ее сходимость [21]. Таким образом, построение хороших расчетных сеток является актуальной задачей. В данной работе используется программа построения четырехугольной лагранжевой сетки [16]. Качество расчетной сетки определяется с помощью нескольких параметров. Для четырехугольной сетки будем оценивать отношение минимального значения определителя матрицы Якоби, вычисленного для каждого элемента, к максимальному элементу [22]. Кроме того, будем оценивать меру скошенности – отклонения от идеального угла:

$$q_e = \max[(\alpha_{\max} - \alpha_n)/\alpha_n, (\alpha_n - \alpha_{\min}/\alpha_n)],$$

где $\alpha_{\max}, \alpha_{\min}$ – максимальный и минимальный углы ячейки ($n = 1$ для треугольной и $n = 2$ для четырехугольной ячеек, соответственно $\alpha_1 = 60, \alpha_1 = 90$). Меры гладкости, характеризующей изменение размеров соседних ячеек, вычисляются по формуле:

$$q_e = \max_i \frac{s}{s_i},$$

где S – площадь ячейки; S_i – площади соседних ячеек.

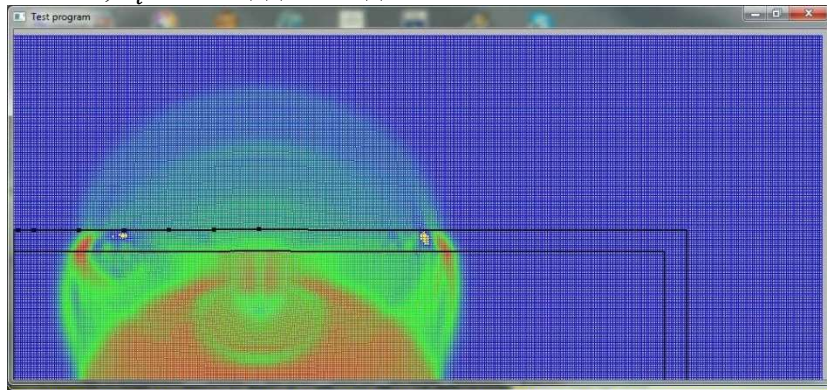


Рис. 6. Распространение ударной волны в буровом растворе и в стальной стенке скважины в момент времени $t = 20,21$ мс

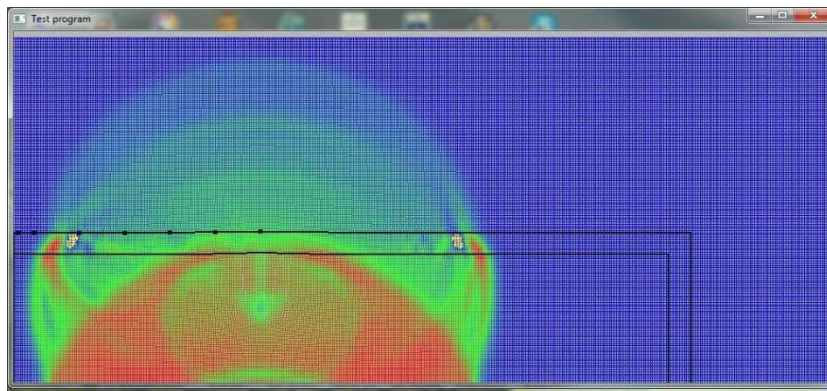


Рис. 7. Распространение ударной волны в буровом растворе и в стальной стенке скважины в момент времени $t = 30,5$ мс

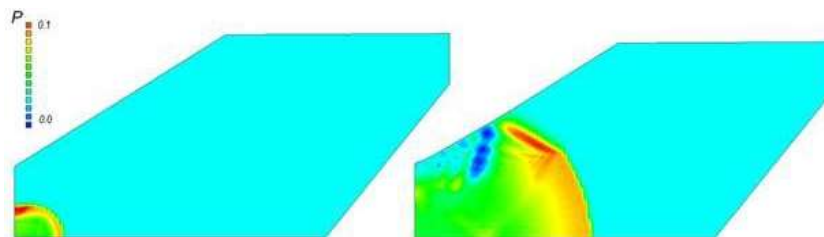


Рис. 8. Распространение детонационной волны в моменты времени $t = 5,87$ и $t = 50,29$ мс

Были проведены исследования отношения длин максимального и минимального ребра ячеек. Считается, что сетки хорошего качества должны иметь ячейки с мерой скошенности равной 0,25–0,5. Мера гладкости должна быть не больше 30. На рис. 2, 3 приведены две такие сетки.

Численный метод решения. Рассматриваемая задача решается численно методом типа Уилкинса [14]. Моделирование макроразрушения пласта осуществляется путем расщепления лагранжевой расчетной сетки. В качестве критерия начала макроразрушения используется энтропийный критерий разрушения: среда теряет сплошность тогда, когда удельная диссипация D достигла предельной величины D^* . В точке среды, в которой выполнен критерий разрушения, осуществляется явное построение берегов разрыва. Для этого производится разделение узлов расчетной сетки по границам ячеек – внутренние узлы и соответствующие им ребра ячеек становятся граничными, на которых задаются условия свободной поверхности, определенное давление или контактные условия в зависимости от

ситуации.

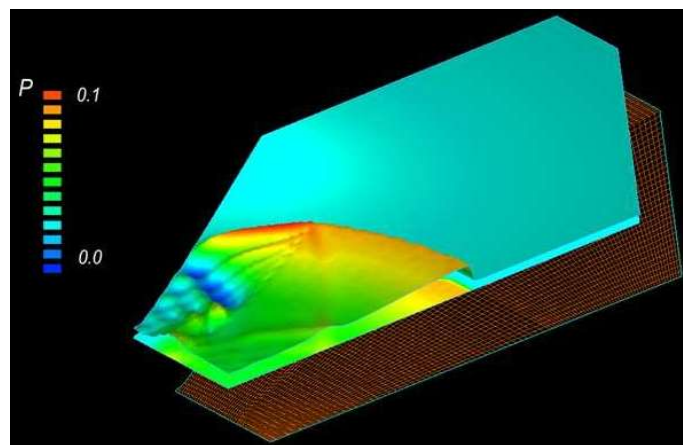


Рис. 9. Горельеф распределения давления P в момент времени $t = 50,29$ мс

Основные результаты. Ниже приведены результаты математического моделирования воздействия детонационного направленного взрыва на стенку скважины. Стенка скважины выполнена из стали, с наружной стороны стенки – трехкомпонентная среда, состоящая из пористого скелета, жидкости и воздуха. На рис. 3–6 приведены результаты моделирования взрыва безоболочечного заряда ВВ около стенки скважины в различные моменты времени. Внутри скважины ударная волна распространяется по буровому раствору. По материалу стальной трубы тоже распространяется фронт ударной волны, происходит деформация стенки скважины. Это приводит к распространению в нефтеносном слое сферической волны нагрузки. На первом этапе расчетов полагаем, что фильтрационного течения в самом насыщенном пласте нет, и рассматриваем собственно процесс деформации стенки скважины.

На рис. 8 показан процесс начала распространения детонационной волны в пиропатроне конструкции рис. 3. Этот же процесс представлен в виде горельефа давления на момент времени $t = 50,29$ мс (рис. 9). По ВВ внутри пиропатрона распространяется фронт детонационной волны. Он инициализирует фронт волны сильной нагрузки, которая с меньшей скоростью движется в стальной оболочке. На рис. 9 виден излом фронта волны, который соответствует границе раздела двух сред. В оболочке из стали наблюдаются волны разгрузки, которые формируются на ее свободной поверхности.

В расчетах использовались следующие значения определяющих констант для материала конструкции из стали:

$$\rho_0 = 7,85 \text{ г/см}^3, \mu_0 = 0,77 \text{ Мбар}, Y_0 = 0,0034 \text{ Мбар}, Y_{\max} = 0,025 \text{ Мбар}^{-1}, T_{m0} = 2380 \text{ К}, \\ \beta = 4,3, b = 0,26 \text{ Мбар}^{-1}, n = 0,35, h = 0,45, k_1 = 1,648, k_2 = 3,124, k_3 = 5,649, \gamma_0 = 2,17.$$

Для взрывчатого вещества были приняты следующие значения констант:

$$\text{TNT: } \rho_0 = 1,72 \text{ г/см}^3, C = 0,19, \gamma = 3,0, A = 0,033, \gamma = 3,27, A_1 = 0,0291, B = 0,021, \gamma_1 = 0,327, \\ \eta = 1,25$$

Данная работа была выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований №18-07-01303 А.

Литература

1. Крысин Н. И., Рябоконь Е. П., Турбаков М. С., Чернышов С. Е., Щербаков А. А. Совершенствование устройств щелевой гидропескоструйной перфорации в нефтяных скважинах // Нефт. хоз-во. 2016. № 8. С. 129–131.
2. Гайдар С. М., Жигарев В. Д., Алимов В. В., Посунько И. А. Расчет термодинамических характеристик процесса разрушения нефтеносных пластов при кумулятивно-химическом

вскрытии // Технологии нефти и газа. 2017. № 3 (110). С. 45–51.

3. Галухин А. С., Шальская С. В. Обоснование вскрытия продуктивного пласта путем гидropескоструйной перфорации на новодавыдовском месторождении // Наука. Техника. Технологии: политех. вестн. 2018. № 1. С. 86–100.

4. Гайворонский И. Н., Костицын В. И., Савич А. Д., Черных И. А., Шумилов А. В. Повышение эффективности вторичного вскрытия продуктивных пластов // Нефт. хоз-во. 2016. № 10. С. 62–65.

5. Железников И. С., Снарев А. И. Кумулятивно-торпедный перфоратор // Нефтегазовый комплекс: проблемы и инновации : тез. науч.-практич. конф. с междунар. участием ; под ред. В. К. Тян. Самара : Изд-во СГУ, 2016. С. 113.

6. Способ вскрытия пласта кумулятивными зарядами : пат. 2493357 РФ Е21В 43/117; заявл. 04.12.2012 ; опубл. 20.09.2013. Бюл. № 26.3. 3 с.

7. Василенко И. Р., Зинченко О. Д., Исаев В. И., Шепель К. Ю. Экспериментальная оценка воздействия кумулятивной перфорации на армированную модель крепи скважины // Оборудование и технологии для нефтегаз. комплекса. 2015. № 2. С. 44–52.

8. Рыбакин Б. П., Смирнов Н. Н., Тычинин П. Н., Кравченко М. Н. Шепель К. Ю., Исаев В. И. Моделирование вскрытия пласта с использованием кумулятивных зарядов // Математика и информационные технологии в нефтегазовом комплексе : тез. докл. Междунар. конф. 16–20 мая 2016 г. Сургут : ИЦ СурГУ, 2016. С. 97–98.

9. Кравченко М. Н., Мурадов А. В., Диева Н. Н., Перехожев Ф. А. Сравнительный анализ применения методов ВПГ и ТГХВ на пластах баженовской свиты на базе математического моделирования // Neftegaz.ru. : деловой журн. 2018. № 3. С. 62–69.

10. Кушнир Д. Ю., Бочаров О. Б. Сравнение продуктивности различных систем перфорационных каналов на основе математического моделирования // Геология, геофизика и разработка нефтяных и газовых месторождений. 2013. № 12. С. 44–50.

11. Вольпин С. Г., Сайтгареев А. Р., Корнаева Д. А., Смирнов Н. Н., Кравченко М. Н., Диева Н. Н. Перспективы применения волновой технологии термогазохимического воздействия для повышения нефтеотдачи пластов // Нефт. хоз-во. 2014. № 1. С. 62–66.

12. Кравченко М. Н., Дмитриев Н. М., Мурадов А. В., Диева Н. Н., Герасимов В. В. Инновационные методы разработки керогеносодержащих коллекторов, стимулирующие нефтегенерационный потенциал // Георесурсы. 2016. Т. 18. № 4. С. 330–336.

13. Ликутов А. Р., Шепель К. Ю. Перспективное оборудование для вскрытия нефтегазового пласта // Каротажник. 2016. № 266 (8). С. 79–84.

14. Wilkins M. L. Computer Simulation of Dynamic Phenomena. Springer, 1999. 264 p.

15. Lugovoi P. Z., Meish V. F., Rybakin B. P., Sekrieru G. V. Dynamics of reinforced compound shells under nonstationary loads // International Applied Mechanics. Springer. 2006. V. 42. №. 4. P. 455–460.

16. Lugovoi P. Z., Meish V. F., Rybakin B. P., Sekrieru G. V. Numerical simulation of the dynamics of a reinforced shell subject to nonstationary load // International Applied Mechanics. Springer. 2008. V. 44. №. 7. P. 788–793.

17. Исаев В. И., Ликутов А. Р., Василенко И. Р., Шепель К. Ю. Способ вскрытия пласта и испытания моделей крепи скважины // Вестн. Ассоц. буровых подрядчиков. 2015. № 2. С. 7–12.

18. Кушнир Д. Ю., Бочаров О. Б. Анализ схем перфорации слоистого пласта на основе математического моделирования // Геология, геофизика и разработка нефтяных и газовых месторождений. 2013. № 7. С. 16–21.

19. Rybakin B. Mathematical simulation of high speed loading high-strength gradient materials // Gas and Wave Dynamics : Subsection. Lomonosov readings. Book of abstracts of scientific conference, April, 2014. Moscow : Publishing House of the Moscow University, 2014. P. 36–37.

20. Rybakin B., Bogatencov P., Secrieru G., Gutuleac E. Application of HPC technologies for mathematical modeling of seismic impact on underground structures // The Third Conference of

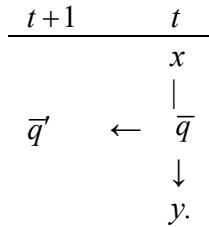
Mathematical Society of the Republic of Moldova. August, 19–23, 2014. Chisinau : Institute of Mathematics and Computer Science, Academy of Sciences of Moldova, 2014. P. 406–409.

21. Коротков А. А., Первичко В. А., Плотникова И. Г., Чуданов В. В. Метод построения ортогональных сеток на плоскости, на гладкой трехмерной поверхности : препринт / Ин-т проблем безопасности развития атом. энергетики РАН. М. : ИБРАЭ РАН, 2006. 47 с.

22. Молчанов А. М., Щербаков М. А., Янышев Д. С., Куприков М. Ю., Быков Л. В. Построение сеток в задачах авиационной и космической техники : учеб. пособие. М. : МАИ, 2013. 260 с.

ших разрядах ...000 изображаем символом $\bar{0}$, так что ...000 = $\bar{0}$ и ...00752 = $\bar{0}752$. В вычислениях, реализуемых абстрактными вычислительными устройствами (АВУ) [4], символ $\bar{0}$ играет важную роль. Следует подчеркнуть, что на сетке Gr^0 только натуральные числа имеют представление с $\bar{0}$: $[\bar{n} \in N_0] \leftrightarrow [\bar{n} = \bar{0}n_{r-1} \dots n_1 n_0, n_i \in Z_{(10)}, (i = 0, 1, \dots, r-1)]$. Если вместо $\bar{0}$ стоит иная комбинация знаков, например, $\bar{1}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{75}, \dots$, то такой числоид не представляет натурального числа (заметим, что при общем изображении чисел и числоидов используется черточка наверху: $\bar{n}, \bar{q}, \bar{x}, \dots$; цифры изображаются без черточек: $x, y, \dots$).

Множество числоидов, представляющих натуральные числа, порождается из числоида $\bar{0}$ регулярным образом с помощью автомата сдвига S , представленного в десятичной системе счисления (табл. 1). Множество состояний Q автомата состоит из двух элементов: $Q = \{\bar{0}, \bar{0}1\}$. Входной (X) и выходной (Y) алфавиты автомата совпадают с множеством цифр системы счисления: $X = Y = Z_{(10)}$. Входной алфавит автомата содержится в левом обрамляющем столбце таблицы, правда, буквы этого алфавита (= цифры) снабжены дополнительно стрелками, учитывающими возможность подачи на вход автомата не только отдельных цифр, но и цифровых массивов типа $\bar{0}$. В верхней обрамляющей строке находятся состояния автомата. На пересечении строки, отмеченной буквой x входного алфавита и столбца, отмеченного состоянием $\bar{q}$, находится пара вида $\bar{q}', y$, где первый элемент $\bar{q}'$ показывает то состояние, в которое переходит автомат в следующий момент времени, а второй ее элемент y указывает на тот выходной сигнал, который вырабатывается в текущий момент времени. Это словесное описание функционирования автомата может быть изображено диаграммой, показывающей как происходит процесс вычисления в каждый отдельный момент времени t :



Совокупность таких диаграмм, упорядоченных во времени, образует *развертку* во времени работы автомата.

Таблица 1

Автомат сдвига S

$\bar{q} \backslash x$	$\bar{0}$	$\bar{0}1$
$\bar{0}$	$\bar{0}, \bar{0}$	$\bar{0}, 1$
$\bar{1}$	$\bar{0}, \bar{1}$	$\bar{0}, 2$
$\bar{2}$	$\bar{0}, \bar{2}$	$\bar{0}, 3$
$\bar{3}$	$\bar{0}, \bar{3}$	$\bar{0}, 4$
$\bar{4}$	$\bar{0}, \bar{4}$	$\bar{0}, 5$
$\bar{5}$	$\bar{0}, \bar{5}$	$\bar{0}, 6$
$\bar{6}$	$\bar{0}, \bar{6}$	$\bar{0}, 7$
$\bar{7}$	$\bar{0}, \bar{7}$	$\bar{0}, 8$
$\bar{8}$	$\bar{0}, \bar{8}$	$\bar{0}, 9$
$\bar{9}$	$\bar{0}, \bar{9}$	$\bar{0}1, \bar{0}$

Приведем пример порождения непосредственно следующего натурального числа с помощью автомата сдвига.

Пример 1. Пусть $\bar{n} = \bar{0}745$. Пропустим этот числоид через автомат сдвига S . За процессом вычисления проследим с помощью развертки, позволяющей пошагово следить за работой устройства. Развертка такова:

0		$\infty > t \geq 3$	2	1	0	t
		$\bar{0}$	7	4	5	x
		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
$\bar{0}$	$\leftarrow$	$\bar{0}$	$\leftarrow$	$\bar{0}$	$\leftarrow$	$\bar{0}1$
		$\bar{0}$	7	4	6	y

Пишем результат: $\bar{0}745 S | \bar{0}1 = \bar{0} | \bar{0}746$. Читаем результат: автомат сдвига S , поставленный в начальное состояние $\bar{q} = \bar{0}1$ (стоит справа от вертикальной черты), при подаче на его вход числа $\bar{0}745$ переходит в состояние $\bar{q}' = \bar{0}$ (стоит слева от вертикальной черты) и вырабатывает число $\bar{0}746$. Таким образом, автомат сдвига S обнаруживает, что числом, непосредственно следующим за числом $\bar{0}745$, является число $\bar{0}746$.

Обратим внимание, что для обнаружения этого факта нам не потребовались никакие операции более высокого ранга, чем операция сдвига, т. е. упорядочивание множества натуральных чисел происходит с помощью автомата сдвига, автомата самого низкого уровня. Следовательно, упорядоченные структуры также относятся к первичным структурам.

Из примера видно, что автомат сдвига *определяет* и *реализует* отношение *непосредственного следования* на множестве натуральных чисел. По терминологии Пеано, он выступает как *оператор-последователь*.

Заметим, что переход к непосредственно следующему числу происходит только тогда, когда автомат сдвига ставится в начальное состояние $\bar{q} = \bar{0}1$, что изображается записью: $\bar{n} \prec \bar{n} S | \bar{0}1$, где справа от значка $\prec$ стоит число, непосредственно следующее за $\bar{n}$. Если за начальное состояние брать состояние $\bar{q} = \bar{0}$, то автомат осуществит тождественное отображение: $\bar{n} S | \bar{0} = \bar{0} | \bar{n}$.

В дальнейшем будут использоваться три соотношения, рассмотренные в [5].

Первое соотношение имеет вид:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 10^n = 10^\infty. \quad (1)$$

Оно является определяющим и *определяет* элемент 10^∞ , являющийся идеальным по отношению к последовательности элементов $\{10^n\}$, ($n = 0, 1, 2, \dots$). Элемент 10^n этой последовательности изображается единицей в разряде n на сетке $Gr^0: Gr^0 \equiv \underbrace{\dots \frac{1}{n} \dots \bar{2} \bar{1} \bar{0}}_{Gr^0(10^0)}$. При $n \rightarrow \infty$ эта

единица перемещается влево, в сторону роста разрядов, и при мысленном завершении процесса (т. е. при актуализации) выходит за пределы сетки Gr^0 , оказывается в нулевом разряде следующей разрядной сетки Gr^1 , места которой имеют общий вес, равный 10^∞ . Это соответствует картинке: $\underbrace{\dots \bar{n} \dots \bar{2} \bar{1} \bar{0}}_{Gr^1(10^\infty)} \parallel \underbrace{\dots \bar{n} \dots \bar{2} \bar{1} \bar{0}}_{Gr^0(10^0)}$, показывающей расположение единицы после завершения

предельного перехода на сетке Gr^0 . Две вертикальные черты – это границы раздела двух

соседних разрядных сеток Gr^0 и Gr^1 . Единица, стоящая на нулевом месте сетки Gr^1 и являющаяся результатом предельного перехода, изображает число 10^∞ , имеющее смысл на этой сетке. Так истолковывается соотношение (1).

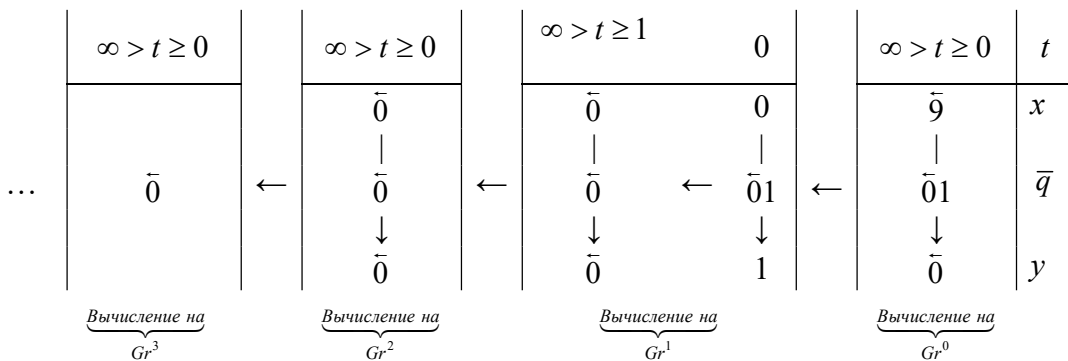
Приведенная выше картинка индуцирует представление об *обобщенной разрядной сетке*, по-другому говоря, о *гиперсетке*, модель которой такова:

$$Gr \equiv \dots \parallel \underbrace{\dots \overline{3} \overline{2} \overline{1} \overline{0}}_{Gr^2(10^{2^\infty})} \parallel \underbrace{\dots \overline{3} \overline{2} \overline{1} \overline{0}}_{Gr^1(10^{1^\infty})} \parallel \underbrace{\dots \overline{3} \overline{2} \overline{1} \overline{0}}_{Gr^0(10^0)} \parallel,$$

где сетка $Gr^1(10^{1^\infty})$ представляет мир бесконечно больших величин первого порядка, сетка $Gr^2(10^{2^\infty})$ – мир бесконечно больших величин второго порядка и т. д. Сетка Gr есть не что иное как шкала бесконечностей, представленная с помощью разрядных сеток $Gr^p(10^{p^\infty})$, ($p = 0, 1, 2, \dots$) различных весов.

Проследим за работой автомата сдвига на сетках. На сетке Gr^0 среди r -разрядных чисел вида $n = \dots 000 \underbrace{n_{r-1} \dots n_2 n_1 n_0}_{r \text{ раз}} = \bar{0} n_{r-1} \dots n_2 n_1 n_0$, где $n_i \in Z_{(10)} = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ – цифры десятичной системы счисления, достижимыми являются все числа и, в частности, последнее из них, число $\bar{0} \underbrace{9 \dots 999}_{r \text{ раз}}$. Устремляя r к бесконечности, получим результат: $\dots 9 \dots 999 = \bar{9}$. Этот числоид запол-

няет девятками все места разрядной сетки Gr^0 : $Gr^0 \equiv \dots \frac{9}{n} \dots \frac{9}{2} \frac{9}{1} \frac{9}{0}$. Но он не может быть достигнут автоматом сдвига ни за какое конечное время. Только за время равное бесконечности. Это является реальной преградой, непреодолимой никаким устройством, созданным человеком. Однако прыжок к бесконечности можно вообразить мыслью, на что человек способен. В этой работе воображения заключается процедура актуализации бесконечности. Таким образом, процедура актуализации бесконечности оторвана от вычислительного устройства, находится вне его. Но мы, владея ею, приписываем вычислительному устройству дополнительные свойства. Мы переносим наши мыслительные способности на автомат сдвига и помогаем ему *завершить* построение множества натуральных чисел и на этом основании писать: $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ и говорить о множестве N_0 как об отдельном объекте, подчеркивая (следуя Кантору) его объектную сущность. Таким образом, допуская с помощью актуализации существование на разрядной сетке Gr^0 числоида $\dots 9 \dots 999 = \bar{9}$ как результата предельного перехода, завершающего процесс порождения натуральных чисел, мы можем поставить вопрос о продолжении вычислений с помощью автомата сдвига. Итак, мы хотим узнать, может ли автомат сдвига провести вычисление с числоидом $\bar{9}$ и, если может, то каков результат такого вычисления. Это рубежный момент, т. к. результат связан с переходом в следующую разрядную сетку. Изображаем развертку, отражающую процесс соответствующего вычисления.



Записываем результат вычисления автоматом сдвига при подаче на его вход числоида $\bar{9}$:

$$\dots \parallel \bar{0} \parallel_{Gr^2} \parallel \bar{0} \parallel_{Gr^1} \parallel \bar{9} \parallel_{Gr^0} \parallel S \mid \bar{0}1 = \dots \parallel \bar{0} \parallel_{Gr^2} \parallel \bar{0}1 \parallel_{Gr^1} \parallel \bar{0} \parallel_{Gr^0},$$

и читаем: если на вход автомата сдвига подан числоид $\bar{9}$, записанный на сетке Gr^0 , то результатом вычисления будет гиперчислоид, содержащий числоид $\bar{0}$ на сетке Gr^0 , числоид $\bar{0}1$ на сетке Gr^1 , числоид $\bar{0}$ на сетке Gr^2 и т. д.

Привлекает к себе внимание часть вычисления, расположенная на «нашей» сетке Gr^0 , поскольку в реальной жизни мы пользуемся только информацией на сетке Gr^0 . Мир бесконечно больших и бесконечно малых величин интересен лишь в научных рассмотрениях и реально нам не доступен. Результат на сетке Gr^0 таков:

$$\parallel \bar{9} \parallel_{Gr^0} \parallel S \mid \bar{0}1 = \parallel \bar{0} \parallel_{Gr^0}.$$

Это означает, что, если ограничиться рассмотрениями на сетке Gr^0 , то числоид $\bar{9}$ является непосредственно предшествующим по отношению к числоиду $\bar{0}$, т. е. к нулю, что может быть записано формулой: $\bar{9}S \mid \bar{0}1 \prec \bar{0}$ или кратко $\bar{9} \prec \bar{0}$. Следовательно, $\bar{9}$ играет роль минус единицы, что позволяет записать представительское равенство: $\bar{9} = -1$. Во всех расчетах, не выходящих за пределы сетки Gr^0 , при замене (-1) на $\bar{9}$ будут получаться правильные результаты. Например, $\bar{0}78 + \bar{9} = \bar{0}77$.

Приведенная выше развертка показывает, что автомат сдвига ведет вычисления на всей гиперсетке, правда, вычисления на разных участках развертки различны по своему характеру: при вычислениях внутри любой разрядной сетки он ведет вычисления регулярным образом, шагая от разряда к разряду, и только на стыках между соседними разрядными сетками в дело включается еще одна операция – актуализация. Актуализация позволяет завершить вычисление на каждой отдельной разрядной сетке. Без нее вычисление на сетке не могло бы быть завершено. Но актуализация – чисто мыслительный процесс, однако, материально реализуемый не только мыслящим существом, но и материальными устройствами. Именно благодаря возможности материальной реализации актуализации бесконечности существуют материальные объекты типа $\bar{0}$, $\bar{9}$, а также вышеприведенная развертка. Тем самым актуализация реально принимает участие в вычислениях с бесконечностями. Обратим внимание, что актуализация принимает участие в процессе вычисления на каждой отдельной разрядной сетке в момент, завершающий вычисление, условно говоря, при $t = \infty$. В этот момент происходит перенос информации в соседнюю разрядную сетку. Это вполне аналогично переходу в следующий разряд при регулярных вычислениях автомата сдвига внутри сетки. В самом деле, *в пределах одного разряда* автомат сдвига постепенно поднимает цифры от 0 до 9, после чего происходит перескок в следующий разряд, при этом в текущем разряде девятка переходит в 0, а в следующем разряде появляется единица (если в нем ранее был 0). Аналогично этому *на всей разрядной сетке* автомат сдвига добирается с помощью актуализации до $\bar{9}$ и в следующий момент времени происходит перескок: на всей разрядной сетке появляется $\bar{0}$, а в соседней разрядной сетке появляется единица $\bar{0}1$. Числоид $\bar{9}$, завершающий работу автомата сдвига на *разрядной сетке*, вполне аналогичен 9, завершающей процесс роста цифр в пределах одного *разряда*. Аналогия совершенно очевидна. В силу этой аналогии ситуацию, имеющую место в момент перехода из разряда в разряд, тоже можно назвать актуализацией, но актуализацией нулевого порядка. Актуализацию же, имеющую место при переходе от одной разрядной сетки к следующей, можно назвать актуализацией первого порядка. Но на этом актуализации не заканчиваются. Далее идет актуализация второго порядка, когда появляется объект $\bar{\bar{9}}$ и происходит переход к гипергиперсетке и т. д.

Итак, можно говорить об актуализациях различных порядков: актуализация⁰, актуализация¹, актуализация², и т. д., а также гиперсетках различных порядков: гиперсетка порядка ноль – это разрядная сетка Gr^0 , т. е. гиперсетка⁰ = разрядная сетка; гиперсетка порядка один – это определенная нами ранее обобщенная разрядная сетка; настоящая гиперсетка, т. е. гиперсетка¹ = гиперсетка; гиперсетка порядка два – это гипергиперсетка, т. е. гиперсетка² = гипергиперсетка и т. д.

Второе соотношение, с которым мы будем встречаться, вытекает из вышесказанного и имеет вид:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \bar{9} \quad (3)$$

Оно отражает работу автомата сдвига по порождению натуральных чисел на сетке Gr^0 в момент актуализации.

Приведенная развертка является источником еще одного понятия – понятия *гипервремени*. Гипервремя пронизывает всю обобщенную разрядную сетку и задается формулой:

$$t = t_i + i \cdot \infty, \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

При $i = 0$ получается время на сетке Gr^0 , при $i = 1$ – время на сетке Gr^1 и т. д. Символом ∞ условно обозначено актуализированное время, которое требуется автомату сдвига на прохождение любой разрядной сетки, входящей в гиперсетку. По определению считаем: $0 \cdot \infty = 0$.

Но работа на разрядных сетках, работа с числоидами – это представительская работа, работа с объектами, представляющими числа, но не с самими числами.

Выражения, содержащие числоиды, носят представительский характер, они лишь представляют соответствующие числовые объекты, «количественной» характеристики они не дают, наподобие того, как 784 – это представительская характеристика вполне определенного количества, правда, легко понимаемая нами. Но она же, записанная в четверичной системе счисления как 30122, с точки зрения количественной воспринимается нами не так легко. Чтобы вскрыть количественное содержание представительских записей, надо провести дополнительное вычисление, проявив количественный смысл каждой содержащейся в записи цифры. Так,

$$784 = 7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 \text{ и } 30122 = 3 \cdot 4^4 + 0 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0.$$

По аналогии находится количественный смысл записи

$$\bar{9} = \lim_{r \rightarrow \infty} \underbrace{0 \bar{9} \dots 99}_{r \text{ раз}} = \lim_{r \rightarrow \infty} (10^r - 1) = 10^{1 \cdot \infty} - 1 \quad (4)$$

или, с учетом (3), кратко

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = 10^{1 \cdot \infty} - 1. \quad (5)$$

Соотношение (5) – это *третье соотношение*, которым мы будем пользоваться.

Обратим внимание, что в правой части (5) стоит выражение, не находящееся на разрядной сетке Gr^0 . Это не числоид, в то время как на разрядной сетке находятся одни числоиды. Равенство (5) дает *количественную* характеристику результата предельного перехода. Правая часть (5) относится к числу объектов количественной природы, которые не находятся на разрядной сетке. Они получают иную геометрическую интерпретацию.

Для понимания правой части в (5) удобно ее переписать:

$$10^{1 \cdot \infty} - 1 = (-1) \cdot 10^{0 \cdot \infty} + 1 \cdot 10^{1 \cdot \infty} \quad (6)$$

и трактовать так: *первое* слагаемое в (6) – это обыкновенное число (-1) , расположенное на известной со школы числовой оси $Ax^0(10^0)$, на которой числа идут с весовым коэффициентом $10^0 = 10^{0 \cdot \infty}$ (рис. 1); *второе* слагаемое – это бесконечно большая величина первого порядка. О порядке бесконечно большой величины мы узнаем по множителю 1, стоящему перед символом бесконечности в показателе. Существует числовая ось, полностью аналогичная нашей оси $Ax^0(10^0)$, на которой числа идут с общим весовым коэффициентом $10^{1 \cdot \infty}$ и понимаются как бесконечно большие величины первого порядка. На этой числовой оси выбрано число 1 в качестве результата в (6).

Эти представления укладываются в рамки модели числовой гипероси, представленной далее и в [5–6]. Числовая гиперось является расширением известного понятия числовой оси и дает начальное представление о структуре бесконечности. Числовую ось, имеющую весовой коэффициент $10^{p \cdot \infty}$, обозначаем символами: $Ax^p(10^{p \cdot \infty})$ или Ax^p .

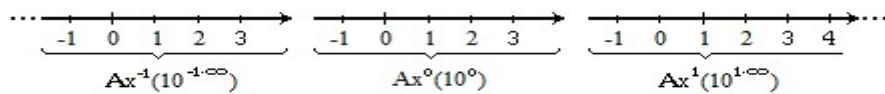


Рис. 1. Числовая гиперось Ax

Числовые оси, входящие в гиперось, упорядочены по признаку порядка p . Поэтому гиперось Ax можно записать как *упорядоченное* объединение числовых осей порядка p :

$$Ax = \bigcup_{-\infty < p < +\infty} Ax^p \quad (7)$$

Наглядное представление о гипероси можно получить из рис. 1. Отрицательным значениям p соответствуют бесконечно малые величины порядка p , положительным – бесконечно большие величины порядка p . Множество значений параметра p может быть как дискретным, так и континуальным, в частности, множеством всех действительных чисел. Видно, что числовая гиперось Ax представляет собою *шкалу бесконечностей*, каждая из которых, в свою очередь, представляется отдельной числовой осью веса p .

Правая часть в (6) – это гиперчисло. Оно записывается так:

$$10^{1 \cdot \infty} - 1 = (-1) \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{1 \cdot \infty} = (-1)|_{Ax^0} + 1|_{Ax^1} + 0|_{Ax^2} + \dots, \quad (8)$$

или, более компактно:

$$10^{1 \cdot \infty} - 1 = [-1 | 1 | 0 | \dots], \quad (9)$$

где справа от равенства после открывающей квадратной скобки стоит число (-1) , находящееся на оси Ax^0 ; число 1 находится на оси Ax^1 ; число 0 – на оси Ax^2 и т. д. Вертикальные черточки служат для отделения числовых осей друг от друга. Угловая скобка показывает направление роста порядков числовых осей. Нам для записи гиперчисла понадобились числовые оси, начиная с оси Ax^0 . Наподобие того, как числа изображаются точками на числовой оси, гиперчисла также изображаются точками на гипероси, правда, для изображения гиперчисла требуется не одна точка, а набор точек, по точке на каждую ось. Гиперчисло (6) изображается так:

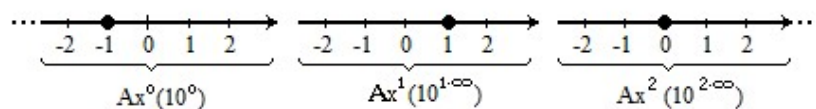


Рис. 2. Представление гиперчисла (6) на числовой гипероси

Замечание 1. Не следует путать числовую гиперось (рис. 1) с обобщенной разрядной

сеткой, с гиперсеткой (2).

Замечание 2. По историческим причинам числа на числовых осях растут слева направо. На гиперсетках, наоборот, веса сеток и веса разрядов растут справа налево.

Гармонический ряд

Постановка задачи. Стандартно обозначим через H сумму гармонического ряда:

$$H = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots, \quad (10)$$

через H_n – частичную сумму гармонического ряда:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}. \quad (11)$$

Тогда

$$H = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n. \quad (12)$$

Сделаем рисунок.

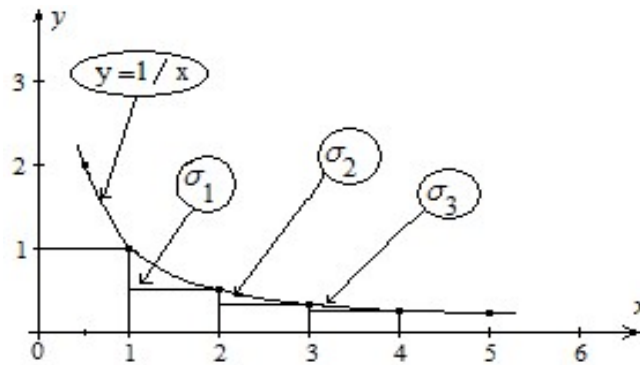


Рис. 3. Геометрическое истолкование суммы H

Сумма H равна сумме площадей прямоугольников, изображенных на рис. 3, продолженном до бесконечности. Величины σ_k – это площадки между гиперболой и соответствующими прямоугольниками. Частичная сумма H_n равна:

$$H_n = 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} - (\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_{n-1}) = 1 + \ln n - \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k \quad (\text{по Эйлеру}) = \ln n + C + \gamma_n, \quad (13)$$

где C – константа Эйлера, а $\gamma_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда $1 - \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k = C + \gamma_n$, и (см. [1,2,3])

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k). \quad (14)$$

Из (13) следует:

$$H = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n + C. \quad (15)$$

Требуется найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n$ и C .

Вычисление $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n$

При вычислении используется материал из §1 и [5–6]. Имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n &= \lim_{r \rightarrow \infty} \ln \max_{r-1} \bar{0} n_{r-1} \dots n_1 n_0 = \lim_{r \rightarrow \infty} \ln \underbrace{\bar{0} 9 \dots 99}_{r \text{ раз}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \ln(10^r - 1) = \lim_{r \rightarrow \infty} \ln 10^r (1 - 10^{-r}) = \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \ln 10^r + \lim_{r \rightarrow \infty} \ln(1 - 10^{-r}) = \ln 10 \cdot \lim_{r \rightarrow \infty} r + \lim_{r \rightarrow \infty} \ln(1 - 10^{-r}) = \end{aligned}$$

Прервемся. Для дальнейшего преобразования используются две формулы: формула (5), в силу которой $\lim_{r \rightarrow \infty} r = 10^\infty - 1$, и формула [3, с. 371]:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^4 + \dots, \quad -1 < x \leq 1. \quad (16)$$

Применяя эти формулы, продолжаем прерванное равенство.

$$\begin{aligned} &= \ln 10 \cdot (10^\infty - 1) + \lim_{r \rightarrow \infty} (-10^{-r} - \frac{1}{2} \cdot 10^{-2r} - \frac{1}{3} \cdot 10^{-3r} - \frac{1}{4} \cdot 10^{-4r} - \dots) = \\ &= \ln 10 \cdot (10^\infty - 1) - 10^{-\infty} - \frac{1}{2} \cdot 10^{-2\infty} - \frac{1}{3} \cdot 10^{-3\infty} - \frac{1}{4} \cdot 10^{-4\infty} - \dots = \end{aligned}$$

Прервемся для пояснения. Располагаем слагаемые по возрастанию весов и продолжаем.

$$= \dots - \frac{1}{4} \cdot 10^{-4\infty} - \frac{1}{3} \cdot 10^{-3\infty} - \frac{1}{2} \cdot 10^{-2\infty} - 10^{-\infty} - \ln 10 \cdot 10^0 + \ln 10 \cdot 10^\infty + 0 \cdot 10^{2\infty} + \dots =$$

Получилось гиперчисло, которое мы записываем в компактном виде.

$$= \rangle \dots - \frac{1}{4} \mid - \frac{1}{3} \mid - \frac{1}{2} \mid - 1 \mid \underbrace{-\ln 10}_{Ax^0} \mid \ln 10 \mid 0 \mid + \dots \rangle.$$

В компактной записи отсутствует явное указание на веса числовых осей. Вместо этого указано расположение ячейки для нашей числовой оси Ax^0 , вес которой равен 10^0 , а также указано с помощью угловых скобок, $\rangle$, направление роста весов числовых осей. Этого достаточно для ориентировки.

Итак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \rangle \dots - \frac{1}{4} \mid - \frac{1}{3} \mid - \frac{1}{2} \mid - 1 \mid \underbrace{-\ln 10}_{Ax^0} \mid \ln 10 \mid 0 \mid + \dots \rangle. \quad (17)$$

На шкале бесконечностей, представленных числовыми осями разных весов, в совокупности образующих гиперось, $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n$ находит свое точное место, выраженное гиперчислом (17) и, как видно, является бесконечно большой величиной первого порядка.

Нахождение константы С. Из формулы (14), выражающей геометрический смысл константы С, получаем:

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \sum_{k=1}^{k=n-1} \sigma_k) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k=n-1} \sigma_k. \quad (18)$$

Надо найти выражение σ_k , подходящее для дальнейшего исследования. Имеем:

$$\sigma_k = \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} - \frac{1}{k+1} = \ln \frac{k+1}{k} - \frac{1}{k+1} = \ln(1 + \frac{1}{k}) - \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{k}} =$$

Прервем вычисление и воспользуемся далее равенством:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1, \quad (19)$$

в силу которого

$$\frac{1}{1+\frac{1}{k}} = 1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^3} + \dots, \quad (k = 2, 3, 4, \dots), \quad (20)$$

причем при $k = 1$ разложение (19) не работает. Случай $k = 1$ рассматривается отдельно.

Предполагая $k = 2, 3, 4, \dots$, продолжаем прерванное равенство:

$$\begin{aligned} \ln(1 + \frac{1}{k}) - \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{k}} &= \\ &= \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{k^3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{k^4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{k^5} - \dots \\ &- \frac{1}{k} + 1 \cdot \frac{1}{k^2} - 1 \cdot \frac{1}{k^3} + 1 \cdot \frac{1}{k^4} - 1 \cdot \frac{1}{k^5} + \dots = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k^2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k^3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{k^4} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{k^5} + \dots, \quad (k = 2, 3, 4, \dots). \end{aligned} \quad (21)$$

Случай $k = 1$ рассматривается отдельно:

$$\sigma_1 = \int_1^2 \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2}. \quad (22)$$

Теперь можно вернуться к (18) и, используя (21) и (22), продолжить:

$$\begin{aligned} C &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \sum_{k=1}^{k=n-1} \sigma_k) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k=n-1} \sigma_k = 1 - \sigma_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^{k=n-1} \sigma_k = \\ &= 1 - \ln 2 + \frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k^2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k^3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{k^4} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{k^5} + \dots \right) = \\ &= 1 - \ln 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - 1 \right) + \frac{2}{3} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} - 1 \right) - \frac{3}{4} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} - 1 \right) + \frac{4}{5} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^5} - 1 \right) - \dots = \\ &= 1 - \ln 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot (\zeta(2) - 1) + \frac{2}{3} \cdot (\zeta(3) - 1) - \frac{3}{4} \cdot (\zeta(4) - 1) + \frac{4}{5} \cdot (\zeta(5) - 1) - \dots = \\ &= 1 - \ln 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \zeta(2) + \frac{2}{3} \cdot \zeta(3) - \frac{3}{4} \cdot \zeta(4) + \frac{4}{5} \cdot \zeta(5) - \dots + \\ &+ \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \dots \right) = \end{aligned}$$

Здесь обратимся к формуле (18) из [3, с. 371], согласно которой:

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \dots = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \ln 2 - 1.$$

Поэтому продолжаем прерванное равенство:

$$\begin{aligned} &= 1 - \ln 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \zeta(2) + \frac{2}{3} \cdot \zeta(3) - \frac{3}{4} \cdot \zeta(4) + \frac{4}{5} \cdot \zeta(5) - \dots + \\ &+ \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \dots \right) = \\ &= 1 - \ln 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \zeta(2) + \frac{2}{3} \cdot \zeta(3) - \frac{3}{4} \cdot \zeta(4) + \frac{4}{5} \cdot \zeta(5) - \dots + \ln 2 - 1 = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \zeta(2) + \frac{2}{3} \cdot \zeta(3) - \frac{3}{4} \cdot \zeta(4) + \frac{4}{5} \cdot \zeta(5) - \dots =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k+1} \cdot \zeta(k+1) = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2k-1}{2k} \cdot \zeta(2k) - \frac{2k}{2k+1} \cdot \zeta(2k+1) \right],$$

где $\zeta(x)$ – дзета-функция Римана.

Итак, константа Эйлера C может быть вычислена по любой из двух формул:

$$C = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k+1} \cdot \zeta(k+1). \quad (23)$$

$$C = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2k-1}{2k} \cdot \zeta(2k) - \frac{2k}{2k+1} \cdot \zeta(2k+1) \right]. \quad (24)$$

Итоговые результаты. Таким образом, сумма гармонического ряда есть бесконечность, представленная гиперчислом H , получающимся из равенств (15), (17), (23):

$$H = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n + C,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \rangle \dots -\frac{1}{4} \mid -\frac{1}{3} \mid -\frac{1}{2} \mid -1 \mid \underbrace{-\ln 10}_{Ax^0} \mid \ln 10 \mid 0 \mid +\dots \rangle,$$

$$C = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k+1} \cdot \zeta(k+1).$$

Это гиперчисло имеет вид:

$$H = \rangle \dots -\frac{1}{4} \mid -\frac{1}{3} \mid -\frac{1}{2} \mid -1 \mid \underbrace{C - \ln 10}_{Ax^0} \mid \ln 10 \mid 0 \mid +\dots \rangle. \quad (25)$$

Тем самым найдено точное расположение суммы гармонического ряда на шкале бесконечностей, представленных числовыми осями разных весов p , $-\infty < p < +\infty$. Как видно из (25), сумма гармонического ряда является бесконечно большой величиной первого порядка.

Таблица 2

Вычисление константы C по формуле (23)

k	$\frac{k}{k+1}$	$\zeta(k+1)$	$\frac{k}{k+1} \cdot \zeta(k+1)$	$(-1)^k$
1	$\frac{1}{2}$	1,6449340668482264	0,8224670334241132	–
2	$\frac{2}{3} = 0.6666666666666666$	1,2020569031595942	0,8013712687722614	+
3	$\frac{3}{4} = 0.75$	1,0823232337111381	0,8117424252833535	–
4	$\frac{4}{5} = 0.8$	1,0369277551433699	0,8295422041146959	+
5	$\frac{5}{6} = 0.8333333333333333$	1,0173430619844491	0,8477858849867018	–
6	$\frac{6}{7} = 0.8571428571428571$	1,0083492773819228	0,8642993806122123	+
7	$\frac{7}{8} = 0.875$	1,0040773561979443	0,8785676866732012	–
8	$\frac{8}{9} = 0.8888888888888888$	1,0020083928260822	0,8906741269556268	+

Окончание табл. 2

k	$\frac{k}{k+1}$	$\zeta(k+1)$	$\frac{k}{k+1} \cdot \zeta(k+1)$	$(-1)^k$
9	$\frac{9}{10} = 0.9$	1,0009945751278180	0,9008951176150362	—
10	$\frac{10}{11} = 0.90909090909090$	1,0004941886041194	0,9095401714573808	+
11	$\frac{11}{12} = 0.91666666666666$	1,0002460865533080	0,9168922460065321	—
12	$\frac{12}{13} = 0.92307692307692$	1,0001227133475784	0,9231901969353030	+

Значения ζ -функции Римана взяты из [1, с. 311]

Если ограничиться первыми 12 слагаемыми в формуле (23), то для константы C получается значение:

$$C_{12} = 0,5\,402\,669\,548\,584.$$

Эйлер подсчитал, используя первоначальное определение: $C = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n)$,

для величины C значение:

$$C = 0,5\,772\,1566\,490\,153\,25.$$

Видно, что подсчет константы C по формуле (23) достаточно быстро приводит к цели. Правда, для такого подсчета нужна предварительно созданная таблица значений ζ -функции Римана.

По проблеме, рассмотренной в статье, смотрите также [7–8].

Считаем приятным долгом выразить благодарность доктору технических наук, профессору А. И. Перегуде за интерес к работе.

Литература

1. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1949. 580 с.
2. Бухштаб А. А. Теория чисел. М. : Просвещение, 1966. 384 с.
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. СПб. : Лань, 2016. 810 с.
4. Деев Г. Е. Абстрактные вычислительные устройства: Эйлеровы вычисления. М. : Энергоатомиздат, 2007. 332 с. ил.
5. Деев Г. Е., Ермаков С.В. Ряд $1+1+1+\dots$ // Вестник кибернетики. 2018. № 2. С. 7–15
6. Деев Г. Е. Вычисления с бесконечностями // Вестник кибернетики. 2017. № 1 С. 49–57
7. Харди Г. Х. Расходящиеся ряды. М. : Изд-во иностран. лит., 1951. 504 с.
8. Выгодский М. Я. Вступительное слово к «Дифференциальному исчислению» Л. Эйлера. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1949, С. 5–34.

УДК 622.276.5.001.42

**ЭМПИРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ИНТЕРПРЕТАЦИИ МЕТОДОМ
НАИЛУЧШЕГО СОВМЕЩЕНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СКВАЖИН И СКВАЖИН
С ТРЕЩИНОЙ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА,
РАБОТАЮЩИХ С ПЕРЕМЕННЫМ ДЕБИТОМ**

И. В. Афанаскин, С. Г. Вольпин, Ю. Б. Чен-лен-сон, Ю. М. Штейнберг
*ФГУ «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных
исследований Российской академии наук»*
Ivan@Afanaskin.ru

В статье рассматриваются вопросы интерпретации гидродинамических исследований с переменным дебитом горизонтальных скважин и скважин с трещиной гидроразрыва пласта методом наилучшего совмещения. Для интерпретации предлагаются новые эмпирические модели, позволяющие проводить оперативную (оценочную) интерпретацию исследований без использования специализированного программного обеспечения. Приведены интервалы параметров, для которых были получены модели. На синтетических примерах оценена погрешность определения параметров с помощью эмпирических моделей по сравнению с точным решением. Для различных параметров в среднем она составляет 21 %.

Ключевые слова: гидродинамические исследования скважин, исследования скважин с переменным дебитом, горизонтальные скважины, вертикальные скважины с ГРП, эмпирическая модель.

**EMPIRICAL MODELS FOR INTERPRETATION BY BEST MATCHING
OF HORIZONTAL WELLS AND FRACTURED WELLS,
OPERATED AT VARIABLE RATE, DURING FLOW TESTS**

I. V. Afanaskin, S. G. Volpin, Yu. B. Chen-len-son, Yu. M. Shteinberg
System Research Institute, Russian Academy of Sciences
Ivan@Afanaskin.ru

The article describes issues of interpretation of pressure transient analyses with a variable production rate of horizontal wells and wells with hydraulic fractures using the best-match method. New empirical interpretation models are proposed. These models allow prompt interpretation without specialized software. Models are tested at a specified range of parameters. The simulated examples are used to estimate the accuracy of parameter determination with the help of empirical models in comparison with the exact solution. It is around 21% for different parameters.

Keywords: pressure transient analysis, survey of wells with variable production rate, horizontal wells, vertical wells with fractures, empirical model.

подавляющее большинство нефтяных месторождений России разрабатывается с применением заводнения и уже находится на поздней стадии разработки: обводненность продукции добывающих скважин превышает 80–90 %. В этих условиях для эффективной добычи оставшихся запасов необходим контроль разработки и ее регулирование. Одним из методов контроля разработки являются гидродинамические исследования (далее – ГДИ). Большинство видов таких исследований высокоинформативны, поскольку позволяют определять фильтрационно-емкостные свойства пласта, его неоднородность, а также параметры скважин. Но эти исследования подразумевают остановку скважин, что приводит к потерям в добыче нефти. Как правило, нефтяные компании неохотно идут на такие исследования. В результате охват

фонда скважин исследованиями редко превышает 25–30 % от требований руководящих документов (РД). Все это особенно актуально в низкопроницаемых коллекторах, разрабатываемых горизонтальными скважинами и вертикальными скважинами с трещинами гидроразрыва пласта (ГРП), так как в этих условиях возрастает необходимое для определения параметров время остановки скважин. Поэтому большое внимание уделяется гидродинамическим исследованиям без остановки скважин: так называемому «production analysis» [3, 4, 8], методу двух режимов [5] и пр. Исследования скважин без остановки имеют меньшую точность, но позволяют существенно повысить охват фонда исследованиями. Поэтому данная работа посвящена эмпирическим моделям для интерпретации методом наилучшего совмещения гидродинамических исследований горизонтальных скважин и скважин с трещиной гидроразрыва пласта, работающих с переменным дебитом. Такие модели позволяют проводить оперативную (оценочную) интерпретацию исследований.

1. Интерпретация исследований горизонтальных скважин с переменным дебитом

Основные методы интерпретации гидродинамических исследований скважин на неустановившихся режимах – метод линеаризации и метод наилучшего совмещения.

При исследовании горизонтальных скважин с переменным дебитом можно выделить три режима течения:

1. Ранний радиальный приток к горизонтальному стволу в вертикальной плоскости.
2. Линейный приток к горизонтальному стволу в горизонтальной плоскости.
3. Поздний радиальный (псевдорadiaльный) приток к скважине в горизонтальной плоскости, которая в этом масштабе времени воспринимается как точка.

При интерпретации методом линеаризации для каждого режима течения можно записать уравнение притока:

1. Ранний радиальный приток

$$\frac{p_i - p_w}{q_N} = m_3 \sum_{j=1}^N \left(-\frac{q_j - q_{j-1}}{q_N} \lg(t - t_{j-1}) \right) + p_3, \quad (1)$$

2. Линейный приток

$$\frac{p_i - p_w}{q_N} = m_2 \sum_{j=1}^N \left(-\frac{q_j - q_{j-1}}{q_N} \sqrt{t - t_{j-1}} \right) + p_2, \quad (2)$$

3. Поздний радиальный (псевдорadiaльный) приток

$$\frac{p_i - p_w}{q_N} = m_1 \sum_{j=1}^N \left(-\frac{q_j - q_{j-1}}{q_N} \lg(t - t_{j-1}) \right) + m_0, \quad (3)$$

где p_i – пластовое давление (бар), p_w – забойное давление (бар), q_i – дебит скважины на j -ом режиме ($\text{м}^3/\text{сут}$), t – время с начала исследования (час), t_j – время начала j -ого режима (час), p_2 и p_3 – коэффициенты ($\text{бар} \cdot \text{сут}/\text{м}^3$),

$$m_0 = m_1 \left[0,8686s + \lg \left(\frac{k_r}{\phi \mu c_i L_e^2} \right) + 3,0923 \right], \quad (4)$$

$$m_1 = \frac{21,5B\mu}{k_r h}, \quad m_2 = \frac{1,246B}{h L_e} \sqrt{\frac{\mu}{k_r \phi c_i}}, \quad m_3 = \frac{21,5B\mu}{L_e \sqrt{k_r k_z}}, \quad (5)$$

$$s = s_m + s_h, \quad s_h \approx 1 - \frac{h}{L_e} \sqrt{\frac{k_r}{k_z}} \ln \left(\frac{4\pi^2 r_w z_w}{h^2} \sqrt{\frac{k_z}{k_r}} \right) + \ln \left(\frac{2,7 r_w}{L_e} \right), \quad (6)$$

s – общий скин-фактор (безразм.), s_m – механический скин-фактор (безразм.), s_h – геометрический скин-фактор горизонтального ствола (безразм.), k_r – проницаемость в горизонтальной плоскости (мД), ϕ – пористость (д.ед.), μ – вязкость жидкости в пластовых условиях (мПа·с), c_i – суммарная сжимаемость системы пласт-флюид (1/бар), L_e – эффективная длина горизонтального ствола (м), B – объемный коэффициент (м³/м³), h – толщина пласта (м), k_z – вертикальная проницаемость (мД), r_w – радиус скважины (м), z_w – расстояние от подошвы пласта до горизонтального участка ствола скважины (м).

Формулы этого раздела получены с использованием материалов работ [1] и [5]. Формула для геометрического скин-фактора s_h заимствована из [2].

Для интерпретации исследования методом линеаризации необходимо для каждого режима работы скважины построить диагностический график Бурде [6–8] и по характерному поведению производной изменения давления по функции суперпозиции определить границы режимов течения. Затем для каждого режима работы построить графики в координатах

$$\frac{p_i - p_w}{q_N} \text{ от } \sum_{j=1}^N \left(-\frac{q_j - q_{j-1}}{q_N} \lg(t - t_{j-1}) \right) \text{ и } \frac{p_i - p_w}{q_N} \text{ от } \sum_{j=1}^N \left(-\frac{q_j - q_{j-1}}{q_N} \sqrt{t - t_{j-1}} \right).$$

На первом графике найти два линейных участка, соответствующих раннему и позднему радиальному притоку (учитывая график Бурде), аппроксимировать их линейной зависимостью и определить параметры m_0 , m_1 и m_3 . На втором графике необходимо найти линейный участок, соответствующий линейному притоку (учитывая график Бурде), аппроксимировать его линейной зависимостью и определить параметр m_2 . Затем определить необходимые свойства из зависимостей (4)–(6). После такой интерпретации каждого режима работы нужно согласовать между собой свойства, полученные по разным режимам.

При интерпретации методом наилучшего совмещения совмещается фактическая и расчетная кривые путем подбора значений параметров модели. Наилучшим считается совмещение, характеризующееся наименьшим суммарным по всем точкам квадратом отклонения расчетной кривой от фактической. При этом для расчетов используется решение в изображениях уравнения упругого режима фильтрации. Авторами было экспериментально установлено, что для инженерных расчетов можно использовать более простую (эмпирическую) форму записи решения. Для случая горизонтальной скважины в однородном бесконечном пласте уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{p_i - p_w}{q_N} = & a_1 \sum_{j=1}^N \left(-\frac{q_j - q_{j-1}}{q_N} \sqrt[4]{t - t_{j-1}} \right) + a_2 \sum_{j=1}^N \left(-\frac{q_j - q_{j-1}}{q_N} \sqrt{t - t_{j-1}} \right) + \\ & + a_3 \sum_{j=1}^N \left(-\frac{q_j - q_{j-1}}{q_N} \lg(t - t_{j-1}) \right) + a_4 \end{aligned}, \quad (7)$$

где константы a_1 , a_2 , a_3 и a_4 можно статистически связать с комплексными параметрами, описывающими свойства пласта и конструкцию скважины m_0 , m_1 , m_2 и m_3 . Для получения такой связи с помощью моделирования в программе Saphir компании Kappa Engineering было получено большое количество кривых забойного давления и дебита от времени для различных сочетаний параметров модели. С этими кривыми были совмещены кривые, полученные с помощью расчетов по формуле (7), и определены константы a_1 , a_2 , a_3 и a_4 . Расчеты по совмещению

методом Ньютона проводились с помощью надстройки «Поиск решения» программы Microsoft Excel. Затем с помощью надстройки «Анализ данных» были получены статистические зависимости a_1 , a_2 , a_3 и a_4 от m_0 , m_1 , m_2 и m_3 и наоборот (с точностью до трех значащих цифр):

$$\begin{aligned} a_1 &= -0,0108m_0 - 0,0553m_1 - 2,61m_2 + 2,72m_3 + 0,00725, \quad R^2 = 0,904, \\ a_2 &= 0,00391m_0 - 0,00437m_1 + 0,441m_2 - 0,650m_3 - 0,00435, \quad R^2 = 0,808, \\ a_3 &= 0,00236m_0 + 0,201m_1 + 0,431m_2 - 1,32m_3 - 0,00179, \quad R^2 = 0,971, \\ a_4 &= 1,06m_0 + 10,9m_1 - 2,77m_2 - 9,47m_3 - 0,0655, \quad R^2 = 1,000, \end{aligned} \quad (8)$$

и наоборот

$$\begin{aligned} m_0 &= 36,9a_1 + 269a_2 - 68,1a_3 + 0,339a_4 + 0,881, \quad R^2 = 0,968, \\ m_1 &= -3,96a_1 - 26,4a_2 + 5,40a_3 + 0,0598a_4 - 0,0813, \quad R^2 = 0,979, \\ m_2 &= -0,619a_1 - 0,995a_2 - 1,08a_3 - 0,00436a_4 + 0,00145, \quad R^2 = 0,995, \\ m_3 &= -0,238a_1 - 0,142a_2 - 1,10a_3 + 0,00156a_4 - 0,00187, \quad R^2 = 0,997, \end{aligned} \quad (9)$$

где R^2 – коэффициент детерминации (доля дисперсии зависимой переменной, объясняемая рассматриваемой моделью зависимости). Для удовлетворительных моделей считается, что коэффициент детерминации должен быть не меньше 0,5. Модели с коэффициентом детерминации выше 0,8 признаются хорошими. Значение коэффициента детерминации 1 соответствует функциональной зависимости между переменными. В формуле a_4 от m_0 , m_1 , m_2 и m_3 системы (8) значение $R^2 = 1,000$ получено в результате округления до трех знаков после запятой, как это обычно делается. На самом деле $0,999 < R^2 < 1,000$.

Системы (8) и (9) получены для следующих условий:

1. Количество режимов 2–4 шт.
2. Пластовое давление 250–450 бар.
3. Отношение дебитов $\frac{q_N - q_{N-1}}{q_N}$ 0,1–0,5 ед.
4. Радиус скважины 0,1 м.
5. Механический скин-фактор 0–10 безразм.
6. Объемный коэффициент 1,0–1,2 м³/м³.
7. Вязкость 0,5–3,0 мПа·с.
8. Суммарная сжимаемость $4,3 \cdot 10^{-5}$ – $1,0 \cdot 10^{-4}$ 1/бар.
9. Проницаемость в горизонтальной плоскости 3–30 мД.
10. Отношение проницаемостей $\alpha_z = k_z / k_r$ 0,06–1,00 д.ед.
11. Толщина пласта 5–30 м.
12. Пористость 0,05–0,18 д.ед.
13. Эффективная длина скважины 100–1000 м.

Рассмотрим пример использования предлагаемого подхода. Будем интерпретировать кривую, полученную с помощью моделирования в Saphir Kappa Engineering, рис. 1, поскольку для нее мы точно знаем параметры и можем оценить погрешность их определения.

Пусть горизонтальная скважина запускается в работу из пластового давления и последовательно отрабатывается на 4 режимах с возрастающим дебитом в течение 8 суток. Исходные данные для расчета прямой задачи в Saphir Kappa Engineering следующие:

1. Радиус скважины 0,1 м.
2. Толщина пласта 19 м.

3. Пористость 0,05 д.ед.
4. Объемный коэффициент $1,17 \text{ м}^3/\text{м}^3$.
5. Вязкость $0,8 \text{ мПа}\cdot\text{с}$.
6. Суммарная сжимаемость $8,99 \cdot 10^{-5} \text{ 1/бар}$.
7. Проницаемость 3 мД.
8. Эффективная длина горизонтального ствола 200 м.
9. Отношение проницаемостей $\alpha_z = k_z / k_r$ 0,19 д.ед.
10. Пластовое давление 350 бар.
11. Механический скин-фактор 0,0 безразм.

На рис. 2 приведен диагностический график Бурде для четвертого режима работы скважины (с дебитом $100 \text{ м}^3/\text{сут}$). На графике однозначно определяется модель горизонтальной скважины в однородном бесконечном пласте.

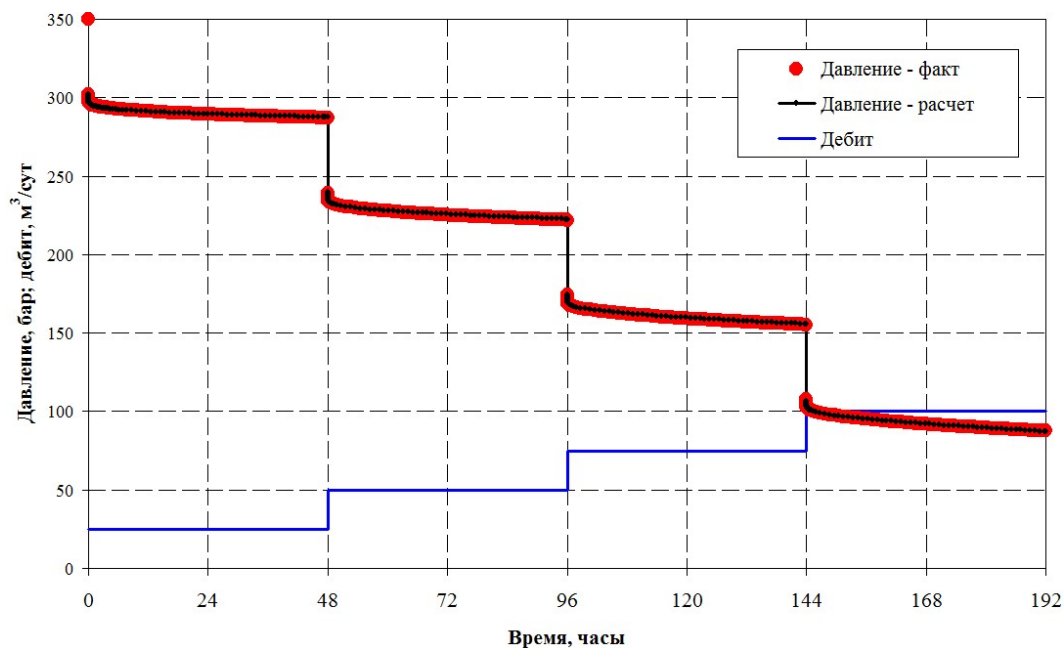


Рис. 1. Пример обработки ГДИ горизонтальной скважины с переменным дебитом методом наилучшего совмещения по эмпирической модели



Рис. 2. Диагностический график Бурде для четвертого режима работы горизонтальной скважины

В результате интерпретации семейства кривых забойное давление-дебит (для горизонтальной скважины, работающей с переменным дебитом) методом наилучшего совмещения по предлагаемой эмпирической модели, см. рис. 1, получены следующие погрешности определения параметров модели:

1. Проницаемость 16 %.
2. Эффективная длина горизонтального ствола 6 %.
3. Отношение проницаемостей $\alpha_z = k_z / k_r$ 42 %.
4. Механический скин-фактор 15 %.
5. Общий (суммарный) скин-фактор 16 %.

2. Интерпретация исследований вертикальных скважин с трещиной ГРП, работающих с переменным дебитом

При исследовании вертикальных скважин с ГРП, работающих с переменным дебитом, можно выделить три режима течения:

- 1) билинейный поток к трещине ГРП и по трещине к скважине;
- 2) линейный приток к трещине ГРП;
- 3) поздний радиальный (псевдорadiaльный) приток к скважине с ГРП в горизонтальной плоскости, которая в этом масштабе времени воспринимается как точка.

При интерпретации методом линеаризации для каждого режима течения можно записать уравнение притока:

1. Билинейный поток

$$\frac{p_i - p_w}{q_N} = n_3 \sum_{j=1}^N \left(-\frac{q_j - q_{j-1}}{q_N} \sqrt[4]{t - t_{j-1}} \right) + p_3, \quad (10)$$

2. Линейный приток

$$\frac{p_i - p_w}{q_N} = n_2 \sum_{j=1}^N \left(-\frac{q_j - q_{j-1}}{q_N} \sqrt{t - t_{j-1}} \right) + p_2, \quad (11)$$

3. Поздний радиальный (псевдорadiaльный) приток

$$\frac{p_i - p_w}{q_N} = n_1 \sum_{j=1}^N \left(-\frac{q_j - q_{j-1}}{q_N} \lg(t - t_{j-1}) \right) + n_0, \quad (12)$$

где

$$n_0 = n_1 \left[0,8686s + \lg \left(\frac{k}{4\phi\mu c_t x_f^2} \right) + 3,0923 \right], \quad n_1 = \frac{21,5B\mu}{kh}, \quad n_2 = \frac{0,623B}{hx_f} \sqrt{\frac{\mu}{k\phi c_t}}, \quad (13)$$

$$n_3 = \frac{6,154B\mu}{h\sqrt{kF_c}} \sqrt[4]{\frac{k}{\phi\mu c_t}}, \quad C_{fd} = \frac{k_f \omega}{k x_f}, \quad F_c = C_{fd} k x_f, \quad (14)$$

$$s = s_m + s_f, \quad s_f = f - \ln \left(\frac{x_f}{r_w} \right), \quad f = \frac{1,65 - 0,328u + 0,116u^2}{1 + 0,18u + 0,064u^2 + 0,005u^3}, \quad u = \ln(C_{fd}), \quad (15)$$

k – проницаемость пласта (мД), x_f – половина длины трещины ГРП, k_f – проницаемость трещины ГРП (мД), ω – раскрытость (ширина) трещины ГРП (м), C_{fd} – безразмерная проводимость трещины ГРП (ед.), F_c – проводимость трещины ГРП (мД·м), s_f – геометрический скин-фактор трещины ГРП (безразм.), f – псевдоскин-функция (безразм.).

Формулы этого раздела получены с использованием материалов работ [1] и [5].

Для интерпретации исследования методом линеаризации необходимо для каждого режима работы скважины построить диагностический график Бурде [6–8] и по характерному поведению производной изменения давления по функции суперпозиции определить границы режимов течения. Затем для каждого режима работы построить графики в координатах $\frac{p_i - p_w}{q_N}$ от $\sum_{j=1}^N \left(-\frac{q_j - q_{j-1}}{q_N} \sqrt[4]{t - t_{j-1}} \right)$, $\frac{p_i - p_w}{q_N}$ от $\sum_{j=1}^N \left(-\frac{q_j - q_{j-1}}{q_N} \sqrt{t - t_{j-1}} \right)$ и $\frac{p_i - p_w}{q_N}$ от

$\sum_{j=1}^N \left(-\frac{q_j - q_{j-1}}{q_N} \lg(t - t_{j-1}) \right)$. На этих трех графиках найти линейные участки, соответствующие билинейному, линейному и псевдорадиальному притокам (учитывая график Бурде), аппроксимировать их линейной зависимостью и определить параметры n_0 , n_1 , n_2 и n_3 . Затем определить необходимые свойства из зависимостей (10)–(15). После такой интерпретации каждого режима работы нужно согласовать между собой свойства, полученные по разным режимам.

При интерпретации методом наилучшего совмещения для расчетов используется решение в изображениях уравнения упругого режима фильтрации. Авторами было экспериментально установлено, что для инженерных расчетов можно использовать более простую (эмпирическую) форму записи решения. Для случая горизонтальной скважины в однородном бесконечном пласте уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{p_i - p_w}{q_N} = & b_1 \sum_{j=1}^N \left(-\frac{q_j - q_{j-1}}{q_N} \sqrt[4]{t - t_{j-1}} \right) + b_2 \sum_{j=1}^N \left(-\frac{q_j - q_{j-1}}{q_N} \sqrt{t - t_{j-1}} \right) + \\ & + b_3 \sum_{j=1}^N \left(-\frac{q_j - q_{j-1}}{q_N} \lg(t - t_{j-1}) \right) + b_4 \end{aligned} \quad (16)$$

где константы b_1 , b_2 , b_3 и b_4 можно статистически связать с комплексными параметрами, описывающими свойства пласта и конструкцию скважины n_0 , n_1 , n_2 и n_3 . Для получения такой связи с помощью моделирования в программе Saphir компании Kappa Engineering было получено большое количество кривых забойного давления и дебита от времени для различных сочетаний параметров модели. С этими кривыми были совмещены кривые, полученные с помощью расчетов по формуле (16) и определены константы b_1 , b_2 , b_3 и b_4 . Расчеты по совмещению методом Ньютона проводились с помощью надстройки «Поиск решения» программы Microsoft Excel. Затем с помощью надстройки «Анализ данных» были получены статистические зависимости b_1 , b_2 , b_3 и b_4 от n_0 , n_1 , n_2 и n_3 и наоборот (с точностью до трех значащих цифр):

$$\begin{aligned} b_1 = & -0,0729n_0 - 0,226n_1 - 2,25n_2 - 0,456n_3 + 0,173, \quad R^2 = 0,991, \\ b_2 = & -0,00761n_0 - 0,0744n_1 + 0,260n_2 + 0,144n_3 - 0,0173, \quad R^2 = 0,977, \\ b_3 = & 0,0556n_0 + 0,0840n_1 + 0,574n_2 - 0,228n_3 - 0,0551, \quad R^2 = 0,828, \\ b_4 = & 0,807n_0 + 0,800n_1 - 3,56n_2 - 0,435n_3 + 0,288, \quad R^2 = 0,998, \end{aligned} \quad (17)$$

и наоборот

$$\begin{aligned}
 n_0 &= 0,854b_1 + 10,7b_2 + 1,94b_3 + 1,15b_4 + 0,123, \quad R^2 = 0,999, \\
 n_1 &= -1,93b_1 - 9,90b_2 - 1,86b_3 - 0,0797b_4 - 0,0591, \quad R^2 = 0,996, \\
 n_2 &= -0,186b_1 - 0,319b_2 - 0,351b_3 - 0,0681b_4 + 0,127, \quad R^2 = 0,830, \\
 n_3 &= -0,760b_1 + 0,275b_2 - 2,19b_3 + 0,159b_4 - 0,0366, \quad R^2 = 0,999,
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

где R^2 – коэффициент детерминации (доля дисперсии зависимой переменной, объясняемая рассматриваемой моделью зависимости).

Системы (17) и (18) получены для следующих условий:

1. Количество режимов 2–4 шт.
2. Пластовое давление 250–450 бар.
3. Отношение дебитов $\frac{q_N - q_{N-1}}{q_N}$ 0,1–0,5 ед.
4. Радиус скважины 0,1 м.
5. Механический скин-фактор 0,0–2,2 безразм.
6. Объемный коэффициент 1,0–1,2 м³/м³.
7. Вязкость 0,5–3,0 мПа·с.
8. Суммарная сжимаемость $4,3 \cdot 10^{-5}$ – $1,0 \cdot 10^{-4}$ 1/бар.
9. Проницаемость 1–15 мД.
10. Проводимость трещины ГРП 400–1200 мД·м.
11. Толщина пласта 2–20 м.
12. Пористость 0,05–0,18 д.ед.
13. Половина длины трещины ГРП 60–140 м.

Рассмотрим пример использования предлагаемого подхода. Будем интерпретировать кривую, полученную с помощью моделирования в Saphir Kappa Engineering (рис. 3), поскольку для нее мы точно знаем параметры и можем оценить погрешность их определения.

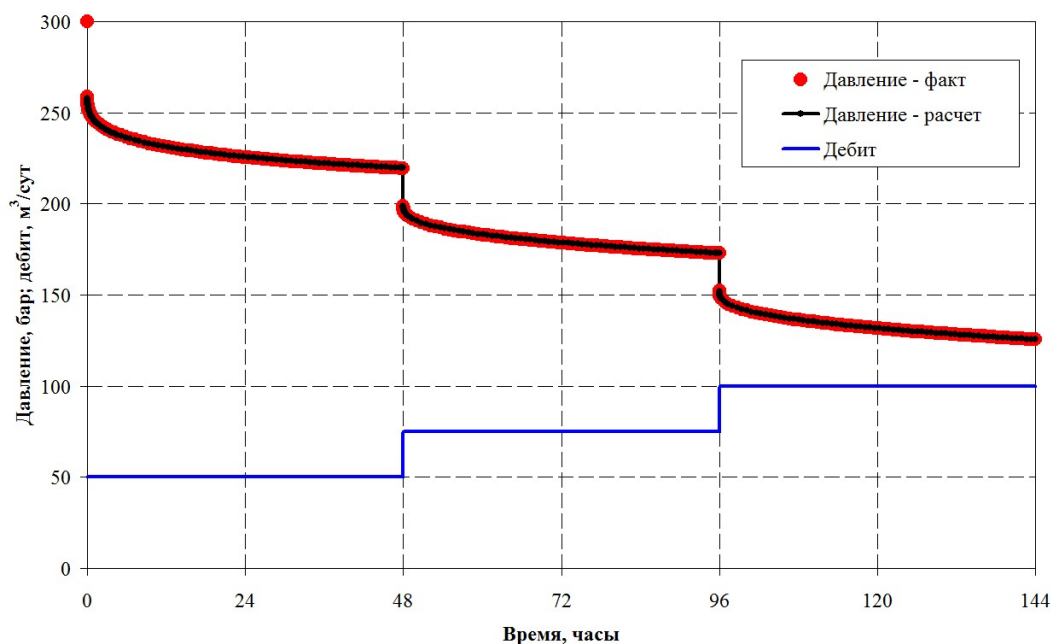


Рис. 3. Пример обработки ГДИ вертикальной скважины с трещиной ГРП, работающей с переменным дебитом, методом наилучшего совмещения по эмпирической модели

Пусть горизонтальная скважина запускается в работу из пластового давления и последовательно отрабатывается на 4 режимах с возрастающим дебитом в течение 8 суток. Исходные данные для расчета прямой задачи в Saphir Kappa Engineering следующие:

1. Радиус скважины 0,1 м.
2. Толщина пласта 10 м.
3. Пористость 0,1 д.ед.
4. Объемный коэффициент $1,0 \text{ м}^3/\text{м}^3$.
5. Вязкость $1,0 \text{ мПа}\cdot\text{с}$.
6. Суммарная сжимаемость $1,0 \cdot 10^{-4} \text{ 1/бар}$.
7. Проницаемость 5 мД.
8. Половина длины трещины ГРП 60 м.
9. Проводимость трещины ГРП 600 мД·м.
10. Пластовое давление 300 бар.
11. Механический скин-фактор 2,0 безразм.

На рис. 4 диагностический график Бурде для третьего режима работы скважины (с дебитом $100 \text{ м}^3/\text{сут}$). На графике однозначно определяется модель вертикальной скважины с трещиной ГРП в однородном бесконечном пласте.

В результате интерпретации семейства кривых забойное давление-дебит (для вертикальной скважины с трещиной ГРП, работающей с переменным дебитом) методом наилучшего совмещения по предлагаемой эмпирической модели, см. рис. 3, получены следующие погрешности определения параметров модели:

1. Проницаемость 12 %.
2. Половина длины трещины ГРП 21 %.
3. Проводимость трещины ГРП 32 %.
4. Механический скин-фактор 23 %.
5. Общий (суммарный) скин-фактор 31 %.

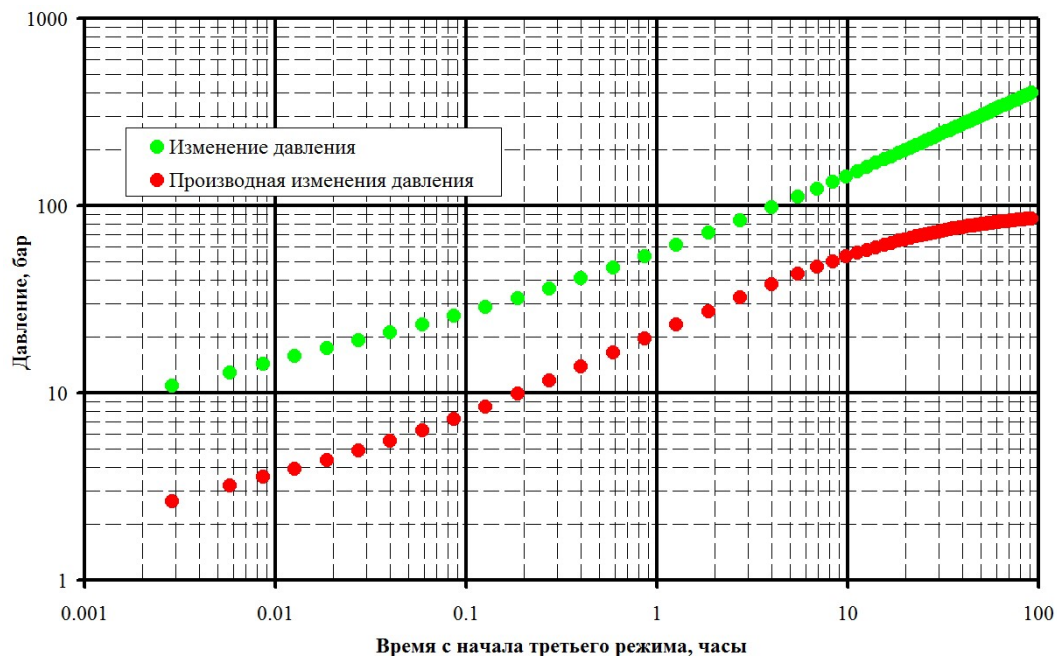


Рис. 4. Диагностический график Бурде для третьего режима работы скважины с трещиной ГРП

Заключение. Для горизонтальных скважин и вертикальных скважин с трещинами ГРП для увеличения охвата фонда скважин исследованиями и преодоления дефицита информации, возникающего в результате противоречия между необходимостью регистрации длительных

кривых восстановления давления и планом добычи, можно использовать исследования скважин с переменным дебитом.

Предложены эмпирические модели, позволяющие проводить оперативную (оценочную) интерпретацию таких исследований методом наилучшего совмещения без привлечения специализированного программного обеспечения.

Приведены интервалы параметров, для которых были получены модели. На синтетических примерах оценена погрешность определения параметров с помощью эмпирических моделей по сравнению с точным решением. Для различных параметров в среднем она составляет 21 % и колеблется в пределах 6–42 %.

Показано, что для интерпретации гидродинамических исследований скважин с переменным дебитом методом наилучшего совмещения можно использовать более простое (по сравнению с решением в изображениях) выражение.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 18-07-00503 А.

Литература

1. Деева Т. А., Камартдинов М. Р., Кулагина Т. Е. и др. Гидродинамические исследования скважин: анализ и интерпретация данных. Томск : ЦППС НД ТПУ, 2009. 243 с.
2. Евченко В. С., Захарченко Н. П., Каган Я. М. и др. Разработка нефтяных месторождений наклонно-направленными скважинами. М. : Недра, 1986. 278 с.
3. Ипатов А. И., Кременецкий М. И. Геофизический и гидродинамический контроль разработки месторождений углеводородов. Ижевск : Регулярная и хаотическая механика, 2010. 780 с.
4. Кременецкий М. И., Ипатов А. И., Гуляев Д. Н. Информационное обеспечение и технологии гидродинамического моделирования нефтяных и газовых залежей. М. : Ижевск : ИКИ, 2012. 869 с.
5. Эрлагер Р. мл. Гидродинамические методы исследования скважин. М. : Ижевск : Ин-т компьютер. исслед., 2007. 512 с.
6. Bourdet D. et al. A new set of type curves simplifies well test analysis // World Oil. 1983. May. P. 95–106.
7. Bourdet D. Well Test Analysis: The Use of Advanced Interpretation Models. Amsterdam ; Boston : Elsevier Science, 2002. 426 p.
8. Houze O., Viturat D., Fjaere O. S. Dynamic Data Analysis. V 5.12. Kappa Engineering Publ., 2017. 743 p.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ОДНОМЕРНЫХ УПРУГИХ ОБЪЕКТОВ В СИСТЕМАХ ВИРТУАЛЬНОГО ОКРУЖЕНИЯ

Е. В. Страшнов, М. А. Торгашев

*Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт
системных исследований Российской академии наук
strashnov_evg@mail.ru, mtorg@mail.ru*

В работе рассмотрена задача моделирования в масштабе реального времени динамики одномерных нерастяжимых упругих объектов (тросов, канатов и т. д.) в системах виртуального окружения. Для решения этой задачи были задействованы основные положения теории упругости Коссера, описывающей деформацию изгиба и кручения троса. Предложен подход, в котором осуществляется дискретизация троса набором точек, определяющих его положение, и набором элементов между точками, определяющих его ориентацию. Для задания ориентации элементов троса выбраны кватернионы. При таком подходе нерастяжимость троса реализуется с применением метода множителей Лагранжа, что приводит к системе линейных уравнений с матрицей трехдиагонального вида, решаемой с помощью метода прогонки. В свою очередь, изгиб и кручение троса моделируются на основе метода конечных элементов, применяемого для интегрирования потенциальной энергии деформации троса. Кроме того, реализация ограничений, связывающих координаты положения и ориентации троса, осуществляется с помощью метода последовательных импульсов. Апробация предложенных в работе методов была проведена в имитационно-тренажном комплексе, разработанном в Федеральном научном центре Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук, и показала их применимость в системах виртуального окружения.

Ключевые слова: трос, теория упругости Коссера, кватернионы, метод прогонки, вектор Дарбу, метод последовательных импульсов, реальное время, имитационно-тренажерный комплекс.

DYNAMIC SIMULATION OF ONE-DIMENSIONAL ELASTIC OBJECTS IN VIRTUAL ENVIRONMENT SYSTEMS

E. V. Strashnov, M. A. Torgashev

*System Research Institute, Russian Academy of Sciences,
strashnov_evg@mail.ru, mtorg@mail.ru*

The article considers the problem of real time dynamic simulation of one-dimensional inextensible elastic objects (ropes, cables, etc.) in virtual environment systems. To solve this problem, the fundamentals of the Cosserat theory of elasticity for bending and twisting of the rope are used. An approach in which the rope is discretized by a set of points to define its position and a set of elements between points that determine its orientation is proposed. To specify the orientation of the rope elements, quaternions are involved. With this approach, the inextensibility of the rope is realized using the method of Lagrange multipliers, which leads to a system of linear equations with a tridiagonal matrix solved by the tridiagonal matrix algorithm. In turn, the bending and twisting of the rope are based on the finite element method, which is used to integrate the potential energy of rope deformation. In addition, the implementation of constraints respect to coordinates of the rope position and orientation is performed by the sequential impulses method. Approbation of proposed methods was carried out in a training complex, developed in the System Research Institute, Russian Academy of Sciences, and showed their applicability in virtual environment systems.

Keywords: rope, the Cosserat theory of elasticity, quaternions, tridiagonal matrix algorithm, Darboux vector, sequential impulses method, real time, training complex.

Введение. Моделирование динамики одномерных упругих объектов (например, тросов, канатов, веревок, кабелей и т. д.) часто необходимо в робототехнике, компьютерной графике и анимации. В интерактивных системах хирургического моделирования, предназначенных для обучения и планирования проведения хирургических операций, требуется выполнять манипуляции с тонкими объектами [1–3] такими, как хирургические нити, катетеры и иглы. В свою очередь, моделирование прядей волос, растений и веревок [4–5] рассматривается в задачах компьютерной анимации. Такие объекты, как тросы, канаты и кабели применяются в робототехнике в механизмах для подъема и перемещения грузов, для буксировки автомобилей, в задачах прокладки роботом-кабелеукладчиком коммуникационного или силового кабеля и т. д. Поэтому разработка алгоритмов и методов моделирования динамики одномерных упругих объектов является важной и актуальной задачей.

В данной статье рассмотрены одномерные нерастяжимые упругие объекты, подверженные деформациям изгиба и кручения. Задача состоит в том, чтобы смоделировать в реальном времени динамику этих объектов с обеспечением требования визуальной правдоподобности их поведения. Во многих публикациях для моделирования динамики одномерных упругих объектов применяется масс-пружинная модель, суть которой состоит в том, что одномерный объект представляется в виде последовательности материальных точек, соединенных пружинами различного типа [6–8]. Такое решение позволяет реализовать анимацию движения волос игровых персонажей и растений, но не воспроизводит процесс возникновения узлов при закручивании троса. Для преодоления этой проблемы предлагается задействовать основные положения теории упругости Коссера [9–10], изучающей деформацию одномерных упругих объектов. В публикации [1] для моделирования хирургических нитей были задействованы некоторые модели данной теории с последующим решением краевой задачи. Однако полученные в этой статье результаты применимы для объектов специального вида с одним закрепленным концом. Более универсальное решение предложено в работе [11], где теория Коссера применяется совместно с дискретизацией одномерного объекта в явном виде. Недостатком данного подхода является использование штрафных сил при реализации ограничений, что приводит к необходимости уменьшать шаг моделирования динамики. Предлагаемые нами методы и алгоритмы моделирования одномерных упругих объектов базируются на основных идеях, полученных в работе [11], но усовершенствованы для их реализации в реальном времени.

Основной целью работы является разработка методов и алгоритмов моделирования в реальном времени динамики одномерных упругих объектов (для краткости будем называть эти объекты тросами) применительно к имитационно-тренажерным комплексам. Для этого предлагается подход, в котором рассмотрено дискретное представление троса с помощью точек, задающих его положение, и элементов между точками, определяющих его ориентацию. Ориентация троса задается с помощью кватерниона с введением ограничения, чтобы третий вектор ортонормированного базиса ориентации совпадал с вектором касательной к тросу. Применяемые подходы основаны на решении системы трехдиагонального вида методом прогонки для обеспечения нерастяжимости троса, методе последовательных импульсов [12] для реализации ограничений и методе конечных элементов для формирования моментов, вычисляемых путем дифференцирования потенциальной энергии деформации изгиба и кручения для каждого элемента троса. Полученные результаты реализованы в виде программных модулей подсистемы динамики имитационно-тренажерного комплекса, разработанного в ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН.

Математическая модель троса

Одномерный упругий объект (трос) представляет собой тонкое деформируемое тело, ось которого задается в виде кривой (рис. 1). Без ограничения общности можно считать, что трос

имеет круглое поперечное сечение и длина троса L значительно больше, чем его радиус r . Положение троса определяется с помощью радиус-вектора $\mathbf{r}(s)$, а ориентация задается ортонормированным базисом $\mathbf{d}_k(s)$, $k=1,2,3$, где $s \in [0, L]$. При этом вектор $\mathbf{d}_3(s)$ совпадает с направлением касательной к кривой, что соответствует ограничению:

$$\frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|} - \mathbf{d}_3 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r}' = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}. \quad (1)$$

Для представления ориентации троса воспользуемся единичным кватернионом $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z, q_w)^T$, где $\|\mathbf{q}\| = 1$. Так как векторы $\mathbf{d}_k$ являются столбцами матрицы перехода из системы координат троса в мировую систему координат, то через кватернион эти векторы определяются следующим образом [13]:

$$\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} q_x^2 - q_y^2 - q_z^2 + q_w^2 \\ 2(q_x q_y + q_z q_w) \\ 2(q_x q_z - q_y q_w) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} 2(q_x q_y - q_z q_w) \\ -q_x^2 + q_y^2 - q_z^2 + q_w^2 \\ 2(q_y q_z + q_x q_w) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_3 = \begin{pmatrix} 2(q_x q_z + q_y q_w) \\ 2(q_y q_z - q_x q_w) \\ -q_x^2 - q_y^2 + q_z^2 + q_w^2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

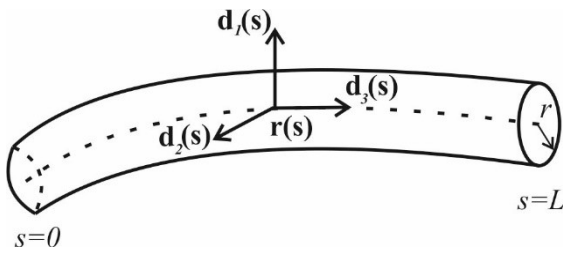


Рис. 1. Одномерный упругий объект (трос)

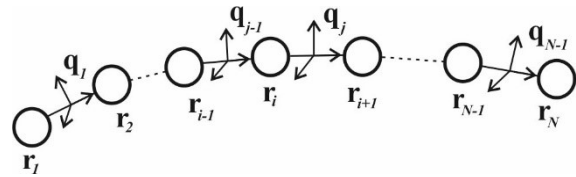


Рис. 2. Дискретное представление троса

Рассмотрим дискретное представление троса (рис. 2), в котором его положение задается узловыми точками $\mathbf{r}_i$, $i = \overline{1, N}$, а ориентация – с помощью элементов между точками троса, определяемых через кватернионы $\mathbf{q}_j$, $j = \overline{1, N-1}$.

В этом случае мы предполагаем, что масса троса сосредоточена в точках $\mathbf{r}_i$ и вычисляется как $m_i = \frac{1}{2} \rho \pi r^2 (l_{i-1} + l_i)$, где ρ – плотность троса, $l_i = \|\mathbf{r}_{i+1}^0 - \mathbf{r}_i^0\|$ – расстояние между i -й и $i+1$ -й точкой в начальном положении (при этом мы полагаем, что $l_0 = l_N = 0$). Применяя второй закон Ньютона, движение точек троса подчиняется следующим уравнениям:

$$m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{f}_i, \quad \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (3)$$

где $\mathbf{v}_i$ – скорость i -й точки троса; $\mathbf{f}_i$ – сумма всех сил, действующих на i -ю точку троса.

Вращательное движение троса основывается на представлении j -го элемента троса как твердого тела, имеющего тензор инерции $\mathbf{I}_j$. Тензор инерции в локальной системе координат j -го элемента троса имеет диагональный вид $\mathbf{I}'_j = (I_{kk}^j)$, $k=1,2,3$, где $I_{11}^j = I_{22}^j = \frac{1}{4} m_j r^2$ и $I_{33}^j = I_{11}^j + I_{22}^j$. Тогда тензор инерции $\mathbf{I}_j$ будет определяться [14] как $\mathbf{I}_j = \mathbf{R}_j \mathbf{I}'_j \mathbf{R}_j^T$, где $\mathbf{R}_j$ – мат-

рица перехода из системы координат j -го элемента троса в мировую систему координат. Используя уравнения Эйлера для вращательного движения твердого тела и кинематические уравнения для кватерниона [13], получим уравнения движения элементов троса:

$$\mathbf{I}_j \dot{\boldsymbol{\omega}}_j = \boldsymbol{\tau}_j - \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{I}_j \boldsymbol{\omega}_j, \quad \dot{\mathbf{q}}_j = \frac{1}{2} \mathbf{Q}_j \boldsymbol{\omega}_j, \quad \mathbf{Q}_j = \begin{pmatrix} -q_{x,j} & -q_{y,j} & -q_{z,j} \\ q_{w,j} & q_{z,j} & -q_{y,j} \\ -q_{z,j} & q_{w,j} & q_{x,j} \\ q_{y,j} & -q_{x,j} & q_{w,j} \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad (4)$$

где $\boldsymbol{\omega}_j$ – угловая скорость j -го элемента троса; $\boldsymbol{\tau}_j$ – сумма всех моментов, действующих на j -й элемент троса; $\mathbf{Q}_j$ – матрица кватерниона для j -го элемента троса.

Дифференциальные уравнения (3) и (4) определяют динамику движения троса, представленного в дискретной форме. Воспользуемся полунявной схемой Эйлера с шагом моделирования Δt для интегрирования этих уравнений. Тогда уравнения (3) примут вид

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i(t + \Delta t) &= \mathbf{v}_i(t) + m_i^{-1} \mathbf{f}_i \Delta t; \\ \mathbf{r}_i(t + \Delta t) &= \mathbf{r}_i(t) + \mathbf{v}_i(t + \Delta t) \Delta t, \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (5)$$

Применяя полунявную схему Эйлера для уравнения (4), получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_j(t + \Delta t) &= \boldsymbol{\omega}_j(t) + \mathbf{I}_j^{-1} (\boldsymbol{\tau}_j - \boldsymbol{\omega}_j(t) \times \mathbf{I}_j \boldsymbol{\omega}_j(t)) \Delta t; \\ \tilde{\mathbf{q}}_j(t + \Delta t) &= \mathbf{q}_j(t) + \frac{1}{2} \mathbf{Q}_j \boldsymbol{\omega}_j(t + \Delta t) \Delta t, \quad j = \overline{1, N-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

После вычисления кватернионов в (6) выполняется их нормализация $\mathbf{q}_j(t + \Delta t) = \frac{\tilde{\mathbf{q}}_j(t + \Delta t)}{\|\tilde{\mathbf{q}}_j(t + \Delta t)\|}$ для обеспечения условия единичности кватерниона.

С помощью уравнений (5) и (6) определяются новые положения точек и ориентации элементов троса, заданного в дискретной форме. Далее опишем методы моделирования нерастяжимости, изгиба и кручения троса, а также метод обработки ограничений вида (1).

Моделирование нерастяжимости троса

Трос является нерастяжимым, если его длина остается постоянной. Для дискретной модели троса это условие означает сохранение расстояния между соседними точками троса, т. е. должны быть выполнены ограничения:

$$G_i = \|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i\| - l_i = 0, \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (7)$$

Дифференцируя (7) по времени, получим ограничения относительно скоростей точек троса:

$$\dot{G}_i = \frac{d}{dt} (\sqrt{(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \cdot (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)} - l_i) = (\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_i = 0, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (8)$$

где $\mathbf{n}_i = \frac{\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i\|}$ – единичные векторы.

Объединяя уравнения (8) в одно, получим следующее матричное соотношение:

$$\mathbf{J}\mathbf{V} = \mathbf{0}, \mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\mathbf{n}_1^T & \mathbf{n}_1^T & \mathbf{0}^T & \cdots & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & -\mathbf{n}_2^T & \mathbf{n}_2^T & \cdots & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \cdots & -\mathbf{n}_{N-1}^T & \mathbf{n}_{N-1}^T \end{pmatrix}, \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_N \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где матрица Якоби $\mathbf{J}$ имеет размерность $N-1$ на $3*N$.

Воспользуемся методом множителей Лагранжа [15], согласно которому силы, обеспечивающие выполнение ограничений (9), имеют вид $\mathbf{f} = \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda}$, где $\mathbf{f}$ – объединенный вектор сил размерности $3*N$; $\boldsymbol{\lambda}$ – вектор неизвестных множителей Лагранжа размерности $N-1$. Объединим первые уравнения из (5) в одно с подстановкой выражения для вектора сил $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{V}(t + \Delta t) = \mathbf{V}(t) + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{p}, \quad (10)$$

где $\mathbf{M}^{-1} = \text{diag} \{m_1^{-1} \mathbf{E}_3, m_2^{-1} \mathbf{E}_3, \dots, m_N^{-1} \mathbf{E}_3\}$ – диагональная матрица обратных масс размерности $3*N$ на $3*N$; $\mathbf{p} = \boldsymbol{\lambda} \Delta t$ – вектор неизвестных импульсов; $\mathbf{E}_3$ – единичная матрица размерности 3 на 3.

Подставляя это уравнение в (9) для момента времени $t + \Delta t$, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{J}\mathbf{V}(t + \Delta t) = \mathbf{J}\mathbf{V}(t) + \mathbf{J}\mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{p} = \mathbf{0}.$$

Эту систему уравнений запишем в виде:

$$\mathbf{V}(t + \Delta t) = \mathbf{V}(t) + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{p}, \quad (11)$$

$$\text{где } \mathbf{A} = \mathbf{J}\mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T = \begin{pmatrix} m_1^{-1} + m_2^{-1} & -m_2^{-1} \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 & 0 & \vdots & 0 \\ -m_2^{-1} \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 & m_2^{-1} + m_3^{-1} & -m_3^{-1} \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -m_3^{-1} \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_3 & m_3^{-1} + m_4^{-1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -m_{N-1}^{-1} \mathbf{n}_{N-2} \mathbf{n}_{N-1} \\ 0 & 0 & \cdots & -m_{N-1}^{-1} \mathbf{n}_{N-2} \mathbf{n}_{N-1} & m_{N-1}^{-1} + m_N^{-1} \end{pmatrix} -$$

трехдиагональная симметричная матрица размерности $N-1$ на $N-1$, $\mathbf{b} = -\mathbf{J}\mathbf{V}(t)$ – вектор правой части размерности $N-1$.

Эта система решается с помощью метода прогонки [16, с. 45], предназначенного для решения систем линейных уравнений с трехдиагональной матрицей. Для возможности применения метода прогонки матрица системы уравнений должна быть с диагональным преобладанием. Покажем, что матрица $\mathbf{A}$ обладает этим свойством. Действительно, рассмотрим i -й столбец матрицы $\mathbf{A}$: $c_i = m_i^{-1} + m_{i+1}^{-1}$ – диагональный элемент матрицы, $a_i = -m_i^{-1} \mathbf{n}_{i-1} \mathbf{n}_i$ – элемент, лежащий выше диагонали, $b_i = -m_{i+1}^{-1} \mathbf{n}_i \mathbf{n}_{i+1}$ – элемент, лежащий ниже диагонали (при этом $a_1 = 0$ и $b_{N-1} = 0$). Тогда, применяя условие единичности векторов $\|\mathbf{n}_i\| = 1$ и неравенство Коши – Буняковского, получим, что справедливо неравенство:

$$|c_i| = m_i^{-1} + m_{i+1}^{-1} = m_i^{-1} \|\mathbf{n}_{i-1}\| \|\mathbf{n}_i\| + m_{i+1}^{-1} \|\mathbf{n}_i\| \|\mathbf{n}_{i+1}\| \geq m_i^{-1} \mathbf{n}_{i-1} \mathbf{n}_i + m_{i+1}^{-1} \mathbf{n}_i \mathbf{n}_{i+1} = |a_i| + |b_i|,$$

которое соответствует условию диагонального преобладания матрицы $\mathbf{A}$.

Таким образом, решая систему (11) и подставляя полученные значения импульсов $\mathbf{p}$ в (10), получим новые скорости $\mathbf{V}(t + \Delta t)$ точек троса, для которых выполнено (9).

В процессе моделирования ограничения (7) могут нарушаться, поэтому для их восстановления применяется стабилизация на основе метода раздельных импульсов [12]. Реализация этого метода основывается на введении на каждом шаге моделирования фиктивных скоростей $\mathbf{V}_i^*$ точек троса. Через эти скорости составляются ограничения, аналогичные (9):

$$\mathbf{J}\mathbf{V}^* = -ERP \frac{\mathbf{G}}{\Delta t}, \quad \mathbf{G} = (G_1, G_2, \dots, G_{N-1})^T,$$

где $ERP \in [0, 1]$ – параметр уменьшения ошибки.

Для обеспечения этих ограничений вычисляются фиктивные импульсы $\mathbf{p}^*$ из системы уравнений $\mathbf{A}\mathbf{p}^* = \mathbf{b}^*$ методом прогонки, где $\mathbf{b}^* = -\mathbf{J}\mathbf{V}^*(t) - ERP \frac{\mathbf{G}}{\Delta t}$. С деталями реализации метода раздельных импульсов можно ознакомиться в [12].

Моделирование изгиба и кручения троса

Моделирование изгиба и кручения троса основывается на рассмотрении вектора Дарбу $\mathbf{u}(s)$, означающего скорость деформации при изгибе и кручении троса. Из дифференциальной геометрии [17] известно, что векторы $\mathbf{d}_k$ из (2) подчиняются следующим соотношениям:

$$\mathbf{d}'_k = \frac{\partial \mathbf{d}_k}{\partial s} = \mathbf{u} \times \mathbf{d}_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Используя эти соотношения и (2) можно показать [11], что компоненты u_k можно представить в следующем виде:

$$u_k = 2\mathbf{B}_k \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}', \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где $\mathbf{B}_k$, $k = 1, 2, 3$ – постоянные кососимметричные матрицы.

Деформация троса при изгибе и кручении определяется отклонением вектора Дарбу от его недеформированного состояния $\hat{\mathbf{u}}(s)$. Используя соотношения (12), получим выражение для потенциальной энергии деформации изгиба и кручения троса в непрерывной форме:

$$V_b = \frac{1}{2} \int_0^L \sum_{k=1}^3 K_{kk} (u_k - \hat{u}_k)^2 ds = \frac{1}{2} \int_0^L \sum_{k=1}^3 K_{kk} (2\mathbf{B}_k \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}' - \hat{u}_k)^2 ds, \quad (13)$$

где K_{kk} – компоненты тензора жесткости, вычисляемые по формулам $K_{11} = K_{22} = E \frac{\pi r^2}{4}$ и $K_{33} = G \frac{\pi r^2}{2}$; E – модуль Юнга при изгибе троса; G – модуль сдвига троса.

Перейдем к дискретной потенциальной энергии деформации изгиба и кручения троса. Для этого воспользуемся методом конечных элементов и проинтегрируем потенциальную энергию из (13) для каждого элемента ориентации. В этом случае кватернион $\mathbf{q}$ в (13) для j -го элемента троса аппроксимируется с помощью постоянной функции формы вида:

$$\bar{\mathbf{q}}_j = \frac{1}{2}(\mathbf{q}_j + \mathbf{q}_{j+1}), \quad j = \overline{1, N-2}.$$

В свою очередь, производная $\mathbf{q}'$ внутри элемента аппроксимируется как

$$\mathbf{q}'_j = \frac{\mathbf{q}_{j+1} - \mathbf{q}_j}{l'_j}, \quad j = \overline{1, N-2},$$

где $l'_j = \frac{1}{2}(l_j + l_{j+1})$; $j = \overline{1, N-2}$ – усредненное значение длины элемента ориентации троса.

Тогда потенциальная энергия (13) для j -го элемента троса примет вид:

$$V_b[j] = \frac{1}{2} \int_0^{l'_j} \sum_{k=1}^3 K_{kk} (2\mathbf{B}_k \bar{\mathbf{q}}_j \cdot \mathbf{q}'_j - \hat{u}_{k,j})^2 d\xi = \frac{l'_j}{2} \sum_{k=1}^3 K_{kk} (\mathbf{B}_k (\mathbf{q}_j + \mathbf{q}_{j+1}) \cdot (\mathbf{q}_{j+1} - \mathbf{q}_j) - \hat{u}_{k,j})^2.$$

Дифференцируя потенциальную энергию $V_b[j]$ деформации изгиба и кручения для j -го элемента троса, вычислим моменты, действующие на j -й и $j+1$ -й элемент троса:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_j &= -\frac{1}{2} \mathbf{Q}_j^T \frac{\partial V_b[j]}{\partial \mathbf{q}_j} = \frac{1}{l'_j} \mathbf{Q}_j^T \sum_{k=1}^3 K_{kk} (\mathbf{B}_k (\mathbf{q}_j + \mathbf{q}_{j+1}) \cdot (\mathbf{q}_{j+1} - \mathbf{q}_j) - \hat{u}_{k,j}) \mathbf{B}_k \mathbf{q}_{j+1}; \\ \boldsymbol{\tau}_{j+1} &= -\frac{1}{2} \mathbf{Q}_{j+1}^T \frac{\partial V_b[j]}{\partial \mathbf{q}_{j+1}} = -\frac{1}{l'_j} \mathbf{Q}_{j+1}^T \sum_{k=1}^3 K_{kk} (\mathbf{B}_k (\mathbf{q}_j + \mathbf{q}_{j+1}) \cdot (\mathbf{q}_{j+1} - \mathbf{q}_j) - \hat{u}_{k,j}) \mathbf{B}_k \mathbf{q}_j. \end{aligned} \quad (14)$$

При дифференцировании было использовано (см. (12)) свойство кососимметричности матриц $\mathbf{B}_k$: $(\mathbf{B}_k \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = -(\mathbf{q}_1, \mathbf{B}_k \mathbf{q}_2)$, $k = 1, 2, 3$.

Моменты деформации изгиба и кручения элементов троса (14) применяются в уравнениях (6) вращательного движения троса.

Моделирование ограничений для троса

В процессе моделирования динамики троса необходимо, чтобы было выполнено ограничение (1). Используя аппроксимацию производной $\mathbf{r}'_i = \frac{\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i}{l_i}$, получим ограничения для дискретной модели троса вида:

$$\mathbf{G}_i = \frac{\mathbf{r}'_i}{\|\mathbf{r}'_i\|} - \mathbf{d}_3(\mathbf{q}_i) = \frac{\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i\|} - \mathbf{d}_3(\mathbf{q}_i) = \mathbf{0}, \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (15)$$

Дифференцируя (15) по времени, получим ограничения относительно линейных и угловых скоростей троса:

$$\dot{\mathbf{G}}_i = \mathbf{R}_{pi}(\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i) - \mathbf{R}_{qi}\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{J}_{p,i+1}\mathbf{v}_{i+1} + \mathbf{J}_{p,i}\mathbf{v}_i + \mathbf{J}_{q,i}\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{0}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (16)$$

где $\mathbf{R}_{pi} = \frac{1}{\|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i\|}(\mathbf{E}_3 - \mathbf{n}_i\mathbf{n}_i^T)$, $\mathbf{n}_i = \frac{\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i\|}$, $\mathbf{R}_{qi} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{d}_3(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \mathbf{Q}_i$. Матрицы $\mathbf{J}_{p,i+1} = -\mathbf{J}_{p,i} = \mathbf{R}_{pi}$ и $\mathbf{J}_{q,i} = -\mathbf{R}_{qi}$ являются матрицами Якоби ограничения (16). При дифференцировании было использовано второе уравнение из (4).

Ограничения вида (16) обрабатываются с помощью метода последовательных импульсов [12]. Аналогично методу множителей Лагранжа импульс, обеспечивающий ограничение (16) для i -го элемента, будет иметь вид $\Delta \mathbf{p}_i = \mathbf{J}^T \Delta \boldsymbol{\lambda}_i$. Переходя от сил к импульсам для первых уравнений (5) и (6), получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{i+1}(t + \Delta t) &= \mathbf{v}_{i+1}(t) + m_{i+1}^{-1} \mathbf{J}_{p,i+1}^T \Delta \boldsymbol{\lambda}_i = \mathbf{v}_{i+1}(t) + m_{i+1}^{-1} \mathbf{R}_{pi}^T \Delta \boldsymbol{\lambda}_i; \\ \mathbf{v}_i(t + \Delta t) &= \mathbf{v}_i(t) + m_i^{-1} \mathbf{J}_{p,i}^T \Delta \boldsymbol{\lambda}_i = \mathbf{v}_i(t) - m_i^{-1} \mathbf{R}_{pi}^T \Delta \boldsymbol{\lambda}_i; \\ \boldsymbol{\omega}_i(t + \Delta t) &= \boldsymbol{\omega}_i(t) + \mathbf{I}_i^{-1} \mathbf{J}_{q,i}^T \Delta \boldsymbol{\lambda}_i = \boldsymbol{\omega}_i(t) - \mathbf{I}_i^{-1} \mathbf{R}_{qi}^T \Delta \boldsymbol{\lambda}_i. \end{aligned} \quad (17)$$

Далее подставим (17) в ограничение (16) для момента времени $t + \Delta t$:

$$[\mathbf{R}_{pi} \mathbf{R}_{pi}^T (m_i^{-1} + m_{i+1}^{-1}) + \mathbf{R}_{qi} \mathbf{I}_i^{-1} \mathbf{R}_{qi}^T] \Delta \boldsymbol{\lambda}_i = \mathbf{R}_{pi}(\mathbf{v}_i(t) - \mathbf{v}_{i+1}(t)) + \mathbf{R}_{qi} \boldsymbol{\omega}_i(t), \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (18)$$

Идея метода последовательных импульсов состоит в том, что мы последовательно вычисляем импульсы $\Delta \boldsymbol{\lambda}_i$ из уравнений (18), а затем, используя (17), определяем новые скорости. Эта процедура выполняется итерационно и продолжается до тех пор, пока не будет выполнено $\|\Delta \boldsymbol{\lambda}_i\| \leq \varepsilon$ для всех ограничений вида (16). Для ускорения сходимости предлагаемого метода вычисленные импульсы $\Delta \boldsymbol{\lambda}_i$ накапливаются и используются на следующем шаге моделирования. В процессе обеспечения (16) ограничения (8) нерастяжимости троса могут нарушаться, поэтому при необходимости потребуется повторное решение системы (11) внутри шага моделирования $t + \Delta t$. Обеспечение ограничений (15) осуществляется с применением стабилизации на основе метода раздельных импульсов [12].

Моделирование троса в имитационно-тренажерном комплексе

Предложенные методы и алгоритмы моделирования динамики тросов были реализованы в виде программных модулей подсистемы динамики имитационно-тренажерного комплекса, разработанного в ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН. Данный программный комплекс предназначен для компьютерной симуляции виртуальных роботов в виртуальном окружении. Виртуальные 3D-модели роботов и окружающей обстановки, содержащие одномерные объекты (тросы, канаты и т. д.), создаются в системе трехмерного моделирования Autodesk 3ds Max. В этой системе задается визуальное поведение троса с помощью модификатора skin, применяемого к геометрии троса. В рамках рассматриваемого модификатора создается набор костей,

располагающихся вдоль троса и влияющих с некоторым коэффициентом на вершины его геометрии. Изменения положений и ориентаций костей позволяют визуализировать деформацию изгиба и кручения троса. При таком подходе подсистема динамики рассчитывает новые координаты троса и других объектов сцены и передает по специальному протоколу в подсистему визуализации, которая синтезирует изображение виртуальной сцены и тросов с новыми положениями и ориентациями объектов. Один шаг моделирования и визуализации занимает не более 40 мс, обеспечивая режим реального времени (не менее 25 кадров в секунду).



Рис. 3. Мобильный робот КРТ100-МП

Апробация созданных программных модулей для моделирования динамики троса была проведена на примере модифицированной виртуальной модели мобильного робота КРТ 100-МП с тележкой (рис. 3), закрепленной к роботу с помощью троса (в оригинальной модели тележка крепится к корпусу робота с помощью сферического шарнира). Для троса выбраны следующие параметры: длина $l = 2,8$ м, радиус $r = 1,5$ см, плотность $\rho = 1200$ кг/м³, модуль Юнга $E = 0,05$ МПа, модуль сдвига $G = 0,1$ МПа. Вектор Дарбу для недеформированного состояния троса выбран $\hat{\mathbf{u}}_j = \mathbf{0}$, $j = \overline{1, N-2}$. Для обеспечения реального времени и стабильности моделирования динамики был выбран шаг Δt , не превышающий 15 мс. Результаты апробации показали, что разработанные в статье методы и алгоритмы являются быстрыми и обеспечивают стабильность моделирования троса.

Заключение. В работе рассмотрена задача моделирования динамики одномерных упругих объектов (тросов и т. д.) в системах виртуального окружения. Отличительной особенностью предлагаемых решений является применение разработанного метода последовательных импульсов совместно с теорией упругости Коссера. Реализация метода прогонки для моделирования нерастяжимых тросов позволяет существенно уменьшить время вычислений. В дальнейшем планируется усовершенствовать предложенные подходы для обработки коллизий троса с самим собой и с другими объектами виртуального окружения.

Данное исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-07-01104.

Литература

1. Pai D. Strands: Interactive simulation of thin solids using cosserat models // Eurographics. 2002. V. 21. № 3. P. 347–352.
2. Chentanez N., Alterovitz R., Ritchie D., Cho L., Hauser K. K., Goldberg K., Shewchuk J. R.

and O'Brien J. F. Interactive simulation of surgical needle insertion and steering // ACM Transactions on Graphics. 2009. V. 28. № 3. P. 88:1–88:10.

3. Lenoir J., Cotin S., Duriez C. and Neumann P. Interactive physically-based simulation of catheter and guidewire // Computer & Graphics. V. 30. № 3. P. 417–423.

4. Muller M., Chentanez N., Kim T.-Y. Fast simulation of inextensible hair and fur. In Proceedings of Virtual Reality Interactions and Physical Simulations (VRIPhys) // Eurographics Association 3, 2012.

5. Kugelstadt T., Schomer E. Position and orientation based Cosserat rods // ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on computer animation. Zurich : Eurographics Association, 2016. P. 169–178.

6. Kubiak B., Pietroni N., Ganovelli F., and Fratarcangeli M. A robust method for real-time thread simulation // Proc. ACM Symp. Virtual Reality Software and Technology (VRST '07). 2007. P. 85–88.

7. Selle A., Lentine M. G., Fedkiw R. A mass spring model for hair simulation // ACM Trans. Graphics (Proc. ACM SIGGRAPH), 2008.

8. Martin S., Kaufmann P., Botsch M., Grinspun E. and Gross M. Unified simulation of elastic rods, shells, and solids // ACM Trans Graph. 2010. V. 28. № 3 (Jul). P. 39:1–39:10.

9. Antman S. S. Nonlinear problems of elasticity. Springer, 2005.

10. Жилин П. А. Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней : учеб. пособие. СПб. : Изд-во Политех. ун-та, 2007. 101 с.

11. Spillmann J., Teschner M. CoRdE. Cosserat rod elements for the dynamic simulation of one-dimensional elastic objects // Eurographics. ACM SIGGRAPH, 2007. P. 1–10.

12. Михайлюк М. В., Страшинов Е. В. Моделирование системы связанных тел методом последовательных импульсов // Тр. НИИСИ РАН. 2014. Т. 4. № 2. С. 52–60.

13. Schwab A. L., Meijaard J. P. How to draw Euler angles and utilize Euler parameters // Proc. IDEETC/CIE 2006, ASME 2006 : International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, 2006.

14. Garstenauer H. A Unified Framework for Rigid Body Dynamics. Master's thesis. Linz : Johannes Kepler Universitat, 2006. 139 p.

15. Shabana A. A. Computational Dynamics, Third edition. John Wiley & Sons Inc., 2010. 528 p.

16. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы : учеб. пособие для вузов. М. : Наука, 1989, 432 с.

17. Позняк Э. Г., Шикин Е. В. Дифференциальная геометрия: первое знакомство. 2-е изд., испр. и доп. М. : Едиториал УРСС, 2003. 408 с.

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ ПСЕВДОЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ И ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

О. А. Дубовик, А. О. Дубовик

Сургутский государственный университет, alldubovik@gmail.com

Многие свойства функций Бесселя с целочисленными индексами связаны с группой движений евклидовой плоскости. Замена компактной подгруппы евклидовых вращений на некомпактную подгруппу гиперболических и предлагаемая конструкция представлений приводят к изучению групповых свойств функций Бесселя с произвольными индексами. Выявлены связи функций Бесселя с другими специальными функциями, наиболее часто встречающимися в приложениях Ганкеля, Макдональда, Неймана, Г-функций и В-функций Эйлера.

Ключевые слова: представления групп, неприводимость, функции Бесселя.

REPRESENTATIONS OF GROUP OF MOTIONS OF THE PSEUDO-EUCLIDEAN PLANE AND THE BESSEL FUNCTIONS

O. A. Dubovik, A. O. Dubovik

Surgut State University, alldubovik@gmail.com

Many properties of Bessel functions with integer indices are related to the group of motions of the Euclidean plane. The replacement of the compact subgroup of Euclidean rotations by a noncompact subgroup of hyperbolic rotations and the proposed construction of representations lead to the study of the group properties of Bessel functions with arbitrary indices. The connections of Bessel functions with other special functions, most frequently encountered in applications: Hankel, MacDonald, Neumann, Euler Γ -functions and B-functions, are found.

Keywords: group representations, irreducibility, Bessel functions.

Рассматриваются специальные функции математической физики, относящиеся к классу гипергеометрических. Именно этот класс поддается теоретико-групповой интерпретации своих свойств. Существенный вклад в развитие такого подхода внесли Н. Я. Виленкин [1–3] и И. М. Гельфанд [4]. Среди работ иностранных авторов отметим следующие [5–7]. В настоящее время развитие этой теории переживает ренессанс в связи с появившимися новыми задачами [4].

В статье рассматривается нестандартная реализация представлений группы $MH(2)$ движений псевдоевклидовой плоскости. Данная реализация приводит к изучению функций Бесселя, Ганкеля, Макдональда, Неймана, Г-функций и В-функций Эйлера:

1. Преобразование группы движений псевдоевклидовой плоскости $MH(2)$ задается формулами [1]:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \operatorname{ch} \varphi + x_2 \operatorname{sh} \varphi + p, \\ x_2' = x_1 \operatorname{sh} \varphi + x_2 \operatorname{ch} \varphi + q, \end{cases} \quad (1)$$

где $-\infty < p < \infty$, $-\infty < q < \infty$, $-\infty < \varphi < \infty$.

Поставив всякому преобразованию (1) в соответствие матрицу:

$$g = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \varphi & \operatorname{sh} \varphi & p \\ \operatorname{sh} \varphi & \operatorname{ch} \varphi & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

реализуем группу $MH(2)$ как группу матриц третьего порядка. Отметим две подгруппы $MH(2)$. Первая состоит из гиперболических вращений $g(0, 0, \varphi)$. Обозначим ее через Ω . Вторая подгруппа E_2 состоит из параллельных переносов $g(p, q, 0)$ и изоморфна евклидовой плоскости. Поэтому подгруппу Ω можно рассматривать как автоморфизмы абелевой группы E_2 . Следовательно, группа $MH(2)$ является полупрямым произведением абелевой группы E_2 и группы ее автоморфизмов Ω

$$MH(2) = E_2 * \Omega,$$

с умножением $(b_1, A_1)(b_2, A_2) = (b_1 + A_1 b_2, A_1 A_2)$, где $g(b, A)$, $b \in E_2$, $A \in \Omega$.

2. Представление группы $MH(2)$ строится в пространстве бесконечно дифференцируемых финитных функций $f(A)$ на Ω . Операторы представления $T_\chi(g)$ зададим формулой [8]:

$$T_\chi(g_0)f(A) = \chi(A^{-1}b_0)f(A_0^{-1}A), \quad (2)$$

где χ – одномерное представление коммутативной группы E_2 .

Не трудно проверить мультипликативное свойство:

$$T_\chi(g_1) \cdot T_\chi(g_2) = T_\chi(g_1 \cdot g_2)$$

и значит, $g \rightarrow T_\chi(g)$ – представление.

Каждое одномерное представление χ группы E_2 задается парой комплексных чисел (χ_1, χ_2)

$$\chi(b) = \exp(\chi_1 p + \chi_2 q),$$

поэтому группа X одномерных представлений E_2 изоморфна двумерному комплексному линейному пространству $\mathbb{C}_2$. Если $\chi \in X$, то $\chi_A: b \rightarrow \chi(A^{-1}b)$ также является элементом группы X . Поэтому X разбивается на непересекающиеся классы транзитивности по отношению к группе Ω . Каждому классу отвечает одно и то же представление (2) группы $MH(2)$. Тогда для описания этих представлений достаточно выбрать по одному элементу $\chi \in X$ из каждого класса транзитивности. Классу транзитивности, состоящему из пар комплексных чисел $(R \operatorname{ch} y, R \operatorname{sh} y)$, соответствует представление:

$$T_R(g)f(y) = \exp\{R(-p \operatorname{ch} y + q \operatorname{sh} y)\}f(y - \varphi). \quad (3)$$

Относительно скалярного произведения:

$$(f_1, f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) \overline{f_2(y)} dy$$

представление унитарно тогда и только тогда, когда R – чисто мнимое число. При $R \neq 0$ представление неприводимо [8].

3. Построим представление группы $MH(2)$ в пространстве H бесконечно дифференцируемых финитных функций на мнимой прямой y с носителем, не содержащим точку $y = 0$.

$$T_R(g)f(y) = \exp \left\{ R \left(-\frac{1}{2} \left(y + \frac{1}{y} \right) p + \frac{1}{2} \left(y - \frac{1}{y} \right) q \right) \right\} f(\exp(-\varphi)y).$$

Заметим, что H представимо в виде прямой суммы двух инвариантных подпространств, в каждом из которых $T_R(g)$ действует неприводимо и эквивалентно представлению (3).

Перейдем к другой реализации представлений $T_R(g)$. С этой целью каждой функции $f(y) \in H$ поставим в соответствие пару функций:

$$F_{\pm}(\lambda) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} f(y)(\pm y)^{\lambda-1} dy, \quad |\arg(\pm y)| = \frac{\pi}{2}. \quad (4)$$

Преобразование (4) сводится к преобразованию Меллина [1]:

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x)(x)^{\lambda-1} dx.$$

Пользуясь формулой обращения:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(\lambda)(x)^{-\lambda} d\lambda,$$

можно установить формулу обратного преобразования для (4) [8]:

$$f(y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{\sin \pi \hat{\lambda}} \left[F_+(\hat{\lambda})(-y)^{-\hat{\lambda}} + F_-(\hat{\lambda})y^{-\hat{\lambda}} \right] d\hat{\lambda}, \quad (5)$$

где $a \neq 0, \pm 1, \pm 2$,

Однако убедиться в справедливости (5) проще следующим образом. Умножим обе части равенства (5) на $(\pm y)^{\lambda-1}$ и проинтегрируем по всей мнимой оси $(-i\infty, +i\infty)$.

При $\operatorname{Re}(\lambda - \hat{\lambda}) > 0$ можно менять интегрирование по $\hat{\lambda}$ и по y на $(-i, +i)$, при $\operatorname{Re}(\lambda - \hat{\lambda}) < 0$ можно менять интегрирование по $\hat{\lambda}$ и по y на $(-i\infty, -i) \cup (+i, +i\infty)$. После перестановки порядка интегрирования, воспользовавшись формулой Коши комплексного анализа, получим тождество.

Найдем выражение операторов представления $T_R(g)$ в пространстве пар $F(\lambda)$. Обозначим пару, соответствующую функции $T_R(g)f(y)$, через $Q_R(g)F \equiv (Q_R(g)F_+, Q_R(g)F_-)$. Тогда будем иметь:

$$Q_R(g)F_{\pm}(\lambda) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} T_R(g)f(y)(\pm y)^{\lambda-1} dy. \quad (6)$$

Для элементов группы $MH(2)$ вида $g(0, 0, \varphi)$ отсюда получаем:

$$Q_R(g)F(\lambda) = \exp\{\lambda\varphi\} F(\lambda).$$

Для элементов группы $MH(2)$ вида $g(p, q, 0)$:

$$T_R(g)f(y) = \exp \left\{ R \left(-\frac{1}{2} \left(y + \frac{1}{y} \right) p + \frac{1}{2} \left(y - \frac{1}{y} \right) q \right) \right\} f(y).$$

Подставляя в (6) и пользуясь формулой (5), получим:

$$\begin{aligned} Q_R(g)F_{\pm}(\lambda) = & -\frac{1}{4\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp \left\{ R \left(-\frac{1}{2} \left(y + \frac{1}{y} \right) p + \frac{1}{2} \left(y - \frac{1}{y} \right) q \right) \right\} (\pm y)^{\lambda-1} dy \times \\ & \times \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{\sin \pi \hat{\lambda}} \left[F_+(\hat{\lambda})(-y)^{-\hat{\lambda}} + F_-(\hat{\lambda})y^{-\hat{\lambda}} \right] d\hat{\lambda}. \end{aligned} \quad (7)$$

При вещественном $R \neq 0$, $0 < \operatorname{Re}(\lambda - \hat{\lambda}) < 1$ и $p \neq q$ возможна перестановка порядка интегрирования, и операторы (7) переходят в операторы вида:

$$Q_R(g)F_{\pm}(\lambda) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} K_{\pm\mp}(\lambda, \hat{\lambda}; R; g) F_+(\hat{\lambda}) d\hat{\lambda} + \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} K_{\pm\mp}(\lambda, \hat{\lambda}; R; g) F_-(\hat{\lambda}) d\hat{\lambda}, \quad (8)$$

где положено,

$$K_{\pm\mp}(\lambda, \hat{\lambda}; R; g) = -\frac{1}{4\pi \sin \pi \hat{\lambda}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp \left\{ R \left(-\frac{1}{2} \left(y + \frac{1}{y} \right) p + \frac{1}{2} \left(y - \frac{1}{y} \right) q \right) \right\} (\pm y)^{\lambda-1} (\mp y)^{-\hat{\lambda}} dy.$$

Таким образом, операторы (8) являются интегральными операторами в пространстве пар функций $F(\lambda) = (F_+, F_-)$:

$$Q_R(g)F(\lambda) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} K(\lambda, \hat{\lambda}, R, g) F(\hat{\lambda}) d\hat{\lambda}$$

с ядрами-матрицами

$$K(\lambda, \hat{\lambda}; R; g) = \begin{pmatrix} K_{+-} & K_{++} \\ K_{--} & K_{-+} \end{pmatrix}.$$

4. При $p = 0$, $Rq \neq 0$

$$K_{\pm\mp} = -\frac{1}{4\pi \sin \pi \hat{\lambda}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp \left\{ \frac{Rq}{2} \left(y - \frac{1}{y} \right) \right\} (\pm y)^{\lambda-1} (\mp y)^{-\hat{\lambda}} dy.$$

Интеграл выражается через функции Ганкеля [1]:

$$\begin{aligned} K_{\pm\mp} = & \frac{1}{4 \sin \pi \hat{\lambda}} \left(\exp \left\{ i \frac{\pi}{2} \left(\pm(\lambda-1) \mp (-\hat{\lambda}) \right) + i \frac{\pi}{2} \nu \right\} H_v^{(1)}(Rq) - \right. \\ & \left. - \exp \left\{ i \frac{\pi}{2} \left(\mp(\lambda-1) \pm (-\hat{\lambda}) \right) - i \frac{\pi}{2} \nu \right\} H_v^{(2)}(Rq) \right), \end{aligned}$$

где $\nu = \lambda - \hat{\lambda}$.

Наибольший интерес при этом вызывает появление функций Бесселя:

$$J_{-v}(Rq) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp\left\{\frac{Rq}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right\} t^{v-1} dt, \quad Rq > 0, \quad J_{-v} = \frac{1}{2}\left(H_{-v}^{(1)} + H_{-v}^{(2)}\right).$$

В таком случае,

$$\begin{aligned} K_{++} &= \frac{1}{2i \sin \pi \hat{\lambda}} J_{-v}(Rq), \quad K_{--} = \frac{i}{2 \sin \pi \hat{\lambda}} J_v(Rq), \\ K_{+-} &= \frac{1}{4i \sin \pi \hat{\lambda}} \left(\exp\{i\pi \hat{\lambda}\} H_v^{(1)}(Rq) + \exp\{-i\pi \hat{\lambda}\} H_v^{(2)}(Rq) \right), \\ K_{-+} &= \frac{i}{4 \sin \pi \hat{\lambda}} \left(\exp\{-i\pi \hat{\lambda}\} H_v^{(1)}(Rq) + \exp\{i\pi \hat{\lambda}\} H_v^{(2)}(Rq) \right) = \\ &= \frac{i}{4 \sin \pi \hat{\lambda}} \left(\exp\{-i\pi \hat{\lambda}\} H_{-v}^{(1)}(Rq) + \exp\{i\pi \hat{\lambda}\} H_{-v}^{(2)}(Rq) \right). \end{aligned}$$

При $q = 0$, $Rp > 0$

$$K_{\pm\mp} = -\frac{1}{4\pi \sin \pi \hat{\lambda}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp\left\{-\frac{Rp}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)\right\} (\pm y)^{\lambda-1} (\mp y)^{-\hat{\lambda}} dy,$$

стягивая контур интегрирования к положительной части вещественной оси, получим выражение ядра через функцию Макдональда, которая имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} K_v(z) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-z \operatorname{ch} t \pm vt\} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \exp\left\{-\frac{z}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right\} t^{\pm v-1} dt, \\ K &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sin \pi v}{\sin \pi \hat{\lambda}} & \frac{\sin \pi \lambda}{\sin \pi \hat{\lambda}} \end{pmatrix} \frac{1}{\pi i} K_v(Rp). \end{aligned}$$

При $Rp = -Rq > 0$ получим выражение ядра через Γ -функцию Эйлера:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^{\infty} \exp\{-t\} t^{z-1} dt \\ K_{\pm\mp} &= -\frac{1}{4\pi \sin \pi \hat{\lambda}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp\{-Rpy\} (\pm y)^{\lambda-1} (\mp y)^{-\hat{\lambda}} dy. \end{aligned}$$

Как и в предыдущем случае получим:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sin \pi v}{\sin \pi \hat{\lambda}} & \frac{\sin \pi \lambda}{\sin \pi \hat{\lambda}} \end{pmatrix} \frac{(Rp)^{-v}}{2\pi i} \Gamma(v).$$

5. В силу мультипликативного свойства:

$$Q_R(g_1)Q_R(g_2) = Q_R(g_1g_2)$$

имеет место соотношение:

$$K(\lambda, \hat{\lambda}; R; g_1 g_2) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} K(\lambda, \lambda'; R; g_1) K(\lambda', \hat{\lambda}; R; g_2) d\lambda'. \quad (9)$$

Выбор различных элементов g_1 и g_2 группы $MH(2)$ приводит к различным соотношениям для функций Бесселя, Ганкеля, Макдональда, Неймана, Г-функций и В-функций Эйлера. Число получаемых соотношений сопоставимо с приведенными в справочниках Г. Бейтмена и А. Эрдейи [9–10].

В качестве примера приведем лишь некоторые из получаемых соотношений. Из равенства для элементов группы

$$g(p, -p, 0) g(0, q, 0) = g(p, -p+q, 0) = g(0, 0, \varphi) g(0, r, 0) g(0, 0, -\varphi),$$

где $p > 0$, $q > 2p$, $-p+q = r \operatorname{ch} \varphi$, $p = r \operatorname{sh} \varphi$, $r^2 = q(-2p+q)$, $\exp\{2\varphi\} = \frac{q}{-2p+q}$, поскольку гиперболическому вращению на угол φ соответствует оператор умножения на $\exp\{\lambda\varphi\}$, получим после подстановки значения ядер в (9):

$$\exp\{(\lambda - \hat{\lambda})\varphi\} K_{++}(\lambda, \hat{\lambda}; R; g(0, r, 0)) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{(Rp)^{-(\lambda-\lambda')}}{2\pi i} \Gamma(\lambda-\lambda') \frac{1}{2i \sin \pi \hat{\lambda}} J_{-(\lambda'-\hat{\lambda})}(Rq) d\lambda',$$

или, делая замену $\nu = \lambda - \hat{\lambda}$ и $\mu = \lambda' - \hat{\lambda}$, получим:

$$\left(\frac{q}{q-2p}\right)^{\frac{\nu}{2}} J_{-\nu}(Rr) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} (Rp)^{\mu-\nu} \Gamma(\nu-\mu) J_{-\mu}(Rq) d\mu.$$

Из равенства для элементов группы

$$g(p, 0, 0) g(0, 0, \varphi) g(0, q, 0) = g(p+q \operatorname{sh} \varphi, q \operatorname{ch} \varphi, \varphi) = g(0, 0, \theta) g(0, r, 0) g(0, 0, \varphi-\theta),$$

где $q > 0$, $p+q \operatorname{sh} \varphi = r \operatorname{sh} \theta$, $q \operatorname{ch} \varphi = r \operatorname{ch} \theta$, $r^2 = q^2 - p^2 - 2pq \operatorname{sh} \varphi$, $\operatorname{th} \theta = \frac{p+q \operatorname{sh} \varphi}{q \operatorname{ch} \varphi}$, получим функциональные соотношения для функций Бесселя и Макдональда:

$$\exp\{\nu\theta\} J_{-\nu}(Rr) = \frac{1}{\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} K_{\nu-\mu}(Rp) J_{-\mu}(Rq) \exp\{\mu\theta\} d\mu.$$

Соотношения несколько иного толка, такие как дифференциальные уравнения, рекуррентные равенства и т. п., получаются, если рассматривать алгебру Ли и соответствующие инфинитезимальные операторы.

В частности, равенство для операторов

$$Q_R(g) \cdot Q_R(g^{-1}) = I,$$

приводит к взаимно обратным интегральным преобразованиям.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 18-47-860005 p_a.

Литература

1. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представления групп. М.: Наука, 1991. 576 с.

2. Vilenkin N. Ja., Klimuk A. U. Representation Theory and Special Functions: Recent Advances. Kluwer Acad. Publ, 1995. 511 p.
3. Vilenkin N. Ja., Klimuk A. U. Representation Theory and Special Functions. V. 1. Kluwer Acad. Publ, 1991. 610 p.
4. Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С. Гипергеометрические функции над произвольным полем // УМН. 2004. Т. 59. № 5 (359). С. 29–100.
5. Baricz A. Generalized Bessel functions of the first kind. Springer, 2010. 227 p.
6. Bohra N., Ravichandran V. On confluent hypergeometric functions and generalized Bessel functions // Analysis. Math. 2017. V. 43. Is. 4. P. 533–545.
7. Aomoto K., Kita M. Theory of hypergeometric functions. Springer, 2011. P. 335.
8. Дубовик О. А. Представление группы конформных движений евклидова пространства и функции Лежандра на разрезе // Сиб. матем. журн. 1980. № 4. С. 45–49.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М. : Наука, 1973. 296 с.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М. : Наука, 1969. 344 с.

УДК 622.276.1/4:519.87

АНАЛИЗ ЗАВИСИМОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РАЗРАБОТКИ НЕФТЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ ОТ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ НА ПРИМЕРЕ МОДЕЛИ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Н. П. Ефимова, И. В. Афанаскин, А. А. Колеватов, Д. В. Солопов, П. В. Ялов

*Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт
системных исследований Российской академии наук
nefimova@niisi.ras.ru*

В работе рассмотрена математическая модель двухфазной несмешивающейся фильтрации нефти и воды при пластовом давлении выше давления насыщения нефти газом. Для этой модели приводится полностью неявная (по давлению и насыщенности) численная схема на диаграмме Вороного. На примере модели одного из месторождений Западной Сибири в симуляторе Rubis (KAPPA Engineering) анализируется чувствительность математической модели двухфазной фильтрации к некоторым исходным данным.

Ключевые слова: теория фильтрации, математическое моделирование, разработка нефтяных месторождений, анализ чувствительности.

ANALYSIS OF DEPENDENCE OF MATHEMATICAL MODELING RESULTS OF OIL FIELDS DEVELOPMENT ON INITIAL DATA USING THE TWO-PHASE FILTRATION

N. P. Efimova, I. V. Afanaskin, A. A. Kolevatov, D. V. Solopov, P. V. Yalov

*System Research Institute Russian Academy of Sciences
nefimova@niisi.ras.ru*

The article considers a mathematical model of two-phase immiscible filtration of oil and water at reservoir pressure above saturation. Model is calculated by implicit numerical scheme (by pressure and saturation) using the Voronoi diagram. The sensitivity of the mathematical model of two-phase filtration to some initial data is analyzed by the example of the field model of Western Siberia in the simulator Rubis (KAPPA Engineering).

Keywords: filtration theory, mathematical modeling, oil fields development, sensitivity analysis.

Разработка месторождений нефти и газа – капиталоемкая отрасль с большими периодами окупаемости (до нескольких десятков лет). В связи с чем любые мероприятия, направленные на поддержание добычи и увеличение нефтеотдачи, предварительно проверяются на численных моделях месторождений. Основой для проектных документов и моделей являются данные различных видов исследований. При этом модели месторождений могут быть очень сложными, учитывать множество различных физико-химических процессов, поэтому оценка чувствительности моделей разработки месторождений углеводородов играет важную роль в принятии капиталоемких решений.

1. Математическая модель двухфазной фильтрации нефти, газа и воды

Для моделирования разработки месторождений углеводородов с помощью заводнения при пластовом давлении выше давления насыщения нефти газом используется так называемая модель «мертвой нефти». Она предполагает двухфазную изотермическую фильтрацию нефти

и воды, нефть и вода являются несмешивающимися жидкостями. Газ учитывается опосредованно, как растворенный в нефти: он нерастворим в воде, нефть испаряться в газ не может, газовая фаза в свободном виде отсутствует.

Уравнения сохранения объемов фаз в поверхностных условиях имеют вид [1, 4–5, 8]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{mS_o}{B_o} \right) + \operatorname{div} \left(\frac{\vec{w}_o}{B_o} \right) = -\bar{q}_o, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{mS_w}{B_w} \right] + \operatorname{div} \left(\frac{\vec{w}_w}{B_w} \right) = -\bar{q}_w, \quad (2)$$

где m – пористость пласта;

S_o – насыщенность пласта нефтью;

B_o – объемный коэффициент нефти;

$\vec{w}_o$ – скорость фильтрации нефти;

$\bar{q}_o$ – плотность источника (стока) нефти, аналогично для воды.

В качестве уравнений сохранения количества движения запишем обобщенный закон Дарси [1, 4–5, 8]:

$$\vec{w}_o = -\frac{kk_{ro}}{\mu_o} [\operatorname{grad}(P_o) - g\rho_o \operatorname{grad}(z)], \quad (3)$$

$$\vec{w}_w = -\frac{kk_{rw}}{\mu_w} [\operatorname{grad}(P_w) - g\rho_w \operatorname{grad}(z)], \quad (4)$$

где k – абсолютная проницаемость пласта;

k_o – относительная проницаемость нефти;

μ_o – динамическая вязкость нефти;

P_o – давление в нефтяной фазе;

g – ускорение свободного падения;

ρ_o – плотность нефти;

z – вертикальная координата от какой-либо фиксированной горизонтальной плоскости;

k_w – относительная проницаемость воды;

μ_w – динамическая вязкость воды;

P_w – давление в водяной фазе;

ρ_w – плотность воды.

Для удобства примем в качестве пластового давления давление в нефтяной фазе $P \equiv P_o$.

Подставим уравнения (3) и (4) в уравнения сохранения объемов (1) и (2) с учетом, что:

$$P_o - P_w = P_{cow}(S_w), \quad (5)$$

тогда получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{mS_o}{B_o} \right) - \operatorname{div} \left(\frac{kk_{ro}}{\mu_o B_o} [\operatorname{grad}(P) - g\rho_o \operatorname{grad}(z)] \right) = -\bar{q}_o, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{mS_w}{B_w} \right] - \operatorname{div} \left\{ \frac{kk_{rw}}{\mu_w B_w} [\operatorname{grad}(P) - \operatorname{grad}(P_{cow}) - g\rho_w \operatorname{grad}(z)] \right\} = -\bar{q}_w. \quad (7)$$

В результате имеем два уравнения (6), (7) и три неизвестных: P, S_o, S_w . Для замыкания системы воспользуемся балансным соотношением:

$$S_o + S_w = 1. \quad (8)$$

Вместо уравнений состояния используются следующие соотношения для физико-химических свойств пластовых флюидов – PVT-свойств фаз:

$$\begin{aligned} B_o &= B_{o0} [1 - C_o(P - P_0)]; & B_w &= B_{w0} [1 - C_w(P - P_0)]; \\ \rho_o(P) &= \rho_{o,STC} / B_o(P); & \rho_w(P) &= \rho_{w,STC} / B_w(P), \\ m(P) &= m_0 [1 + C_r(P - P_0)], \end{aligned} \quad (9)$$

где B_{o0} и B_{w0} – объемные коэффициенты нефти и воды при начальном давлении P_0 ;

C_o и C_w – сжимаемость нефти и воды;

и $\rho_{w,STC}$ – плотность нефти и воды при стандартных условиях;

m_0 – пористость при начальном давлении P_0 ;

C_r – сжимаемость породы.

Кроме того, используются функции относительной фазовой проницаемости:

$$k_{rw} = k_{rw}(S_w), \quad k_{ro} = k_{ro}(S_w). \quad (10)$$

Начальные условия для системы (6), (7):

$$P = P(x, y, z, t = 0); \quad S_w = S_w(x, y, z, t = 0). \quad (11)$$

В качестве граничных условий обычно используются условия непротекания на внешних границах либо условия постоянного давления. Внутренние граничные условия (скважины) моделируются с помощью источниковых слагаемых. Приток жидкости из законтурной области также часто моделируется с помощью источниковых слагаемых [1].

Работа l -го участка ствола скважины моделируется с помощью следующего выражения [1, 4–5, 8]:

$$q_{\alpha l} = WI_l \lambda_{\alpha l} [P_l - P_w - \bar{\gamma}(D_l - D_{ref})], \quad q_{\alpha} = \sum_l q_{\alpha l}, \quad (12)$$

где WI_l – индекс скважины, зависящий от фильтрационно-емкостных свойств и геометрических параметров расчетной сетки;

$\lambda_{\alpha l}$ – подвижность фазы α ;

P_l – пластовое давление в зоне l -го участка ствола скважины;

P_w – забойное давление в скважине на опорной глубине D_{ref} ;

$\bar{\gamma}$ – средний вес жидкости в стволе скважины;

D_l – глубина l -го участка ствола скважины.

Построим диаграмму Вороного в горизонтальной плоскости – плоскости пласта (рис. 1). Для получения трехмерной сетки – сетку, построенную в плане, копируем для разных слоев,

изменяя при этом глубину залегания кровли ячеек и их толщину. Пронумеруем все ячейки. Обозначим i – номер ячейки трехмерной сетки, а n – номер шага по времени.

Аппроксимируем систему уравнений (6), (7) на диаграмме Вороного с помощью полностью неявной численной схемы:

$$\frac{V_i}{\Delta t^{n+1}} \left[\left(\frac{mS_w}{B_w} \right)_i^{n+1} - \left(\frac{mS_w}{B_w} \right)_i^n \right] + \sum_{j=1}^{N_i} \left[\frac{k_{ij}}{\mu_w} \left(\frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \right)_{ij}^{n+1} \frac{P_i^{n+1} - P_j^{n+1} - P_{cowi}^{n+1} + P_{cowj}^{n+1} - \rho_{wij}^{n+1} g(z_i - z_j)}{L_{ij}} F_{ij} \right] = -q_{wi}^{n+1}, \quad (13)$$

$$\frac{V_i}{\Delta t^{n+1}} \left[\left(\frac{m(1-S_w)}{B_o} \right)_i^{n+1} - \left(\frac{m(1-S_w)}{B_o} \right)_i^n \right] + \sum_{j=1}^{N_i} \left[\frac{k_{ij}}{\mu_o} \left(\frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \right)_{ij}^{n+1} \frac{P_i^{n+1} - P_j^{n+1} - \rho_{oi}^{n+1} g(z_i - z_j)}{L_{ij}} F_{ij} \right] = -q_{oi}^{n+1}, \quad (14)$$

где V_i – объем i -й ячейки сетки;

Δt^{n+1} – переменный шаг по времени [1, 4];

N_i – количество соседних ячеек для i -й ячейки сетки;

j – номер соседней ячейки сетки;

L_{ij} – расстояние между центрами соседних ячеек;

F_{ij} – площадь общей грани соседних ячеек i и j .

Средняя проницаемость k_{ij} между соседними ячейками i и j обычно вычисляется как среднее геометрическое, ОФП $(k_{ra})_{ij}^{n+1}$ взвешивается вверх по потоку, объемный коэффициент $(B_\alpha)_{ij}^{n+1}$ и плотность $(\rho_\alpha)_{ij}^{n+1}$ вычисляются как среднее арифметическое.

Система (13)–(14) является системой нелинейных алгебраических уравнений, где на каждом временном шаге $2N$ уравнений (13)–(14) и $2N$ неизвестных $(P_i^{n+1}, S_{wi}^{n+1})$ N – количество ячеек. В случае необходимости определения S_{oi}^{n+1} используется численная аппроксимация выражения (8):

$$S_{oi}^{n+1} + S_{wi}^{n+1} = 1. \quad (15)$$

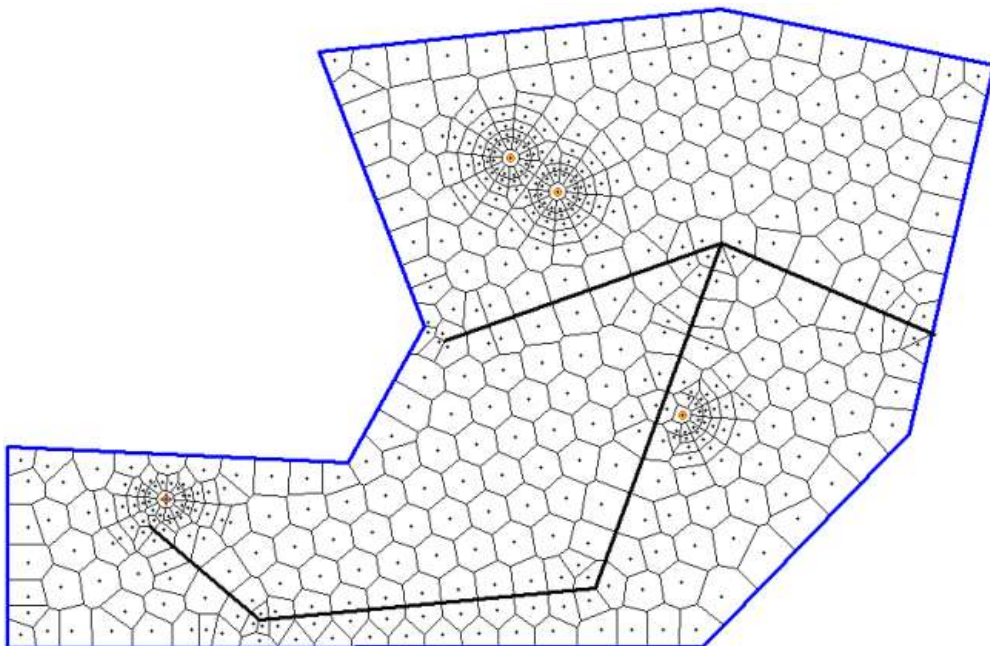


Рис. 1. Пример диаграммы Вороного [10]

Нелинейные слагаемые в системе (13)–(14) линеаризуются методом Ньютона. Например, дебит по воде для соединения скважины с пластом q_{wi}^{n+1} , зависящий от давления и насыщенныхностей, выражается как:

$$q_{wi}^{n+1} \approx q_{wi}^n + \left(\frac{\partial q_w}{\partial P} \right)_i^n (P_i^{n+1} - P_i^n) + \left(\frac{\partial q_w}{\partial S_w} \right)_i^n (S_{wi}^{n+1} - S_{wi}^n). \quad (16)$$

2. Анализ чувствительности математической модели двухфазной фильтрации на примере реальных данных

Оценим чувствительность одной из наиболее распространенных математических моделей разработки нефтяных месторождений, модели двухфазной фильтрации нефти и воды, описанной в разд. 1, к некоторым исходным данным на примере полномасштабной модели одного из пластов реального месторождения Западной Сибири. Номера скважин и некоторые параметры изменены для соблюдения конфиденциальности данных недропользователя.

Залежь нефти имеет массивное строение с активной законтурной водоносной областью, коллектор терригенный. Средняя толщина пласта 5,6 м.

Абсолютная проницаемость: минимальная – 0,8 мД; максимальная – 382,8 мД; средняя – 72,9 мД; стандартное отклонение – 69,9 мД.

Пористость: минимальная – 0,122 д.ед.; максимальная – 0,286 д.ед.; средняя – 0,230 д.ед.; стандартное отклонение – 0,029 д.ед.

Доля коллектора: минимальная – 0,1 д.ед.; максимальная – 1,0 д.ед.; средняя – 0,70 д.ед.; стандартное отклонение – 0,21 д.ед.

PVT-параметры флюидов: давление насыщения нефти газом – 19 бар; растворимость газа в нефти – 203,5 м³/м³; объемный коэффициент нефти 1,55 м³/м³; вязкость нефти в пластовых условиях – 0,397 сПз; объемный коэффициент воды – 1,02 м³/м³; вязкость воды в пластовых условиях – 0,36 сПз; сжимаемость воды – 4,7 × 10⁻⁵ 1/бар; сжимаемость породы – 4,7 × 10⁻⁵ 1/бар; плотность нефти в стандартных условиях – 875 кг/м³; плотность воды в стандартных условиях – 1054 кг/м³.

Относительные фазовые проницаемости (ОФП) в системе вода – нефть приведены на рис. 2, капиллярным давлением пренебрегается.

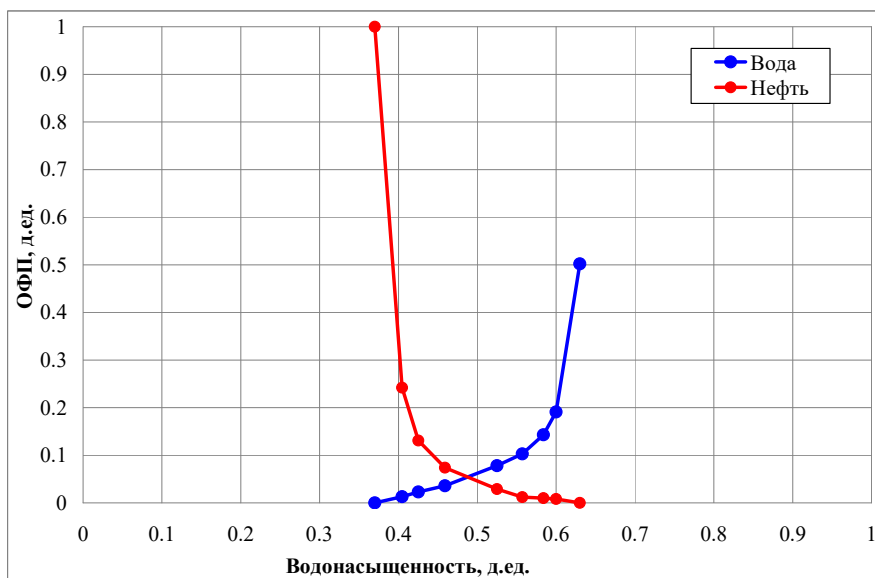


Рис. 2. ОФП в системе вода – нефть

Начальное пластовое давление на глубине водонефтяного контакта – 339 бар. Средняя начальная нефтенасыщенность – 0,59 д.ед.

В эксплуатации перебывало 12 скважин, все добывающие, нагнетательных нет, расстановка скважин приведена на рис. 3. Добывающие скважины управляются дебитом жидкости. История разработки – 40 лет. На конец истории разработки коэффициент извлечения нефти – 0,128 д.ед.; обводненность продукции – 94 %; добыча нефти – 2,2 м³/сут; добыча жидкости – 36 м³/сут.

Расчеты проводились в программе Rubis (KAPPA Engineering) [9] по двухфазной модели фильтрации на диаграмме Вороного (рис. 4).

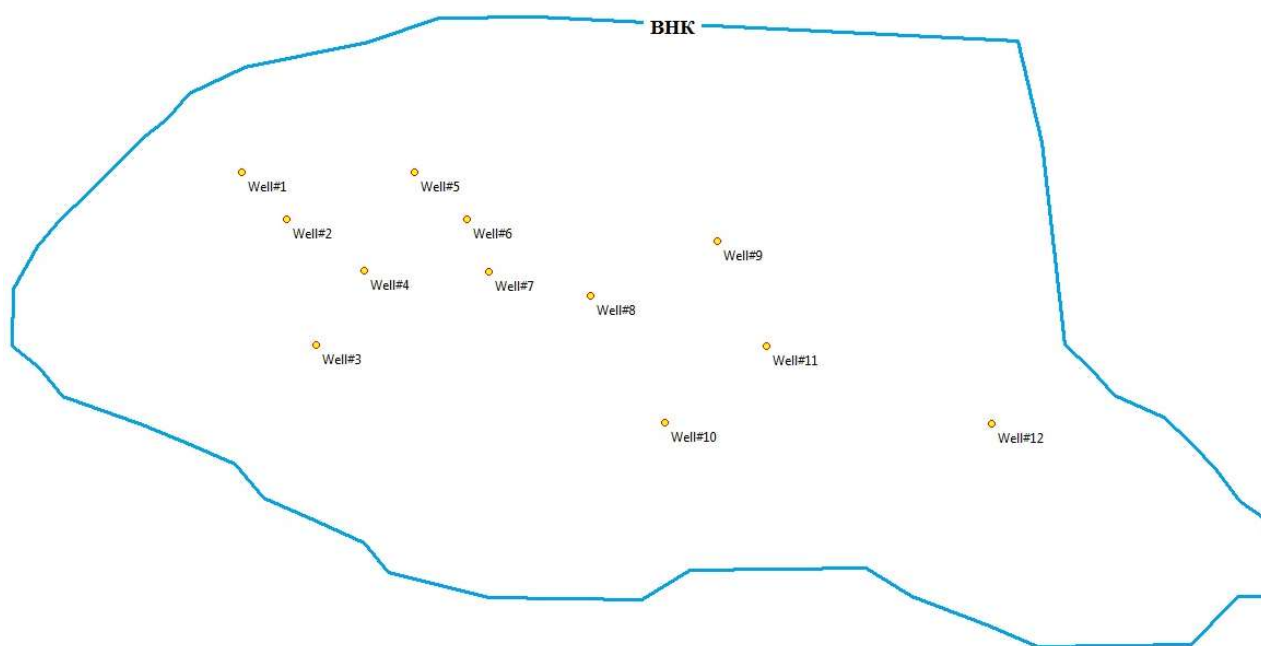


Рис. 3. Расстановка скважин в плане

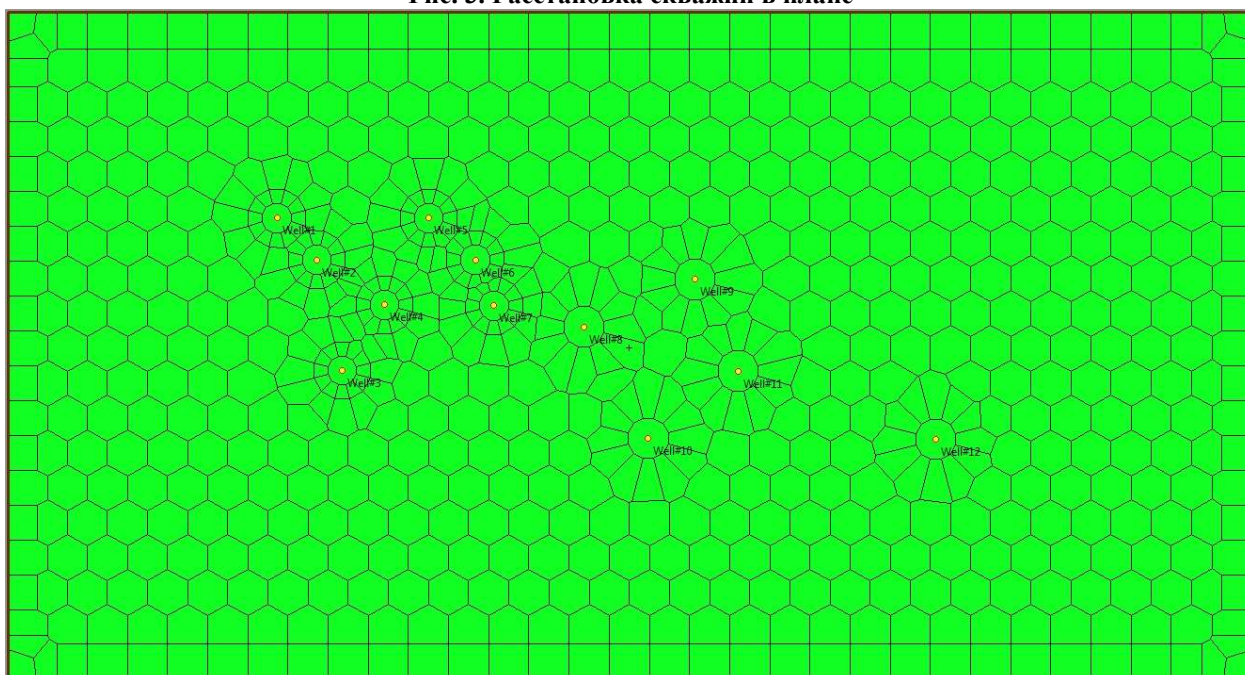


Рис. 4. Расчетная сетка для моделирования в программе Rubis (KAPPA Engineering)

С помощью симулятора анализировалась чувствительность модели к изменению: (1) соотношения горизонтальной и вертикальной проницаемости, (2) вязкости нефти и воды, (3) объемного коэффициента, (4) сжимаемостей нефти, воды и породы, (5) параметров законтурной области (рис. 5–8 соответственно). Исходные данные варьировались в пределах $\pm 15\%$. При этом получены ошибки в накопленных показателях разработки вплоть до 8 %. Оценивалось влияние исходных данных на накопленную добычу нефти, воды и газа (НДН, НДВ и НДГ) (рис. 5–8).

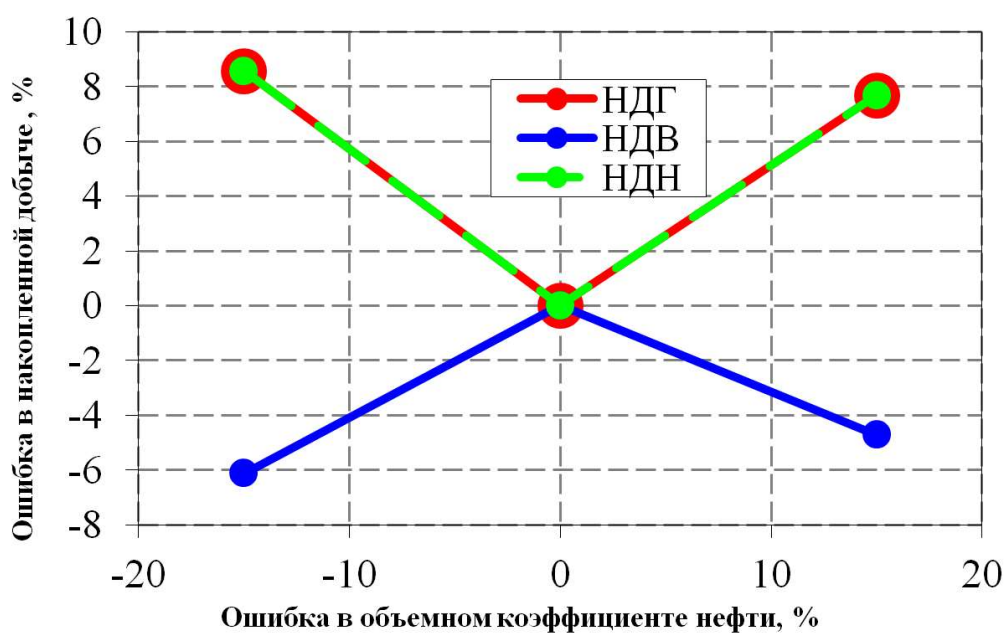


Рис. 5. Влияние объемного коэффициента на накопленную добычу и закачку
НДН, НДВ и НДГ соответственно

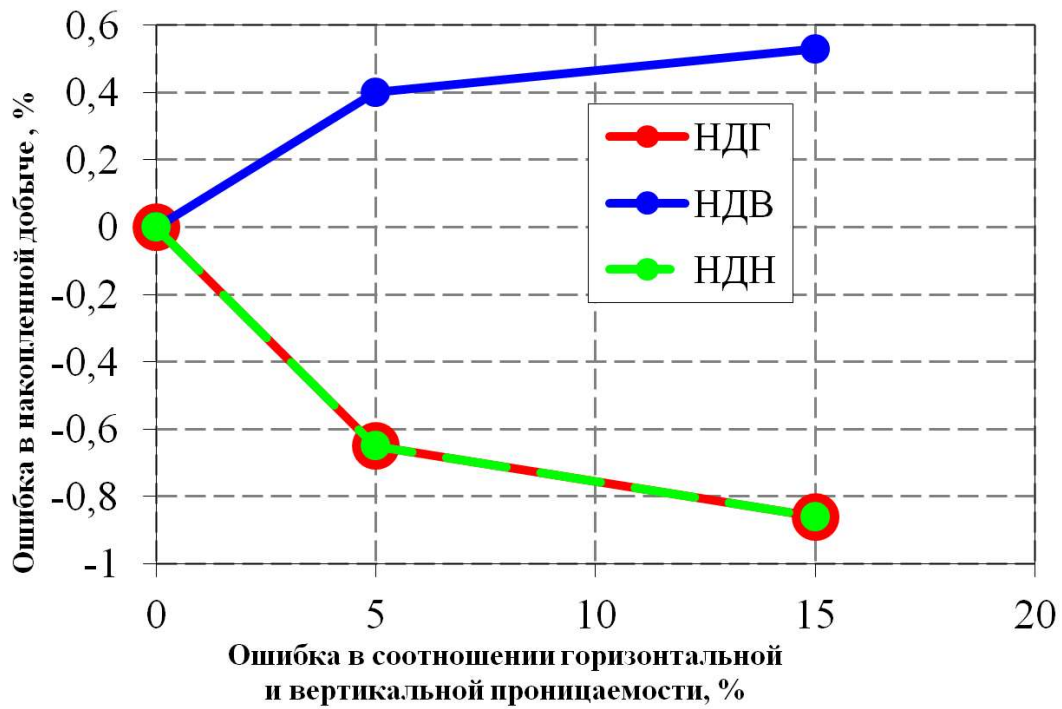


Рис. 6. Влияние соотношения горизонтальной и вертикальной проницаемости на накопленную добычу НДН, НДВ и НДГ соответственно

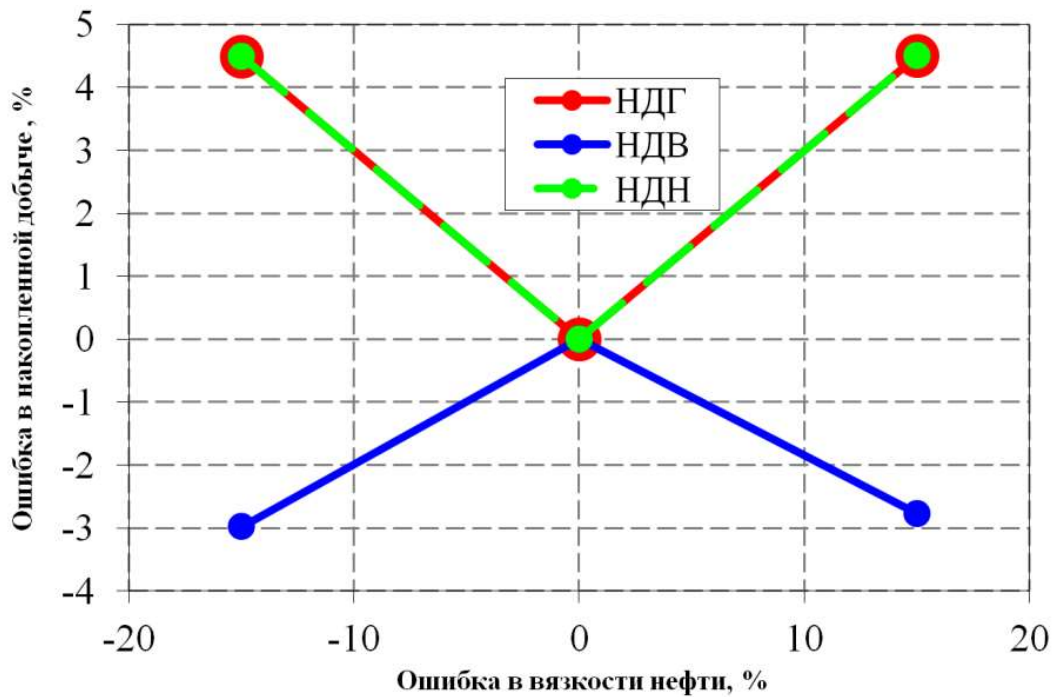


Рис. 7. Влияние вязкости нефти на накопленную добычу НДН, НДВ и НДГ соответственно

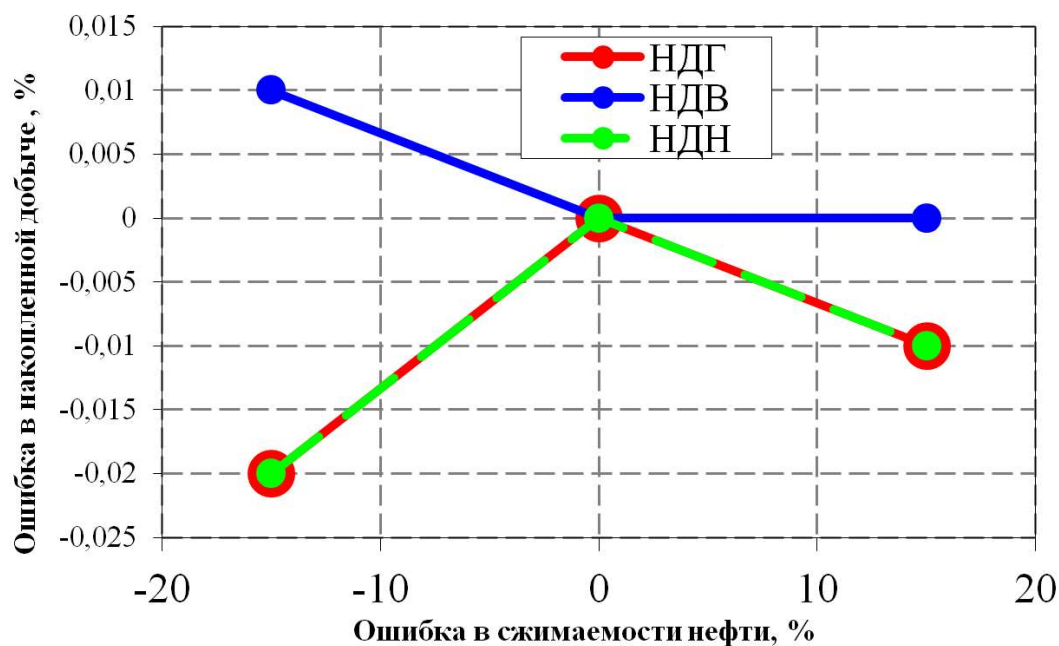


Рис. 8. Влияние сжимаемости нефти на накопленную добычу и закачку НДН, НДВ и НДГ соответственно

Ошибки в НДН, НДВ и НДГ в зависимости от изменения вязкости нефти и воды, изменения сжимаемостей нефти, воды и породы, изменения параметров законтурной области составили для конкретной модели менее 0,1 %, поэтому графики не приводятся.

Заключение. На основании анализа результатов приведенных вычислительных экспериментов можно выделить следующие факторы, оказывающие наибольшее влияние на основные показатели разработки (из списка анализируемых):

1. Наибольшее влияние на НДН, НДВ и НДГ имеют объемный коэффициент нефти и ее вязкость.
2. Остальные параметры, для которых рассчитывалась чувствительность модели к НДН, НДВ и НДГ, имеют влияние не более 1 %.

Также всегда следует помнить о возможной погрешности в истории разработки по различным причинам как технического, так и технологического характера. Необходимо критически относиться к информации об исторических показателях работы скважин и делать сверку документов, содержащих данные о дебитах и забойных давлениях скважин.

Работа выполнена при поддержке Программы ФНИ государственных академий наук на 2013–2020 гг., проект № 0065-2018-0118.

Литература

1. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. М. ; Ижевск : Ин-т компьютер. исслед., 2004. 416 с.
2. Байков В. А., Бакиров Н. К., Яковлев А. А. Математическая геология. Т. 1. Введение в геостатистику. М. ; Ижевск : Ин-т компьютер. исслед., 2012. 228 с.
3. Дойч К. В. Геостатистическое моделирование коллекторов. М. ; Ижевск : Ин-т компьютер. исслед., 2011. 400 с.
4. Каневская Р. Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. М. ; Ижевск : Ин-т компьютер. исслед., 2002. 140 с.
5. Кричлоу Г. Б. Современная разработка нефтяных месторождений – проблемы моделирования. М. : Недра, 1979. 303 с.

6. Петерсилье В. И., Пороскун В. И., Яценко Г. Г. Методические рекомендации по подсчету запасов нефти и газа объемным методом. Тверь : ВНИГНИ ; НПЦ «Тверьгеофизика», 2003. 259 с.
7. Стасенков В. В., Гутман И. С. Подсчет запасов нефти, газа, конденсата и содержащихся в них компонентов. М. : Недра, 1989. 270 с.
8. Эртекин Т., Абу-Кассем Дж., Кинг Г. Основы прикладного моделирования пластов. М. ; Ижевск : Ин-т компьютер. исслед., 2012. Т. XXVIII. 1060 с.
9. Rubis – численное моделирование. Описание / KAPPA Engineering [Электронный ресурс] / URL: <https://www.kappaeng.com/software/rubis/overview> (дата обращения: 29.04.2018 г.)
10. Houze O., Viturat D., Fjaere O. S. Dynamic Data Analysis // Kappa Engineering. 2017. V 5. № 12. 743 p.

УДК 519.1:004.421.5:004.7

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЕПЕНЕЙ В ГРАФАХ С ЛИНЕЙНЫМ ПРАВИЛОМ ПРЕДПОЧТИТЕЛЬНОГО СВЯЗЫВАНИЯ И В ГРАФАХ ДЖЕКСОНА – РОДЖЕРСА

В. Н. Задорожный¹, Е. Б. Юдин²

¹ Омский государственный технический университет, zwn2015@yandex.ru

² Институт математики им. С. Л. Соболева,
Сибирское отделение РАН, г. Новосибирск, udinev@asoiu.com

Рассматриваются два класса растущих случайных графов – графы предпочтительного связывания с линейной весовой функцией и гибридные графы Джексона – Роджерса. Выведены точные формулы финальных распределений степеней связности вершин и финальных двумерных распределений степеней связности дуг/ребер рассматриваемых графов. Доказано, что каждому гибриднему графу соответствует определенный граф предпочтительного связывания с линейной весовой функцией, имеющий точно такие же, как у этого гибридного графа распределения степеней связности вершин и степеней связности дуг/ребер. Доказывается и более сильное утверждение, что всякий гибридный граф эквивалентен определенному графу с линейной весовой функцией. Выведена формула, позволяющая калибровать линейную весовую функцию для выращивания графов с требуемым асимптотически степенным распределением степеней вершин. Достоверность полученных результатов подтверждена численными проверками и имитационным моделированием. Практическая ценность результатов демонстрируется примером эффективной калибровки графа сети автономных систем Интернет.

Ключевые слова: теория сетей, растущие сети, графы предпочтительного связывания, графы Джексона – Роджерса, распределения степеней связности вершин и дуг/ребер.

DEGREES DISTRIBUTIONS IN LINEAR PREFERENTIAL ATTACHMENT GRAPHS AND JACKSON – ROGERS GRAPHS

V. N. Zadorozhnyi¹, E. B. Yudin²

¹ Omsk State Technical University, zwn2015@yandex.ru

² Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk,
udinev@asoiu.com

The paper considers two classes of growing random graphs. The first class is the preferential attachment graphs with a linear weight function, and the second class is the hybrid Jackson – Rogers graphs. Exact formulas for the final vertex degree distributions and final edge/arc endpoints of two-dimensional distributions are derived. It is proved that each hybrid graph corresponds with the definite linear preferential attachment graph by vertex degree distribution and edge/arc endpoints distribution. A stronger assertion is also proved that every hybrid graph is equivalent to a definite graph with a linear weight function. A formula that allows the calibration of a linear function for growing graphs with the required asymptotic power-law vertex degree distribution is deduced. The reliability of the results is confirmed by numerical calculations and simulation modeling. The practical value of the results is demonstrated by successful graph calibration of the network model by autonomous Internet systems.

Keywords: network theory, growing networks, preferential attachment graphs, Jackson – Rogers graphs, degrees distribution of connectivity of vertices and arcs/edges.

Графы предпочтительного связывания широко распространились в качестве математических моделей больших сетей после публикации статьи [1], в которой предложен растущий граф, получивший впоследствии название графа Барабаши – Альберт (граф БА). Граф БА, яв-

ляясь адекватной моделью многих растущих сетей, позволил объяснить, каким образом возникают такие их структурные свойства, как асимптотически-степенное *распределение степени связности* (РСС) узлов, устойчивость сетей к случайным удалениям узлов и связей, небольшая величина диаметра у сетей, содержащих сотни миллионов узлов (правило шести рукопожатий), и т. д. [2].

В настоящей статье рассматриваются растущие графы класса L – это графы с линейной весовой функцией, которая записывается в виде $f(k) = k + s$, где смещение s – константа, либо в виде $f(k) = s = 1$, и графы класса DR – графы Джексона – Роджерса, т. е. графы [3–4].

Графы класса L выращиваются из небольшого графа-затравки путем добавления приращений – новых вершин с заданным числом m исходящих из них дуг. Свободный конец каждой дуги приращения связывается с i -й вершиной графа с вероятностью p_i , которая пропорциональна весу $f(k_i)$ этой вершины, определяемому через ее степень связности k_i :

$$p_i = \frac{f(k_i)}{\sum_{j=1}^N f(k_j)} = \frac{k + s}{\sum_{j=1}^N (k_j + s)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где $k = k_i$ и N – текущее число вершин в графе.

Из первого равенства в (1) видно, что все весовые функции $f_c(\cdot) = cf(\cdot)$, отличающиеся от функции $f(\cdot)$ лишь мультипликативным коэффициентом $c > 0$, эквивалентны – они не изменяют вероятностей связывания p_i . Отсюда следует, что «особая» весовая функция $f(k) = 1$ графов класса L есть типичная весовая функция $f(k) = k + s$, которая эквивалентна весовой функции $f_c(k) = f_{1/s}(k) = k/s + 1$, получаемой в пределе при $s \rightarrow \infty$. Таким образом, всякий граф класса L задается двумя параметрами – степенью m приращения и смещением s . Граф БА определяется весовой функцией $f(k) = k$, т. е. является таким графом класса L , у которого весовая функция имеет нулевое смещение. В общем случае смещение s может принимать и отрицательные значения.

Всякий граф класса DR также задается двумя параметрами – степенью m приращения и вероятностью a , определяющей «долю» весовой функции $f_1(k) = 1$ в ее «смеси» с весовой функцией $f_2(k) = k$. При связывании с графом по правилу (1) каждая дуга очередного приращения использует с вероятностью a весовую функцию $f_1(k) = 1$, с вероятностью $(1 - a)$ – весовую функцию $f_2(k) = k$.

Целью исследования является обнаружение в классах L и DR таких графов, у которых финальные (получаемые при $N \rightarrow \infty$) распределения Q_k степени k связности вершин имеют степенную асимптотику, т. е. у которых $Q_k \sim ck^{-\alpha}$ при $k \rightarrow \infty$ (обозначение c неопределенного числового коэффициента, используемое нами в разных контекстах, имеет разный смысл). При этом показатель α должен лежать в промежутке $2 < \alpha \leq 3$, как и во многих реальных растущих сетях, например, в Интернет. Под вероятностью Q_k степени k здесь понимается вероятность того, что случайно (равновероятно) выбранная в бесконечном графе вершина будет иметь степень связности k . Средняя степень вершин рассматриваемых растущих графов, как вытекает из их построения, составляет величину $\langle k \rangle = 2m$ – это число концов ребер, приходящихся на одну вершину графа.

Гибридные графы Джексона – Роджерса интересны тем, что при $a \rightarrow 1$, как это вытекает из алгоритма их построения, они сходятся к известному графу с геометрическим РСС Q_k , при $a \rightarrow 0$ – к графу БА, т. е. к графу с асимптотически-степенным РСС $Q_k \sim ck^{-3}$. Выбирая

значение параметра a гибридного графа между 0 и 1, можно получать графы с «промежуточными» видами РСС вершин [3–4].

Финальные РСС вершин в DR - и L -графах

Применим к гибриднему графу Джексона – Роджерса с параметром a метод вывода точных рекуррентных соотношений, описанный в [5], адаптируя его к особенностям алгоритма выращивания гибридного графа. А именно разобьем множество вершин гибридного графа на слои (подмножества) A_k так, чтобы каждый слой A_k состоял из вершин со степенью k . При добавлении к графу очередного приращения новая дуга присоединяется к вершине i , имеющей степень k , с вероятностью

$$p_i = p(k) = a \frac{f_1(k)}{\sum_{j=1}^N f_1(k_j)} + (1-a) \frac{f_2(k)}{\sum_{j=1}^N f_2(k_j)} \sim a \frac{f_1(k)}{\langle f_1 \rangle N} + (1-a) \frac{f_2(k)}{\langle f_2 \rangle N}, \quad (2)$$

где $\langle f_1 \rangle$ – среднее значение веса f_1 вершин;

$\langle f_2 \rangle$ – среднее значение веса f_2 .

С ростом N среднее число вершин, выбираемых приращением с m дугами в слое A_k , сходится с относительной погрешностью нуль к величине:

$$\Delta_k^- = mp(k) |A_k| = mp(k) Q_k N = am \frac{f_1(k)}{\langle f_1 \rangle} Q_k + (1-a)m \frac{f_2(k)}{\langle f_2 \rangle} Q_k.$$

Все выбранные в слое A_k вершины уходят в следующий слой A_{k+1} , поскольку присоединение к ним новых дуг увеличивает их степень связности на единицу. Вероятностью присоединения к одной вершине i более одной дуги приращения пренебрегаем, поскольку она является бесконечно малой, порядка $o(p_i) = o(N^{-1})$. За счет ухода выбранных в слое A_k вершин среднее число вершин в этом слое уменьшается на Δ_k^- . Аналогично определяем среднее число вершин, выбираемых приращением в слое A_{k-1} , которое составляет:

$$\Delta_k^+ = mp(k-1) Q_{k-1} N = am \frac{f_1(k-1)}{\langle f_1 \rangle} Q_{k-1} + (1-a)m \frac{f_2(k-1)}{\langle f_2 \rangle} Q_{k-1}.$$

Эти вершины переходят в слой A_k , за счет чего среднее число вершин в нем возрастает.

При $t \rightarrow \infty$ ($N \rightarrow \infty$) вероятности $Q_k = |A_k| / N = N_k / N$, будучи стационарными вероятностями, после добавления приращения не изменяются, т. е. выполняются следующие два равенства (уравнения баланса):

$$\frac{N_k}{N} = \frac{N_k - \Delta_k^- + \Delta_k^+}{N + 1}, \quad k \geq m + 1,$$

$$\frac{N_m}{N} = \frac{N_m - \Delta_m^- + 1}{N + 1}, \quad k = m.$$

Последнее уравнение – уравнение для слоя A_m – отличается от предыдущего вследствие того, что в слой A_m вершины из предыдущего слоя A_{m-1} не приходят (слоя A_{m-1} нет), но в то же время, в слой A_m попадает сама вершина приращения графа.

Подставим в первое уравнение баланса полученные выше выражения для Δ_k^- и Δ_k^+ :

$$\frac{N_k}{N} = \frac{1}{N+1} \left[N_k - \left(am \frac{f_1(k)}{\langle f_1 \rangle} Q_k + (1-a)m \frac{f_2(k)}{\langle f_2 \rangle} Q_k \right) + \right. \\ \left. + am \frac{f_1(k-1)}{\langle f_1 \rangle} Q_{k-1} + (1-a)m \frac{f_2(k-1)}{\langle f_2 \rangle} Q_{k-1} \right].$$

Умножая обе части полученного уравнения на $N(N+1)$, приводя подобные члены и вновь деля обе части на N , переписываем его с учетом того, что $N_k / N = Q_k$, в виде:

$$Q_k = am \frac{f_1(k-1)}{\langle f_1 \rangle} Q_{k-1} + (1-a)m \frac{f_2(k-1)}{\langle f_2 \rangle} Q_{k-1} - am \frac{f_1(k)}{\langle f_1 \rangle} Q_k - (1-a)m \frac{f_2(k)}{\langle f_2 \rangle} Q_k,$$

и, выражая в нем Q_k через Q_{k-1} , получаем рекуррентную формулу:

$$Q_k = \frac{am \frac{f_1(k-1)}{\langle f_1 \rangle} + (1-a)m \frac{f_2(k-1)}{\langle f_2 \rangle}}{1 + am \frac{f_1(k)}{\langle f_1 \rangle} + (1-a)m \frac{f_2(k)}{\langle f_2 \rangle}} Q_{k-1}, \quad k \geq m+1. \quad (3)$$

Аналогично из уравнения баланса для слоя A_m находим:

$$Q_m = \frac{1}{1 + am \frac{f_1(m)}{\langle f_1 \rangle} + (1-a)m \frac{f_2(m)}{\langle f_2 \rangle}}. \quad (4)$$

Формулы (3), (4) справедливы не только для гибридных графов Джексона – Роджерса, так как вывод этих формул не привязан к виду смешиваемых весовых функций. Для графов класса DR , подставляя выражения используемых в них весовых функций $f_1(k) = 1$, $f_2(k) = k$ и их средних значений $\langle f_1 \rangle = \langle 1 \rangle = 1$, $\langle f_2 \rangle = \langle k \rangle = 2m$, получаем следующие рекуррентные формулы, точно определяющие РСС Q_k :

$$Q_m = \frac{2}{2 + am + m}, \quad (5)$$

$$Q_k = \frac{2am + (1-a)(k-1)}{2 + 2am + (1-a)k} Q_{k-1}, \quad k \geq m+1. \quad (6)$$

Формулы (5), (6) подтверждаются имитационным моделированием (непосредственным выращиванием DR -графов) и сравнением получаемых РСС вершин с РСС, рассчитанным по формулам (5), (6).

Рассмотрим теперь графы класса L . Применяя к ним выведенные в [6] общие для графов предпочтительного связывания рекуррентные формулы:

$$Q_m = \frac{\langle f \rangle}{\langle f \rangle + mf(m)}, \quad (7)$$

$$Q_k = \frac{mf(k-1)}{\langle f \rangle + mf(k)} Q_{k-1}, \quad k \geq m+1, \quad (8)$$

т. е. подставляя в эти формулы весовую функцию $f(k) = k + s$ и средний вес $\langle f \rangle = \langle k + s \rangle = \langle k \rangle + s = 2m + s$, получаем:

$$Q_m = \frac{2m + s}{2m + s + m(m + s)}, \quad (9)$$

$$Q_k = \frac{m(k - 1 + s)}{2m + s + m(k + s)} Q_{k-1}, \quad k \geq m + 1. \quad (10)$$

Для линейной функции $f(k) = 1$ формулы (7), (8) принимают вид:

$$Q_m = \frac{1}{1 + m}, \quad (11)$$

$$Q_k = \frac{m}{1 + m} Q_{k-1}, \quad k \geq m + 1, \quad (12)$$

т. е. определяют убывающую геометрическую прогрессию с начальным членом $1/(1 + m)$ и знаменателем $m/(1 + m)$. Формулы (11), (12) получаются и из формул (9), (10) при $s \rightarrow \infty$.

Теперь можно доказать следующее утверждение, связывающее два рассматриваемых класса случайных графов.

Теорема 1. Всякий гибридный граф класса DR эквивалентен по финальному РСС вершин определенному графу класса L .

Доказательство. Граф класса DR и его РСС вершин однозначно определяются значениями параметров m и a . В соответствие любому выбранному DR -графу с параметром $a < 1$ поставим L -граф с тем же m и с параметром:

$$s = \frac{2am}{1 - a}. \quad (13)$$

Подставляя эти m и s в формулы (9), (10) и упрощая их, получаем формулы, совпадающие, соответственно, с формулами (5), (6). Следовательно, РСС вершин L -графа с такими m , s совпадает с РСС вершин выбранного DR -графа. Гибриднему графу с параметром $a = 1$ поставим в соответствие L -граф с весовой функцией $f_1(k) = 1$. В этом случае РСС вершин L -графа (11), (12) также совпадает с РСС (5), (6) вершин выбранного гибридного графа, у которого $a = 1$. Теорема доказана.

Обратное неверно, так как никакие DR -графы не соответствуют L -графам с параметром $s < 0$. Поэтому для поиска графов с асимптотически-степенными РСС вершин в классах DR и L необходимо и достаточно рассмотреть графы класса L .

Точные формулы для РСС дуг и РСС ребер в DR -графах

Степенью связности дуги графа назовем упорядоченную пару чисел (l, k) , где l – степень связности вершины, из которой дуга исходит, k – степень связности вершины, в которую дуга заходит. Вероятность $Q_{l,k}$ определим как вероятность того, что случайно (равновероятно) выбранная дуга бесконечного графа будет иметь степень (l, k) . Совокупность всех $Q_{l,k}$ ($l \geq 1, k \geq 1$) – финальное двумерное РСС дуг DR -графа можно найти методом составления и решения уравнений баланса для степеней дуг графов с *нелинейным правилом предпочтитель-*

ного связывания (НППС) [5]. Вероятность $p(k)$ связывания дуги приращения с вершиной, имеющей степень k , следует при этом определять по формуле полной вероятности (2). Это влечет за собой и изменение формулы для вероятности P_k связывания дуги приращения со слоем A_k в DR -графах $P_k = [a + k(1 - a)/(2m)]Q_k$. Опуская в связи с ограниченным объемом статьи рутинные выкладки, приведем получаемое в итоге РСС дуг DR -графа, заданного параметрами m, a :

$$Q_{l,k} = \begin{cases} 0 & \text{при } l < m \text{ или } k \leq m, \\ \frac{[2am + (1 - a)(k - 1)] \cdot [Q_{k-1} + mQ_{m,k-1}]}{2m + (3a + 1)m^2 + m(1 - a)k} & \text{при } l = m, k \geq m + 1, \\ \frac{[2am + (1 - a)(k - 1)]Q_{l,k-1} + [2am + (1 - a)(l - 1)]Q_{l-1,k}}{2 + 4am + (1 - a)(k + l)} & \text{при } l \geq m + 1, k \geq m + 1. \end{cases} \quad (14)$$

Расчет матрицы $\mathbf{Q} = \|Q_{l,k}\|$ начинается с заполнения нулями строк с номерами $l < m$ (если такие имеются) и столбцов с номерами $k \leq m$ в соответствии с первой строкой решения (14). Затем по второй строке решения (14) рассчитывается строка $l = m$ матрицы, начиная с $(m + 1)$ -го ее элемента, слева направо, и по формуле третьей строки решения (14) рассчитываются последующие строки матрицы, также с $(m + 1)$ -го их элемента.

Решение (14) проверено и подтверждено имитационным моделированием. Нетрудно проверить решение (14) и на частных случаях, когда $a = 0$ или $a = 1$. В этих случаях гибридный DR -граф вырождается в обычные графы предпочтительного связывания: при $a = 1$ – в граф с весовой функцией $f_1(k) = 1$, при $a = 0$ – в граф с весовой функцией $f_2(k) = k$. Нетрудно убедиться, что в этих случаях решение (14) совпадает с решением, найденным в [5] для графов с НППС:

$$Q_{l,k} = \begin{cases} 0, & l < m \text{ или } k \leq m, \\ \frac{f_m Q_m}{\langle f \rangle + m(f_m + f_{m+1})}, & l = m, k = m + 1, \\ \frac{f_{k-1}(Q_{k-1} + mQ_{m,k-1})}{\langle f \rangle + m(f_m + f_k)}, & l = m, k \geq m + 2, \\ \frac{f_{l-1}Q_{l-1,k} + f_{k-1}Q_{l,k-1}}{\langle f \rangle / m + f_l + f_k}, & l \geq m + 1, k \geq m + 1, \end{cases} \quad (15)$$

где функция $f(k)$ целочисленной переменной k обозначается через f_k .

Если все дуги в ориентированном графе заменить ребрами, то получается неориентированный граф. Матрица Θ степеней ребер этого графа (РСС ребер) получается в результате следующего преобразования матрицы $\mathbf{Q}$ степеней дуг:

$$\Theta = (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T) / 2. \quad (16)$$

Здесь символ T обозначает операцию транспонирования матрицы $\mathbf{Q}$. Вероятность $\Theta_{l,k}$ (элемент матрицы Θ) – это вероятность того, что случайно выбранное ребро бесконечного графа, проходящее в случайном направлении, ведет из вершины со степенью l в вершину со

степенью k . Матрица Θ симметрична относительно главной диагонали.

Точные формулы для РСС дуг и РСС ребер в L -графах

Точные формулы для РСС дуг в графах с линейным правилом предпочтительного связывания выводятся как частный случай общей формулы РСС (15) путем подстановки линейной весовой $f(k) = k + s$ и, соответственно, среднего веса вершин $\langle f \rangle = 2m + s$:

$$Q_{l,k} = \begin{cases} 0, & l < m \text{ или } k \leq m, \\ \frac{(m+s)Q_m}{2m+s+m(2m+2s+1)}, & l = m, k = m+1, \\ \frac{(k-1+s)(Q_{k-1} + mQ_{m,k-1})}{2m+s+m(m+2s+k)}, & l = m, k \geq m+2, \\ \frac{(l-1+s)Q_{l-1,k} + (k-1+s)Q_{l,k-1}}{(2m+s)/m + l + 2s + k}, & l \geq m+1, k \geq m+1. \end{cases} \quad (17)$$

Теорема 2. Всякий гибридный граф класса DR , эквивалентный по финальному РСС вершин определенному графу класса L , эквивалентен этому графу и по финальным РСС дуг / ребер.

Доказательство. Согласно теореме 1 всякий DR -граф с параметрами m, a эквивалентен по РСС Q_k вершин L -графу с тем же m и с параметром:

$$s = \frac{2am}{1-a}. \quad (18)$$

Остается проверить, что эти DR - и L -графы эквивалентны также по РСС дуг $Q_{l,k}$ и РСС ребер $\Theta_{l,k}$. С учетом формулы (16) достаточно выполнить проверку эквивалентности этих графов по РСС дуг. Для этого в общую формулу РСС дуг L -графа (17) подставим значение s (18). Тогда после эквивалентных преобразований формула (17) сводится к (14). Следовательно, сравниваемые DR - и L -графы эквивалентны по РСС $Q_{l,k}$ дуг. Теорема доказана.

На рис. 1 представлены примеры РСС ребер двух эквивалентных DR - и L -графов.

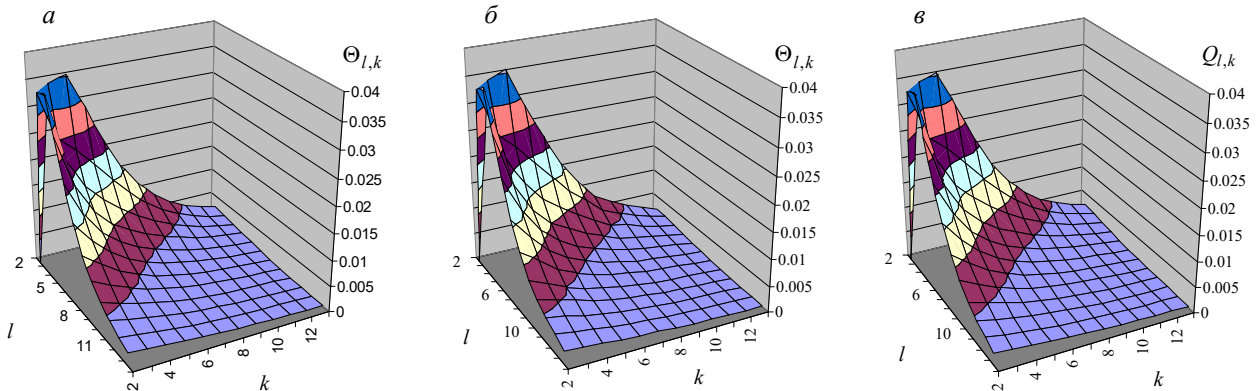


Рис. 1. Примеры РСС ребер двух эквивалентных DR - и L -графов:

- a – РСС (16), (14) $\Theta_{l,k}$ ребер в графе Джексона – Роджерса с параметрами $m = 2, a = 0,75$;
- $б$ – РСС ребер этого же графа, рассчитанное путем его имитационного моделирования;
- $в$ – РСС эквивалентного L -графа с параметрами $m = 2, s = 2am/(1 - a) = 12$

Графики на рис. 1 наглядно подтверждают правильность формул, полученных для РСС ребер (следовательно, для используемых ими формул РСС вершин и РСС дуг) DR - и L -графов, а также справедливость доказанных в статье теорем.

Теорема об эквивалентности

Точное совпадение распределений степеней вершин и степеней дуг/ребер DR -графов с одной стороны, и соответствующих L -графов – с другой, приводит к предположению о полной эквивалентности сравниваемых графов. И это предположение подтверждается, его справедливость доказывает следующая теорема.

Теорема 3. Всякий DR -граф эквивалентен определенному L -графу.

Доказательство. Пусть DR -граф задан параметрами m (число дуг в приращении графа) и a (вероятность использования при выборе вершины весовой функции $f_1(k) = 1$), и пусть L -граф имеет тот же параметр m и весовую функцию $f(k) = k + s$, где $s = 2am/(1-a)$. Тогда правило (2) выбора новой дугой DR -графа любой вершины i для связывания эквивалентно правилу (1) выбора этой же вершины новой дугой L -графа.

Действительно, вычисляя вероятность p_i для указанного L -графа по правилу (1), получаем:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{k + s}{\sum_{j=1}^N (k_j + s)} = \frac{k + \frac{2am}{1-a}}{\sum_{j=1}^N \left(k_j + \frac{2am}{1-a} \right)} = \frac{k(1-a) + 2am}{\sum_{j=1}^N k_j(1-a) + \sum_{j=1}^N 2am} = \frac{k(1-a) + 2am}{(1-a) \sum_{j=1}^N k_j + 2amN} = \\ &= \frac{k(1-a) + 2am}{(1-a)2R + 2amN} = \frac{k(1-a) + 2am}{2(1-a)mN + 2amN} = \frac{k(1-a) + 2am}{2mN}, \end{aligned} \quad (19)$$

где $R = mN$ – число ребер в графе.

В выкладке (19) мы для простоты полагаем, что число ребер в используемой затравке графа в m раз больше числа вершин в ней (как и в каждом приращении графа).

Упрощая теперь правило (2) выбора вершины в DR -графе, находим, что

$$\begin{aligned} p_i &= a \frac{f_1(k)}{\sum_{j=1}^N f_1(k_j)} + (1-a) \frac{f_2(k)}{\sum_{j=1}^N f_2(k_j)} = a \frac{1}{\sum_{j=1}^N 1} + (1-a) \frac{k}{\sum_{j=1}^N k_j} = a \frac{1}{N} + (1-a) \frac{k}{2R} = \\ &= a \frac{1}{N} + (1-a) \frac{k}{2mN} = \frac{2am + k(1-a)}{2mN}. \end{aligned} \quad (20)$$

Следовательно, правила выращивания сравниваемых графов эквивалентны (вероятности (19) и (20) связывания с любой вершиной i совпадают). Теорема доказана.

Таким образом, DR -графы не являются новым классом графов – множество DR -графов совпадает с подмножеством L -графов, определяемым условием $s \geq 0$. Любой DR -граф эквивалентен соответствующему ему L -графу по всем вероятностным и вероятностно-временным характеристикам, в частности, по характеристикам переходного процесса. Разумеется, характеристики переходных процессов эквивалентны при одинаковых затравках, из которых выращаются сопоставляемые DR - и L -графы.

Вывод для РСС Q_k в классе L приближения в замкнутом виде

Найдем для L -графов явные выражения РСС Q_k , позволяющие осуществлять анализ асимптотики этих РСС.

В случае линейной весовой функции $f(k) = 1$ из рекурсии (11), (12) вытекает точная явная формула РСС – формула общего члена определяемой равенствами (11), (12) геометрической прогрессии:

$$Q_k = \frac{1}{1+m} \left(\frac{m}{1+m} \right)^{k-m}, \quad k \geq m. \quad (21)$$

В случае линейной весовой функции $f(k) = k + s$ также нетрудно получить точную явную формулу, поскольку соответствующее рекуррентное уравнение (9), (10) линейно относительно искомой функции $Q_k = Q(k)$. Решая уравнение (9), (10), получаем следующее явное (представленное в замкнутом виде) точное выражение:

$$Q_k = \frac{(2m+s)\Gamma(m+s+2+s/m)\Gamma(k+s)}{m\Gamma(m+s)\Gamma(k+s+3+s/m)}. \quad (22)$$

При $s \rightarrow \infty$ (22) сходится к (12). Решение (22) уравнения (9), (10) несложно доказываться методом математической индукции с помощью известного тождества $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Однако, несмотря на явный вид полученной формулы (22), она неудобна для анализа асимптотик РСС Q_k при различных s .

Поэтому перейдем к выводу для РСС Q_k приближенной явной формулы методом среднего поля [1, 3–4]. При этом добавляемые в граф вершины будем нумеровать моментами i их поступления. Число N вершин в графе всегда будет равно текущему времени t поступления очередного приращения. С учетом этого выполним следующие предписываемые методом среднего поля шаги, имеющие достаточно простую вероятностную интерпретацию.

Шаг 1. Исходя из (1) запишем дифференциальное уравнение для изменения во времени средней степени k_i вершины i за счет присоединения новых приращений:

$$\frac{dk_i}{dt} = \frac{mf(k_i)}{\langle f \rangle t} = \frac{m(k_i + s)}{\langle f \rangle t}.$$

Поскольку здесь $\langle f \rangle = \langle k + s \rangle = 2m + s$, то

$$\frac{dk_i}{dt} = \frac{m(k_i + s)}{(2m + s)t}.$$

Решая это уравнение с разделяющимися переменными с учетом начального условия $k_i(i) = m$, получаем:

$$k_i = (m + s) \left(\frac{t}{i} \right)^{\frac{m}{2m+s}}. \quad (23)$$

Шаг 2. Используя (23), находим номер $i = l$ такой вершины, степень которой равна k

$$\frac{l}{t} = \left(\frac{k}{m + s} \right)^{-\frac{2m+s}{m}}.$$

Шаг 3. Отсюда получаем оценку $\hat{F}(k)$ функции $F(k)$ распределения (ф. р.) степени k вершины, случайно выбираемой в графе

$$\hat{F}(k) = \frac{t-l}{t} = 1 - \left(\frac{k}{m+s} \right)^{-\frac{2m+s}{m}}. \quad (24)$$

Шаг 4. Оценку для РСС вершин находим как производную от ф. р. (24)

$$\hat{Q}_k = \frac{2m+s}{m} (m+s)^{\frac{2m+s}{m}} k^{-\frac{3m+s}{m}}, \quad (25)$$

где $\hat{Q}_k$ – приближенная (асимптотически точная) оценка вероятности Q_k .

Анализ асимптотических свойств РСС Q_k в L -графах

Полученная оценка (25) показывает, что РСС вершин L -графа при любых s является асимптотически степенным. Это упрощает выполнение анализа, так как его можно свести к просмотру s , кратных m , и последующей логической интерполяции получаемых результатов на промежуточные значения s . Рассмотрим, как изменяется асимптотика РСС Q_k при изменении параметра s :

1. При $s = 0$ из (25) находим, что $\hat{Q}_k = 2m^2 k^{-3}$. Это значение s превращает весовую функцию $f(k) = k + s$ в весовую функцию графа БА и оценку (25) – в правильную оценку асимптотики $Q_k \sim ck^{-3}$ графа БА. Таким образом, значение $s = 0$ определяет одну из интересных нас степенных асимптотик $Q_k \sim ck^{-\alpha}$, у которых $2 < \alpha \leq 3$.

2. При $s = m, 2m, 3m, \dots$, согласно (25), реализуется степенная асимптотика $Q_k \sim ck^{-\alpha}$ с параметром $\alpha = 4, 5, 6, \dots$. Таким образом, в полубесконечном диапазоне $s \geq 0$ лишь одно значение – значение $s = 0$ – обеспечивает степенную асимптотику L -графа с принадлежащим диапазону $2 < \alpha \leq 3$, значением α (значением $\alpha = 3$).

Заметим, что соотношение (13) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между точками диапазона $s \geq 0$ и точками диапазона $0 \leq a < 1$. Отсюда следует, что в классе DR лишь один граф удовлетворяет нашему критерию – это граф БА, реализуемый при $a = 0$.

3. Оставшийся диапазон $s < 0$ ограничен условием реализуемости правила (1):

$$f(k) = k + s > 0, \quad k \geq m.$$

Для реализуемости этого условия на любом шаге выращивания графа необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $m + s > 0$, т. е. $s \geq -m$.

При $s = -0$, как мы видели выше в п. 1, имеет место асимптотика $Q_k \sim ck^{-3}$. В точке $s = -m + \varepsilon$, если $\varepsilon \rightarrow +0$, то, согласно (25), в асимптотике $Q_k \sim ck^{-\alpha}$ показатель $\alpha \rightarrow 2$. Очевидно, значения параметра s в промежутке $-m < s \leq 0$ приводят к значениям α в промежутке $-m < s \leq 0$.

Итак, цель исследования достигнута. Искомый класс графов с асимптотикой $Q_k \sim ck^{-\alpha}$, где $2 < \alpha \leq 3$, это L -графы с весовой функцией $f(k) = k + s$, где $-m < s \leq 0$. Если требуется реализовать α в промежутке $2 < \alpha \leq 3$, то по вытекающей из (25) формуле:

$$s = (\alpha - 3)m \quad (26)$$

сразу определяется нужный параметр s соответствующего L -графа.

Примечание 1. При моделировании реальных сетей значение m часто бывает не целым.

Графы, моделирующие такие сети, выращиваются путем использования стохастического приращения: новые вершины, добавляемые к графу, содержат случайное число x дуг со средним значением $\langle x \rangle = m$. Это не сказывается на справедливости формул (25), (26), поскольку асимптотика РСС вершин однозначно определяется весовой функцией и средним числом m дуг у приращения.

Итоги выполненного анализа графов классов GR и L подводятся в табл. 1.

Таблица 1

Асимптотики РСС Q_k в DR - и L -графах

Асимптотика РСС Q_k при $k \rightarrow \infty$	Значения параметра s весовой функции L -графа	Значения параметра a DR -графа
1. $Q_k \sim ck^{-\alpha}$, $2 < \alpha < 3$	2. $-m < s < 0$	3. отсутствуют
4. $Q_k \sim ck^{-3}$, $\alpha = 3$	5. $s = 0$	6. $a = 0$
7. $Q_k \sim ck^{-\alpha}$, $\alpha > 3$	8. $s > 0$	9. $0 < a < 1$
10. экспоненциальная	11. $s \rightarrow \infty$: $f(k)=1$	12. $a = 1$

Примечание 2. Значение $\alpha = 2$ в степенной асимптотике графов и сетей предпочтительного связывания недостижимо ни при каких весовых функциях, поскольку асимптотика $Q_k \sim ck^{-2}$ приводит к бесконечной средней степени связности $\langle k \rangle = \int_0^{\infty} kQ_k dk = \infty$, которая не возможна, так как в графах (сетях) предпочтительного связывания по построению $\langle k \rangle = 2m$.

Пример применения

Степенная асимптотика $Q_k \sim ck^{-\alpha}$ при $2 < \alpha \leq 3$ характерна, например, для сетей, входящих в состав Интернет. В работе [6] приводится пример решения задачи калибровки графа, моделирующего сеть автономных систем Интернет по статистическим данным об этой сети. Сеть состоит из $N = 22\,963$ узлов и $E = 48\,436$ ребер. Статистические данные содержат информацию о распределении степеней узлов сети. Всего таблица статистических данных содержит 1 713 строк, состоящих из двух чисел k, n_k , где k – степень узла ($k = 1, \dots, 1713$), n_k – число узлов со степенью k . Эмпирическое РСС Q_k получаем, добавляя в таблицу третий столбец, содержащий числа $Q_k = n_k/N$ (график этого распределения показан на рис. 2 маркерами).

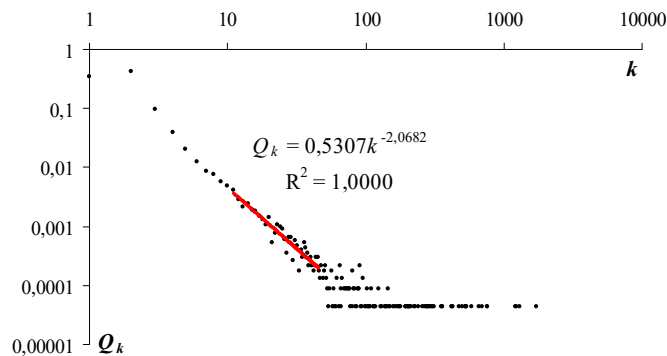


Рис. 2. Распределение Q_k в сети автономных систем Интернет

Значение параметра m сети равно $E/N = 2,1093$. Чтобы найти эмпирическое значение

показателя α , строится линия степенного тренда $Q_k \sim ck^{-\alpha}$ (красная сплошная линия на рис. 2), для которой c и α определяются методом наименьших квадратов (МНК). При этом начальная часть используемого эмпирического РСС исключается, поскольку требуется определить асимптотическую характеристику. Эмпирические вероятности Q_k больших значений k тоже не используются, так как в растущей сети еще мало узлов с такими степенями, и эмпирические вероятности таких степеней ненадежны (рис. 2). В результате применения МНК получаем эмпирическую асимптотику $Q_k \sim ck^{-\alpha}$, в которой $\alpha = 2,0682$. По формуле (26) вычисляем $s = -1,9655$. Следовательно, нужная асимптотика реализуется в моделирующей сеть графе с весовой функцией $f(k) = k - 1,9655$ (при среднем числе дуг в приращении $m = 2,1093$). Определением этой весовой функции, обеспечивающей требуемую асимптотику распределения Q_k , мы теперь легко решили основную задачу калибровки.

Кроме этого, методами, изложенными в работах [5–7], за счет определения подходящего стохастического приращения (когда число исходящих дуг приращения является не детерминированной, а случайной величиной) мы, как и раньше, решаем задачу реализации специфической начальной части последовательности Q_k . В результате модель сети АС теперь определяется как граф предпочтительного связывания, весовая функция которого при $k \geq 11$ задается формулой $f(k) = k - 1,9655$, а при $k = 1, \dots, 10$ принимает значения 0, 0, 0, 1,38802, 2,40613, 5,28966, 6,67, 6,71098, 7,79545, 8,10619 соответственно. Стохастическое приращение определяется как вершина со случайным числом x дуг, которое может принимать значения $x = 1, \dots, 6$ с вероятностями 0,34145, 0,42246, 0,09664, 0,09433, 0,01504, 0,03008 соответственно (при этом, разумеется, среднее значение x равно $m = 2,1093$).

На рис. 3 показан результат проверки выполненной калибровки путем непосредственного выращивания графа с описанными выше калиброванными весовой функцией $f(k)$ и распределением числа x дуг в стохастических приращениях графа. Рекуррентные формулы для точного расчета РСС вершин растущего графа со стохастическим приращением выведены в [6]:

$$Q_g = \frac{r_g \langle f \rangle}{\langle f \rangle + mf(g)}, \quad (27)$$

$$Q_k = \frac{r_k \langle f \rangle + mf(k-1)Q_{k-1}}{\langle f \rangle + mf(k)}, \quad k \geq g+1, \quad (28)$$

где $g = k_{\min}$; $r_g, r_{g+1}, \dots, r_h$ – вероятности того, что число x дуг приращения равно $g, g+1, \dots, h$ соответственно (в нашем случае $g = 1, h = 6$).

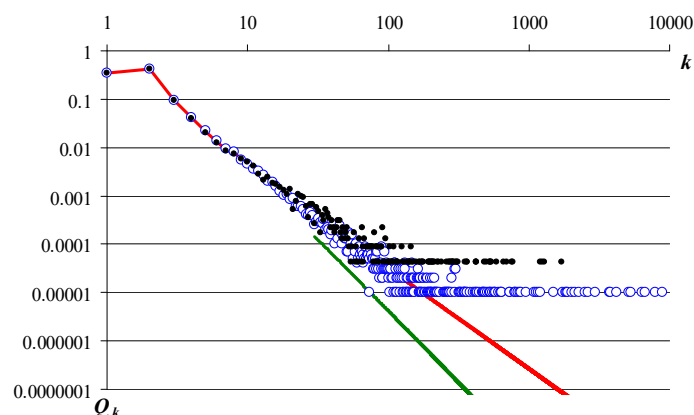


Рис. 3. Распределение Q_k степеней вершин в графе из 100 тысяч вершин, выращенном в имитационной модели (синие круглые маркеры) на фоне распределения, рассчитанного по точным формулам (27)–(28) (красная верхняя сплошная линия). Черные точки – распределение Q_k в моделируемой сети автономных систем. Зеленая нижняя сплошная линия показывает угол наклона графика РСС Q_k , реализуемого при традиционном использовании весовой функции $f(k) = k$, реализующей асимптотику $Q_k \sim ck^{-3}$. За счет изменения коэффициента c зеленую линию можно поднять выше, но нельзя изменить ее угол наклона

Рис. 3 наглядно демонстрирует, что правильный выбор весовой функции позволяет адекватно воспроизводить в графовых моделях асимптотику РСС узлов моделируемых сетей. Благодаря этому принципиально повышается качество решения задач моделирования. В частности, обеспечивается адекватное прогнозирование обусловленных ростом сетей изменений в сетевых процессах.

Заметим, что реализованное в рассмотренном примере РСС, имеющее значительно более тяжелый хвост, чем РСС графа БА, обуславливает более интенсивный рост степеней вершин и более значительную долю «центров влияния» – вершин с очень высокими степенями связности. Это отличие заметно даже при визуальном восприятии выращиваемых графов, если их изображать в масштабе, обеспечивающем наличие на одном рисунке нескольких тысяч вершин.

Заключение. Выполнено исследование растущих случайных графов класса DR (гибридных графов Джексона – Роджерса), генерируемых с использованием смеси двух весовых функций $f_1(k) = 1$ и $f_2(k) = k$, и случайных графов класса L , выращиваемых с использованием линейной весовой функции $f(k) = k + s$ или $f(k) = 1$.

В ходе исследования доказано, что у каждого гибридного графа класса DR имеется двойник – граф класса L с точно такими же финальными распределениями степеней вершин, степеней дуг и степеней ребер. Доказано и более сильное утверждение, что всякий DR -граф эквивалентен своему L -двойнику. Приведена формула, по которой определяется соответствующий L -граф – двойник DR -графа. Найдены асимптотики распределений Q_k для всех значений параметров весовых функций в обоих классах графов.

Установлено, что графы с асимптотикой $Q_k \sim ck^{-\alpha}$, где $\alpha \in (2, 3]$, широко распространенной в реальных быстро растущих сетях, реализуются линейной весовой функцией $f(k) = k + s$ со смещением s , лежащим в диапазоне $-m < s \leq 0$, где m – число дуг в приращении графа. Приведенный в статье пример применения полученных теоретических результатов подтверждает их правильность и практическую значимость.

Полученные результаты могут использоваться при построении графовых моделей реальных растущих сетей (таких, как сети сотрудничества ученых [8], социальные сети [9], сети передачи данных [10] и др.). Эти результаты можно применять при исследовании сетей и сетевых процессов как аналитическими [11–13], так и имитационными [14–15] методами. Это позволит существенно повысить адекватность и эффективность разрабатываемых методов взаимодействия с реальными сетями и методов управления сетевыми процессами.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-60023 мол_а_дк.

Литература

1. Barabasi A. L., Albert R. Emergence of scaling in random networks // Science. 1999. V. 286. P. 509–512.
2. Barabasi A. L. Scale-free networks: A decade and beyond // Science. 2009. V. 325. P. 412–413.
3. Jackson M. O., Rogers B. W. Meeting Strangers and Friends of Friends: How Random are Social Networks? Forthcoming // American Economic Review, 2006.

4. Jackson M. O. Social and Economic Networks: Models and Analysis. Stanford University ; Santa Fe Institute: CIFAR, 2010.
5. Zadorozhnyi V. N., Yudin E. B. Growing network: models following nonlinear preferential attachment rule // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2015. V. 428. P. 111–132.
6. Задорожный В. Н. Случайные графы с нелинейным правилом предпочтительного связывания // *Проблемы управления*. 2010. № 6. С. 2–11.
7. Zadorozhnyi V. N., Yudin E. B., Yudina M. N. Analytical and numerical methods of calibration for preferential attachment random graphs // *International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON) 2017*. Astana, Kazakhstan. 2017. P. 1–6.
8. Fortunato S., Bergstrom C. T., Börner K., Evans J. A., Helbing D., Milojević S, Petersen A. M., Radicchi F., Sinatra R., Uzzi B. , Vespignani A., Waltman L., Wang D. , Barabási A-L. Science of Science // *Science*. 2018. V. 359. P. 6379.
9. Deville P., Song C., Eagle N., Blondel V. D., Barabasi A-L., Wang D. Scaling Identity Connects Human Mobility and Social Interactions // *PNAS*. 2016. V. 113. № 26. P. 7047–7052.
10. Lo C., Cheng J., Leskovec J. Understanding Online Collection Growth Over Time: A Case Study of Pinterest // *ACM International Conference on World Wide Web (WWW)*, 2017.
11. Karrer B., Newman M. E. J. Competing epidemics on complex networks // *Phys Rev*. 2011. № 84.
12. Boccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., Hwang D-U. Complex networks: Structure and dynamics // *Physics Reports*. 2006. № 424. P. 175–308.
13. Zan Y. DSIR double-rumors spreading model in complex networks // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2018. V. 110. P. 191–202.
14. Witten G., Poulter G. Simulations of infectious diseases on networks // *Computers in Biology and Medicine*. 2007. V. 37. № 2. P. 195–205.
15. Aksyonov K., Bykov E., Aksyonova O., Nevolina A., Goncharova N. Architecture of the Multi-agent Resource Conversion Processes Extended with Agent Coalitions : *IEEE International Symposium on Robotics and Intelligent Sensors, IRIS 2016*. Hosei University, Tokyo, Japan, December 17–20, 2016, Code 134518 // *Procedia Computer Science*. 2017. V. 105. P. 221–226.

УДК 52-87:521.313:531.133.1

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ВРЕМЕНИ ПАДЕНИЯ СПУТНИКОВ НА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОРБИТАХ

А. И. Назаренко, И. В. Усовик

*Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт
системных исследований Российской академии наук
anazarenko32@mail.ru, usovikiv@mail.ru*

В статье на конкретных примерах показано, что для эллиптических орбит решение задачи определения времени падения спутников может быть неустойчивым.

Ключевые слова: эллиптическая орбита; прогноз движения; вход в атмосферу.

INSTABILITY OF SOLUTION FOR DETERMINATION OF TIME OF SATELLITES FALLING ON ELLIPTIC ORBITS

A. I. Nazarenko, I. V. Usovik

*System Research Institute, Russian Academy of Sciences
anazarenko32@mail.ru, usovikiv@mail.ru*

The article considers specific examples for elliptic orbits. It is shown that the solution for determination of the time of satellites falling can be unstable.

Keywords: elliptic orbit, motion prediction, atmospheric entry.

При решении задач моделирования эволюции космического мусора на низких околоземных орбитах существенную роль играет самоочищение орбит за счет торможения объектов в атмосфере [1]. Поэтому модели снижения объектов в верхних слоях атмосферы нуждаются в постоянной верификации и уточнении. Также большое значение приобретает задача предсказания падения крупных фрагментов космического мусора, отслуживших свой срок спутников, в связи с возможным ущербом для объектов на Земле [2–3]. Методика решения рассматриваемой задачи основана на интегрировании уравнений движения при известных *начальных условиях* (НУ). Особенностью задачи является чувствительность результатов к точности исходной характеристики торможения, например, баллистического коэффициента Sb . Дело в том, что время существования спутников обратно пропорционально характеристике торможения $t_{\text{life}} \approx C/Sb$, где C – некоторая константа [4]. Отсюда следует важная зависимость для оценок погрешностей определения времени существования, которые пропорциональны времени существования

$$\delta t_{\text{life}} \approx -\frac{\delta Sb}{Sb} \cdot t_{\text{life}}. \quad (1)$$

Кроме того, в упомянутой монографии [4] показано, что для эллиптических орбит с малой высотой перигея возможна неустойчивость результатов интегрирования. В этом случае величина δt_{life} оказывается существенно больше ожидаемого значения. Выведено условие неустойчивости, которое зависит от наклона орбиты, аргумента перигея и высоты. Однако никаких реальных данных о наблюдаемой неустойчивости определения времени падения спутников в известных публикациях найти не удалось.

Ниже показаны конкретные примеры неустойчивости. Для расчета времени падения спутников применен метод *оптимальной фильтрации измерений* (ОФИ) [5]. Выбраны данные

о двух спутниках на эллиптических орбитах («Молния-1-44» и 2-я ступень РБ Zenit-2 SB), которые прекратили существование в октябре 2017 г. и в январе 2018 г. соответственно. Важным было, что в обоих случаях имеются наблюдения их времени и места падения.

Время и место входа в плотные слои атмосферы спутника «Молния-1-44»

На сайте компании Aerospace Corporation [6] размещена следующая информация о падении *космического аппарата* (КА) «Молния-1-44».

Re-entry prediction

Predicted Reentry Time: 23 OCT 2017 14:46 UTC $\pm$ 1 hour

Predicted Epoch: 23 OCT 2017 10:07:42.382 UTC

На рис. 1 эти данные нанесены на карту.



Рис. 1. Данные Aerospace Corporation о возможных районах падения

На карте кружком отмечена расчетная точка падения 23 октября в 14^h 46^m. Прогноз выполнен по НУ за 10^h 07^m. Интервал прогноза составил 279 мин. Назначенное «окно» ($\pm$ 1 час) составляет 21 % от оставшегося времени существования. Результат Американской системы контроля 14^h 02^m [7] отличается от данных рисунка на 44 мин. На карте этому времени соответствует район пролета над Южной Африкой.

На рис. 2 представлены результаты 85 прогнозов движения КА до момента достижения высоты входа в плотные слои атмосферы (80 км) на основе результатов применения методики ОФИ. Расчетные моменты входа находятся в интервале значений от 12 ч 21 октября до 12 ч 24 октября. Минимумы имели место после геомагнитных бурь 1, 11–15 октября. Это является естественным следствием увеличения фактического торможения. Максимальное значение времени входа было достигнуто после минимума оценок S_b – 11 октября, непосредственно перед началом упомянутой выше сильной геомагнитной бури.

Характерной особенностью данных рис. 2 является стабилизация расчетных значений времени входа на интервале времени после 19 октября. Этот район выделен прямоугольником. Такая стабилизация объясняется рядом причин:

- по мере уменьшения высоты спутника растет плотность атмосферы и уменьшается ее изменчивость;
- достоинства применения метода ОФИ в части повышения точности определения и прогнозирования орбит проявляются именно при краткосрочных прогнозах.

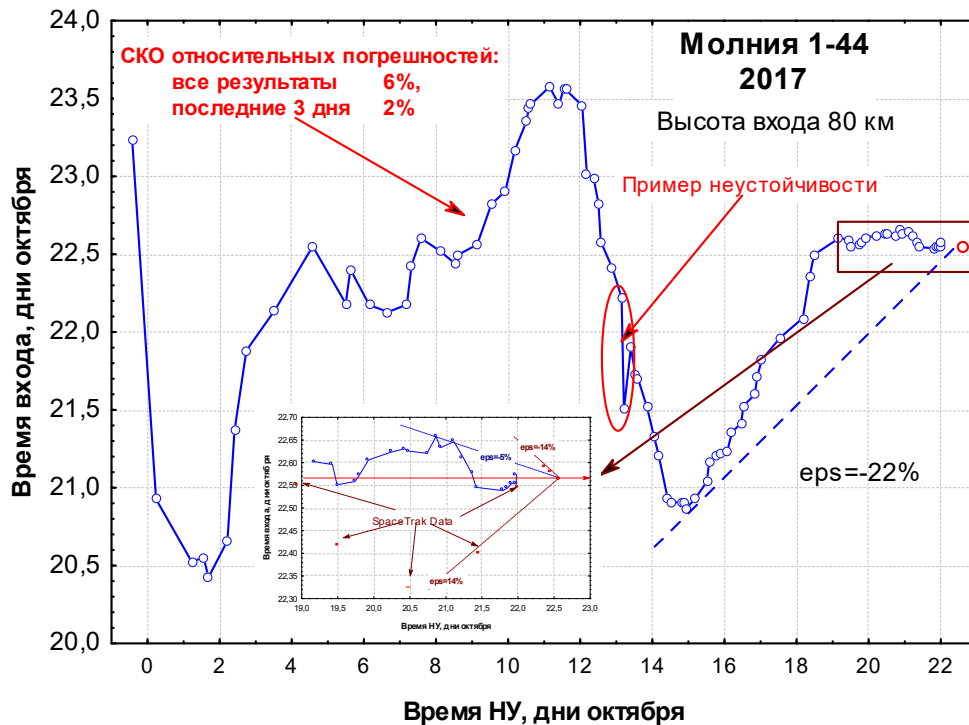


Рис. 2. Прогнозные оценки времени входа в плотные слои атмосферы

Последний прогноз выполнен по начальным условиям 22 октября за 23^h 25^m. Расчетное время входа составило 23 октября 13^h 46^m. Длительность полета КА от момента времени НУ до точки входа ≈ 14 ч.

Из данных рис. 2 видно, что наряду с понятными изменениями прогнозных оценок времени входа, обусловленными влиянием геофизических факторов, имеется одно скачкообразное изменение расчетного времени входа, соответствующее НУ за 14 октября. Данный район выделен красным эллипсом. При начальных условиях за 03^h 21^m 14 октября ожидаемое время входа составило 05^h 17^m 23 октября. При использовании следующих начальных условий за 05^h 02^m той же даты расчетное время входа составило 12^h 03^m 22 октября, т. е. уменьшилось сразу на ≈ 17 ч. При использовании последующих НУ расчетное время входа вернулось к ожидаемым значениям (плавное изменение оценок). Возможность возникновения неустойчивых оценок времени существования спутников была упомянута выше. Доказано, что эта неустойчивость возникает у низких спутников на эллиптических орбитах при некоторых значениях аргумента перигея. Именно таким спутником является КА «Молния-1-44».

Данные этого рисунка очень полезны для объяснения изложенных выше результатов. Видна большая разница высот апогея и перигея, который у этого КА находился на широте $\approx 61^\circ$. На полусуточном интервале прогноза, как и следовало ожидать, высота апогея существенно уменьшилась (на 100 км). На этом интервале высота перигея уменьшалась намного медленнее. В момент последнего перед падением пролета КА в высоких широтах (в момент времени $\approx 12^h 59^m$) высота составила 102 км. После этого началось быстрое уменьшение высоты. Через 48 мин КА снизился до 80 км. Как показывают расчеты, после достижения высоты ≈ 100 км спутники долго не существуют. В большинстве случаев они прекращают существование уже через 20–30 мин. В данном случае это время оказалось намного больше – составило ≈ 50 мин. Это объясняется положением перигея в высоких широтах. Все дело в том, что после пролета перигея высота спутника меняется в результате влияния двух обстоятельств: увеличивается вследствие удаления от перигея, уменьшается под действием торможения и влияния сжатия Земли.

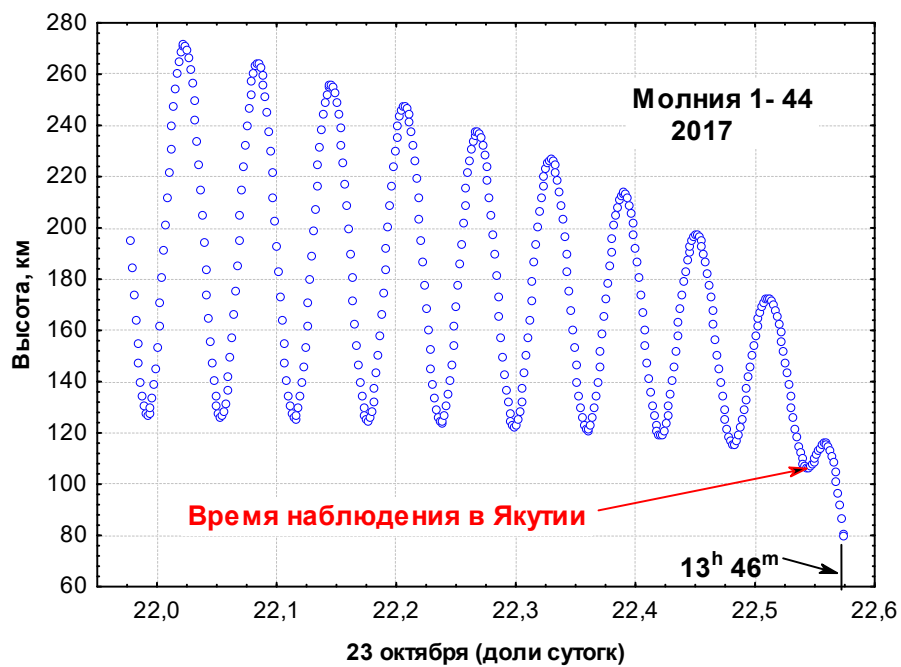


Рис. 3. Изменение высоты при прогнозе до точки входа

Первое обстоятельство приводит к продлению времени существования, однако в данном случае второе обстоятельство оказалось более существенным. Это видно из правой части графика на рис. 3.

Достоверность приведенной здесь оценки времени достижения высоты 80 км ($13^h 46^m$) подтверждают сведения о том, что вечером 23 октября ($12^h 29^m$ UT) жители Якутии наблюдали и сфотографировали падение спутника. Именно в это время КА «Молния 1-44» пролетал над Якутией.

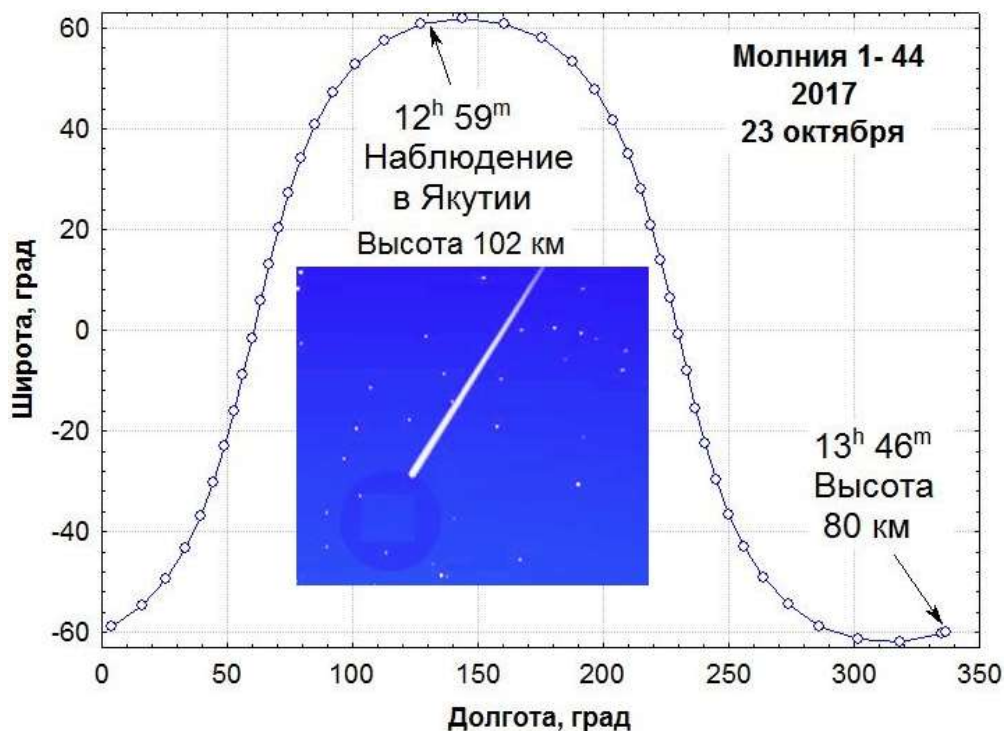


Рис. 4. Координаты подспутниковых точек перед падением КА

Здесь на 86-минутном интервале времени приведен след орбиты на поверхности Земли перед расчетным временем падения КА в 13^h 46^m 23 октября. Правая часть графика (после пролета над Якутией) характеризует наиболее вероятный район сгорания и падения фрагментов КА. Весь этот район относится к Тихому океану и отчасти к юго-западной части Атлантического океана.

Яркое свечение падающих спутников наблюдается обычно при их сгорании в верхних слоях атмосферы. Наблюдение падения в Якутии показывает, что КА начал разрушаться уже на высоте более 102 км. От него отделились легкие элементы конструкции большого размера, имеющие большое отношение площади к массе. Именно такие фрагменты наблюдали жители Якутии. Тяжелые фрагменты разрушения малого размера могли продолжать полет еще несколько десятков минут. **Таким образом, интервал времени от 12^h 59^m до 13^h 46^m 23 октября является наиболее вероятным временем прекращения существования фрагментов КА «Молния 1-44».**

Важной характеристикой точности определения времени входа является относительная погрешность (eps). Она рассчитывается как отношение разности расчетного и эталонного времени входа к оставшемуся времени существования. Эта оценка была рассчитана для всех 85 прогнозов при разных НИ. В качестве эталонного значения использовалось последнее расчетное время входа. По данным всех прогнозов, СКО относительной погрешности составило 6 %, а по данным за последние 3 дня – 2 %.

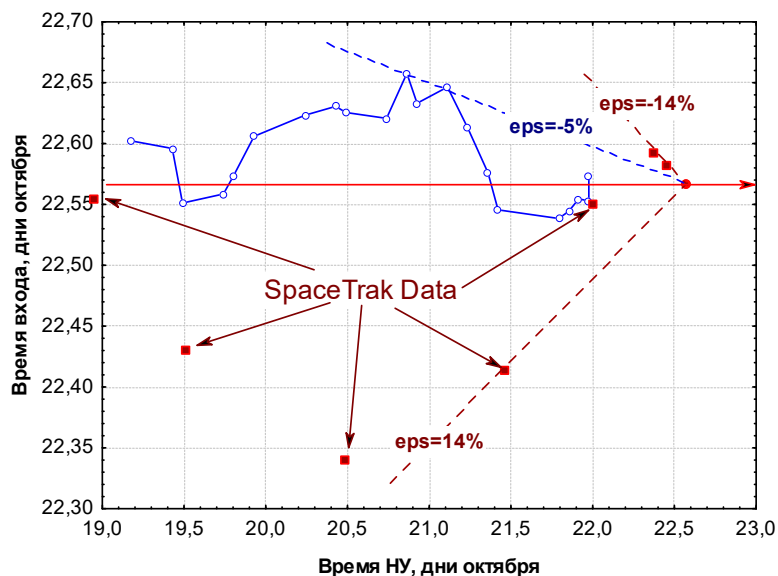


Рис. 5. Сравнение оценок времени падения

Сравнение результатов применения метода ОФИ с данными Space Track приведено на рис. 5, где они помечены коричневыми квадратами. Видно, что в 5 случаях из 7 результаты прогноза времени падения довольно сильно отличаются от эталонного значения. Относительная погрешность достигает 14 %. При использовании методики ОФИ относительная погрешность не превысила 5 % при СКО относительных погрешностей равном 2 %.

Важно отметить, что в Американской системе контроля последнее уточнение параметров орбиты по измерениям было выполнено в 11^h 45^m, т. е. за 2 ч 17 мин до их расчетного времени падения в 14^h 02^m 23 октября. Кроме того, на одном из предыдущих витков они также имели измерения. Объявленное окно (± 29 мин) не противоречит нашим данным, так как момент времени 14^h 02^m – 29^m = 13^h 33^m меньше нашей оценки времени падения 13^h 46^m.

Таким образом, несмотря на существенно лучшие информационные возможности Американской системы контроля, уровень относительных погрешностей их данных (14 %) был в ≈ 3 раза больше результатов применения метода ОФИ.

На рис. 6 представлены окончательные результаты всех рассмотренных выше определений времени и района падения. Красным цветом отмечены данные применения метода ОФИ.



Рис. 6. Данные о возможных районах падения

Таблица 1

Основные результаты

Источник	Время падения	Долгота	Широта
ОФИ	12 ^h 59 ^m - 13 ^h 46 ^m	327.8°	-61.2°
Space Track	14 ^h 02 ^m $\pm$ 29 ^m	23.5°	-28.6°
Aerospace	14 ^h 45 ^m $\pm$ 60 ^m	197.6°	19.8°

Выше было показано, что по данным применения метода ОФИ интервал времени от 12^h 59^m до 13^h 46^m 23 октября является наиболее вероятным временем прекращения существования фрагментов КА «Молния 1-44». По американским данным, левая граница интервала возможного времени падения практически совпадает с результатом прогноза точки падения на основе применения метода ОФИ (13^h 46^m). Однако эти результаты не согласуются с достоверными данными о наблюдении падения фрагментов КА над Якутией в 12^h 59^m 23 октября.

Определение времени и места входа в плотные слои атмосферы 2-й ступени ракеты Zenit-2SB

В статье [8] опубликованы детальные данные о наблюдении падения этого спутника (рис. 7).

Время входа в плотные слои атмосферы (по данным Space Track и Aerospace Corporation [6]) – 27 января 2018 г. 23^h 32^m (UTC).



Рис. 7. Данные о наблюдении падения 2-й ступени ракеты в Перу

На рис. 8 представлены результаты 38 прогнозов движения КА до момента достижения высоты входа в плотные слои атмосферы (80 км) на основе результатов применения методики ОФИ.

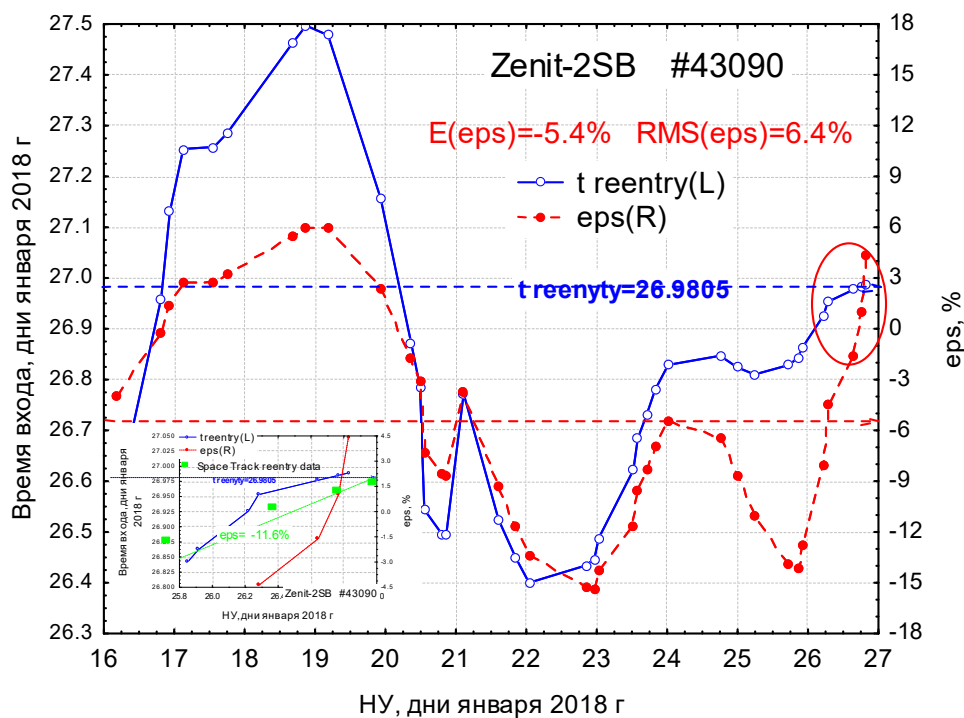


Рис. 8. Прогнозные оценки времени входа в плотные слои атмосферы

Последний прогноз выполнен по НУ за 19^h 52^m 27 января. Расчетное время входа составило 27 января 23^h 44^m. Отличие этой оценки от данных рис. 7 (23^h 32^m) составляет 12^m. При длительности полета КА от момента времени НУ до точки входа (3 ч 40 мин) этому

отличию соответствует относительная погрешность 5 %. У последних четырех прогнозов относительная погрешность (eps) находится в пределах ± 5 %.

В нижнем левом углу в более крупном масштабе представлены те же результаты за последние сутки. Из данных рис. 8 видно, что в течение последних суток перед падением расчетное время падения увеличилось на $\approx 1,5$ ч, т. е. на время одного оборота. Именно в этом обстоятельстве проявилась рассматриваемая в данной статье неустойчивость.

Для пояснения рассмотрим данные рис. 9.

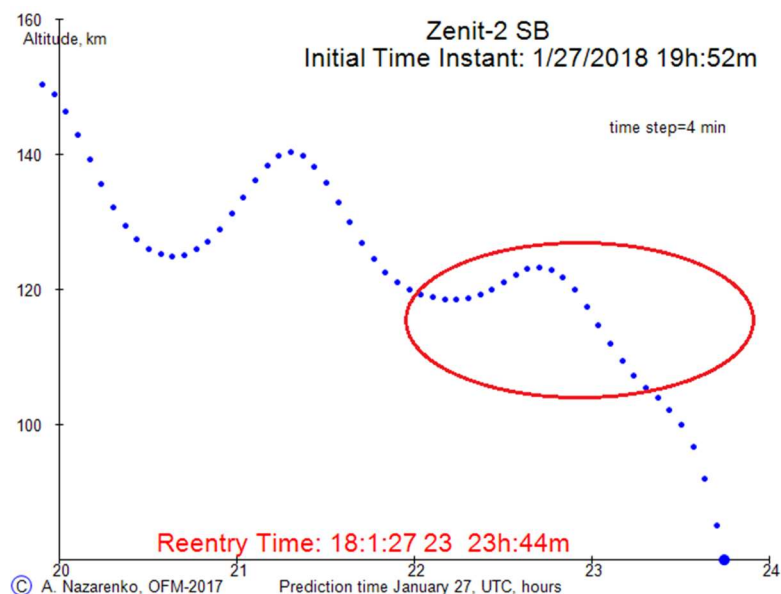


Рис. 9. Изменение высоты на интервале прогноза

При анализе этого графика надо иметь в виду, что точки достижения минимальной высоты находятся в окрестности нисходящего узла. Этим последним трем точкам соответствуют моменты времени: 20^h 36^m, 22^h 03^m и 23^h 30^m. При использовании прогноза НУ вечером 25 января спутник прекратил существование вскоре после прохождения нисходящего узла в 22^h 03^m. Однако в результате внесения небольших поправок в НУ при последующих прогнозах спутник прекратил существование в окрестности прохождения следующего нисходящего узла в 23^h 30^m. **Именно в этом проявилась рассматриваемая неустойчивость результатов прогноза.**

В заключение раздела обратим внимание на уровень относительных погрешностей определения времени падения (eps) на интервале последних перед падением суток. На рис. 8 данные Space Track (нижний левый угол) помечены зелеными квадратами. Максимальное значение eps достигает 11,6 %. При использовании метода оптимальной фильтрации измерений относительные погрешности оказались в $\approx 2,3$ раза меньше соответствующих результатов Space Track.

Выводы. На примерах определения времени падения КА «Молния-1 44» и 2-й ступени РБ Zenit-2 SB показано, что для спутников на эллиптических орбитах возможны случаи неустойчивых оценок времени прекращения существования. При небольших изменениях начальных условий время падения может сместиться на несколько витков.

На последних сутках перед падением применение метода оптимальной фильтрации измерений обеспечивает уменьшение относительных погрешностей определения времени падения в 2,3–3 раза по сравнению с результатами известных зарубежных специалистов.

Работа выполнялась при поддержке Российского научного фонда, грант № 18–11–00225).

Литература

1. Smirnov N. N., Kiselev A. B., Nazarenko A. I. Mathematical modeling of space debris evolution in the near Earth orbits // Moscow University Mechanics Bulletin, Allerton Press. (Vestnik Moskovskogo Universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika). 2002. № 4. P. 33–41.
2. The Reentry of Salyut7/Cosmos-1686 // ESA SP–345. Proceedings of an ESA Workshop held at ESOC, Darmstadt/FRG, 9 Apr. 1991.
3. Re-Entry of Space Debris // ESA SP–246. Proceedings of an ESA Workshop held at ESOC, Darmstadt/FRG, 24–25 Sep. 1985.
4. Назаренко А. И. Скребушевский Б. С. Эволюция и устойчивость спутниковых систем. М. : Машиностроение, 1981. 284 с.
5. Nazarenko A. I. How can we increase the accuracy of determination of spacecraft's lifetime? // Acta Astronautica. 2015. № 115. P. 229–236.
6. Center for orbital and reentry debris studies // Aerospace. URL: <http://www.aerospace.org/cords/> (дата обращения: 20.05.2018).
7. Space-Track.org. URL : <http://www.space-track.org> (дата обращения: 20.05.2018).
8. Pardini C., Anselmo L. Uncontrolled re-entries of massive space objects. 4-th International Space Debris Re-entry Workshop ESA/ESOC, Darmstadt, Germany, 28 February – 1 March, 2018.

УДК 004.942

БЛОЧНЫЙ ПОДХОД ДЛЯ РАЗРЕШЕНИЯ КОЛЛИЗИЙ ВИРТУАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ

Е. В. Страшнов, П. Ю. Тимохин

*Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт
системных исследований Российской академии наук
strashnov_evg@mail.ru, webpismo@yahoo.de*

В работе рассмотрена задача моделирования разрешения коллизий трехмерных объектов в системах виртуального окружения. Предлагается блочный подход, в котором объекты разрешаются попарно с одновременной обработкой для них ограничений контакта или удара. Это приводит к формулировке задачи Linear Complementarity Problem (LCP) – задачи с линейными дополнениями относительно неизвестных значений импульсов (удара или контактных сил). Решение задачи LCP осуществляется аналитическим путем перебора всевозможных вариантов, возникающих в зависимости от количества точек контакта, полученных на стадии определения коллизий виртуальных объектов. С применением предлагаемого подхода разрешение коллизий всей системы объектов основано на ранее разработанном итерационном методе последовательных импульсов. Итерации этого метода осуществляются для каждой пары объектов системы до тех пор, пока не будет выполнен хотя бы один из критериев сходимости, обеспечивающий необходимую точность и реальное время моделирования. Апробация предложенных в статье методов и алгоритмов была проведена в подсистеме динамики имитационно-тренажерного комплекса, разработанного в ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, и показала их применимость в системах виртуального окружения.

Ключевые слова: виртуальные объекты, разрешение коллизий, задача LCP, метод последовательных импульсов, системы виртуального окружения.

BLOCK APPROACH FOR COLLISION RESPONSE OF VIRTUAL OBJECTS

E. V. Strashnov, P. Yu. Timokhin

*System Research Institute, Russian Academy of Sciences
strashnov_evg@mail.ru, webpismo@yahoo.de*

The paper considers the problem of collision response simulation of 3D objects in virtual environment systems. To solve this problem, we propose a block solver in which objects are resolved in pairs with simultaneous processing of clipping contact or impact. It leads to formulation of the LCP (Linear Complementarity Problem) with linear complements with respect to unknown values of impulses (impacts or contact forces). The solution of LCP is performed analytically by the search of all possible options, depending on the count of contact points that are received on the collision detection of virtual objects. Using the proposed approach, the collision response of objects system is based on the sequential impulses method developed earlier. Iterations of this method are performed for each pair of system objects until at least one of the convergence criteria is fulfilled, ensuring necessary accuracy and real time simulation. Approbation of the proposed methods and algorithms was carried out in the dynamic subsystem of training complex, developed in SRISA RAS and showed their applicability in virtual environment systems.

Keywords: virtual objects, collision response, LCP problem, sequential impulses method, virtual environment systems.

Моделирование коллизий виртуальных объектов является неотъемлемой частью физического движка систем виртуального окружения. Это связано с тем, что в виртуальной среде необходимо обеспечить в реальном времени поведение объектов при их взаимодействии,

наиболее приближенное к реальной среде. Примерами коллизий являются соударение бильярдных шаров, качение колеса по подстилающей поверхности, захват и удержание объекта на трении, различные случаи статического равновесия тел и т. д. Поэтому разработка методов и алгоритмов расчета коллизий виртуальных объектов, исходя из физических законов взаимодействия объектов со средой (контакт, удар, трение и т. д.), является важной и актуальной задачей.

Задача моделирования коллизий виртуальных объектов включает в себя стадию определения коллизий [1–2], где проверяется сам факт пересечения объектов, и в случае их пересечения вычисляются необходимые параметры коллизии, и стадия разрешения коллизий [3–4], в которой рассчитывается реакция на столкновения объектов. Рассматриваем апостериорные алгоритмы определения коллизий, т. е. обработка коллизий происходит по наличию пересечения объектов. Поэтому в качестве параметров коллизии выбирается геометрическая информация о пересечении объектов, которая включает в себя нормаль проникновения, точки контакта и их глубины. При этом предполагается, что алгоритмы определения коллизий работают таким образом, что выбирается не больше четырех точек контакта, образуя максимально большую площадь контакта [5].

Рассмотрим стадию разрешения коллизий виртуальных объектов, где необходимо адекватно реагировать на столкновение объектов с моделированием удара, контакта и трения между ними. Моделирование контакта объектов с вычислением неизвестных контактных сил приводит к так называемой задаче LCP [6] (задача с линейными дополнениями), решение которой осуществляется с помощью прямых или итерационных методов. Прямые методы решения LCP, такие как методы Данцига [7] и Лемке [8], являются трудоемкими и вычислительно затратными, поэтому непригодны для задач, решаемых в режиме реального времени. Более широкое применение нашли итерационные методы, такие как проекционный метод Гаусса – Зейделя [9] и метод последовательных импульсов [10–11]. Однако эти методы в определенных случаях обладают невысокой сходимостью и дают результаты, которые зависят от порядка вычисления сил или импульсов. Последнюю проблему поясним на примере контакта бокса, имеющего массу m с плоской поверхностью, где P_i – точки контакта; $\mathbf{n}$ – нормаль к поверхности (рис. 1).

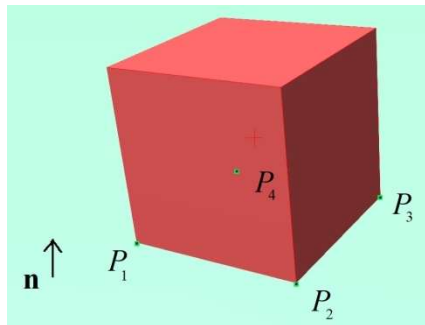


Рис. 1. Контакт бокса с плоскостью

Решая задачу контакта бокса с поверхностью проекционным методом Гаусса – Зейделя, получим следующие значения сил реакции опоры в точках P_i :

$$F_1 = F_3 = \frac{3}{10}mg, \quad F_2 = F_4 = \frac{1}{5}mg,$$

где g – ускорение свободного падения.

Эти результаты противоречат теории, согласно которой контактные силы распределяются равномерно для всех точек контакта.

Чтобы преодолеть проблемы итерационных методов решения задачи LCP, реализован блочный подход. Для этого предлагается модифицировать ранее разработанный метод последовательных импульсов [4, 11], предназначенный для моделирования динамики систем тел, с решением задачи LCP для каждой пары объектов. Основная идея состоит в том, что неизвестные значения импульсов контакта или удара для пары объектов определяются одновременно, а переход к следующей паре осуществляется итерационно с изменением скоростей тел. В работе предлагается алгоритм аналитического решения задачи LCP, с помощью которого сначала вычисляются импульсы, моделирующие контакт или удар, а уже затем импульсы, моделирующие все виды трения между телами. Разработанные методы и алгоритмы моделирования коллизий виртуальных объектов с применением блочного подхода были реализованы в виде программных модулей подсистемы динамики имитационно-тренажерного комплекса, созданного в ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН.

Задача LCP контакта пары виртуальных объектов

Рассмотрим в момент времени t контакт двух виртуальных объектов, которые представляют собой твердые тела (рис. 2) массой m_k и инерцией $\mathbf{I}_k$, где $k = 1, 2$.

Пусть $\mathbf{v}_k$ – линейные скорости тел, $\boldsymbol{\omega}_k$ – угловые скорости тел, $k = 1, 2$. Центры масс тел расположены в точках C_k , $k = 1, 2$. Все величины заданы в мировой системе координат.

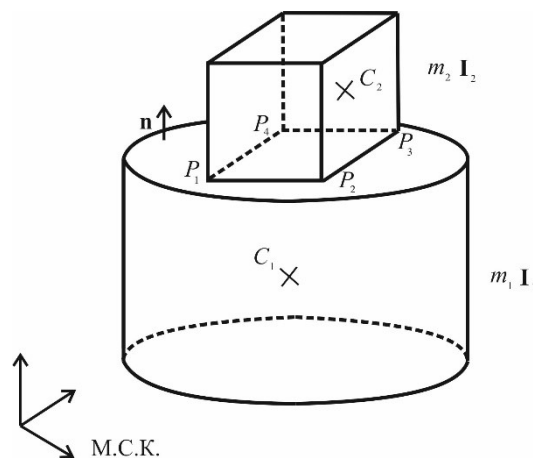


Рис. 2. Контакт двух виртуальных объектов

Выведем математическую модель контакта двух тел. Пусть алгоритм определения коллизий возвращает следующую информацию: $\mathbf{n}$ – нормаль контакта, направленная от первого объекта во второй, P_i , $i = \overline{1, N}$ – точки контакта. Мы рассматриваем случай контакта объектов, означающий, что относительная скорость тел в точках P_i мала:

$$|\Delta \mathbf{v}_{P_i} \cdot \mathbf{n}| \leq \varepsilon_c, \quad i = \overline{1, N},$$

где $\Delta \mathbf{v}_{P_i} = \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{C}_2 \mathbf{P}_i - \mathbf{v}_1 - \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{C}_1 \mathbf{P}_i$ – относительная скорость;

ε_c – задаваемое значение малости относительной скорости.

Моделирование динамики тел состоит в том, чтобы определить их состояние (координаты и скорости) в момент времени $t + \Delta t$, где Δt – шаг моделирования динамики.

На следующем шаге моделирования необходимо обеспечить условие, что объекты не могут проникать друг в друга. Для этого должны быть выполнены следующие ограничения относительно скоростей тел:

$$\Delta \mathbf{v}_{Pi}(t + \Delta t) \cdot \mathbf{n} \geq 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

Это условие представим в следующем виде:

$$(\mathbf{v}_2(t + \Delta t) - \mathbf{v}_1(t + \Delta t)) \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\omega}_2(t + \Delta t) \cdot \mathbf{w}_{2i} - \boldsymbol{\omega}_1(t + \Delta t) \cdot \mathbf{w}_{1i} \geq 0, \quad i = \overline{1, N},$$

где $\mathbf{w}_{1i} = \mathbf{C}_1 \mathbf{P}_i \times \mathbf{n}$, $\mathbf{w}_{2i} = \mathbf{C}_2 \mathbf{P}_i \times \mathbf{n}$.

Объединим эти ограничения для всех точек контакта, записав их в матричном виде:

$$\mathbf{J}\mathbf{V}(t + \Delta t) = \begin{bmatrix} -\mathbf{n}^T & -\mathbf{w}_{11}^T & \mathbf{n}^T & \mathbf{w}_{21}^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\mathbf{n}^T & -\mathbf{w}_{1N}^T & \mathbf{n}^T & \mathbf{w}_{2N}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(t + \Delta t) \\ \boldsymbol{\omega}_1(t + \Delta t) \\ \mathbf{v}_2(t + \Delta t) \\ \boldsymbol{\omega}_2(t + \Delta t) \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad (1)$$

где $\mathbf{J}$ – матрица Якоби ограничений контакта размерности N на 12;

$\mathbf{V}$ – объединенный вектор скоростей для двух тел.

Из вычислительной динамики [12] известно, что силы и моменты, обеспечивающие ограничения (1), имеют вид $\mathbf{f}_c = \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda}$, где $\boldsymbol{\lambda}$ – вектор неизвестных множителей Лагранжа.

В случае контакта тел сила $\mathbf{f}_c$ противодействует проникновению тел друг в друга, поэтому должно быть выполнено условие $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$. Перейдем от сил к импульсам, умножив силу $\mathbf{f}_c$ на Δt . Тогда получим, что $\mathbf{p}_c = \mathbf{f}_c \Delta t = \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda} \Delta t = \mathbf{J}^T \mathbf{p}$ и должно быть выполнено условие

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\lambda} \Delta t \geq \mathbf{0}, \quad (2)$$

где $\mathbf{p}$ – неизвестные значения величин импульсов.

Движение тел подчиняется дифференциальным уравнениям Ньютона – Эйлера, которые для пары тел можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{F},$$

где $\mathbf{M} = \text{diag} \{m_1 \mathbf{E}_3, \mathbf{I}_1, m_2 \mathbf{E}_3, \mathbf{I}_2\}$ – диагональная матрица масс двух тел размерности 12 на 12;

$\mathbf{F}$ – сумма всех сил и моментов, действующих на рассматриваемую пару тел;

$\mathbf{E}_3$ – единичная матрица размерности 3 на 3.

Воспользуемся схемой Эйлера для интегрирования уравнений движения и перейдем от сил к импульсам. Тогда получим следующие соотношения:

$$\mathbf{V}(t + \Delta t) = \mathbf{V}(t) + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p}_c = \mathbf{V}(t) + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{p}. \quad (3)$$

Подставляя данное выражение в (1), получим матричное неравенство относительно неизвестных величин импульсов $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{J}\mathbf{V}(t + \Delta t) = \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{b} \geq \mathbf{0}, \quad (4)$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}^T$ – симметричная положительно полуопределенная матрица размерности N на N с компонентами $a_{ij} = m_1^{-1} + m_2^{-1} + \mathbf{w}_{1i}^T \mathbf{I}_1^{-1} \mathbf{w}_{1j} + \mathbf{w}_{2i}^T \mathbf{I}_2^{-1} \mathbf{w}_{2j}$, $i, j = \overline{1, N}$, $\mathbf{b} = \mathbf{J}\mathbf{V}(t)$. Для диагональных элементов матрицы $\mathbf{A}$ верно $a_{ii} > 0$, так как матрицы $\mathbf{I}_k^{-1}$ положительно определенные.

Введем следующее обозначение $\mathbf{z} = \mathbf{J}\mathbf{V}(t + \Delta t)$. В силу того, что работа сил реакции связей на любом возможном перемещении равна нулю [13, § 253], можно показать [14], что, переходя от работы к мощности, будут выполнены следующие соотношения:

$$p_i z_i = 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (5)$$

Объединяя (1), (2), (4) и (5), получим задачу LCP (задача с линейными дополнениями) контакта двух тел:

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} \geq \mathbf{0}, \quad p_i z_i = 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (6)$$

В рамках данной задачи требуется определить $\mathbf{p}$ и $\mathbf{z}$, удовлетворяющие условиям (6). Отметим, что в случае вырожденности матрицы $\mathbf{A}$ система линейных уравнений $\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ относительно неизвестных значений $\mathbf{p}$ может либо не иметь решение, либо иметь бесконечное множество решений. Если система уравнений не имеет решений, то это означает, что решение (6) должно содержать ненулевые z_i .

Аналитический метод решения задачи LCP

Одним из методов решения задачи (6) является перебор всевозможных решений. Для размерности задачи N решением задачи (6) будет один из 2^N возможных вариантов. Далее опишем подробно эти варианты в зависимости от N и приведем алгоритм их перебора.

При $N = 1$ задача (6) примет скалярный вид $z = ap + b$, $p \geq 0$, $z \geq 0$, $pz = 0$, где $a > 0$.

В этом случае возможны два решения. Если $b \geq 0$, то решением будет $p = 0$ и $z = b$. В противном случае, решая уравнение $ap + b = 0$, получим пару $p = -b/a > 0$ и $z = 0$.

При $N = 2$ задача (6) может иметь четыре решения. Если $b_1 \geq 0$ и $b_2 \geq 0$, то решением (6) будет $p_1 = p_2 = 0$, $z_1 = b_1$ и $z_2 = b_2$. Если выполнено условие $b_1 < 0$, то возможным решением (6) может быть $p_1 > 0$ и $p_2 = 0$. Для существования такого решения должны быть выполнены условия $z_1 = 0$ и $z_2 \geq 0$. Первое условие приводит к уравнению $z_1 = a_{11}p_1 + a_{12} \cdot 0 + b_1 = 0$, решением которого будет $p_1 = -b_1/a_{11} > 0$, так как $b_1 < 0$ и $a_{11} > 0$. Если неравенство $z_2 = a_{21}p_1 + a_{22} \cdot 0 + b_2 \geq 0$ относительно полученного p_1 выполнено, то $p_1 = -b_1/a_{11}$ и $p_2 = 0$ является решением (6). Если $b_2 < 0$, то возможным решением (6) может быть $p_1 = 0$ и $p_2 > 0$. Для существования такого решения должны быть выполнены условия $z_1 \geq 0$ и $z_2 = 0$. Из (6), решая уравнение $z_2 = a_{21} \cdot 0 + a_{22}p_2 + b_2 = 0$, получим $p_2 = -b_2/a_{22} > 0$. Если неравенство $z_1 = a_{11} \cdot 0 + a_{12}p_2 + b_1 \geq 0$ относительно полученного p_2 выполнено, то $p_1 = 0$ и $p_2 = -b_2/a_{22}$ является решением.

Последний вариант решения $p_1 > 0$ и $p_2 > 0$ соответствует $z_1 = z_2 = 0$. В этом случае потребуется решать систему линейных уравнений: $\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ от-

носителем неизвестных p_1 и p_2 . Эта система имеет единственное решение, если определитель матрицы $\mathbf{A}$ не равен нулю, т. е. для полуопределенной матрицы должно быть выполнено условие $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$. Тогда, решая систему, получим $p_1 = (-a_{22}b_1 + a_{12}b_2) / \det \mathbf{A}$ и $p_2 = (a_{21}b_1 - a_{11}b_2) / \det \mathbf{A}$. Вычисленные значения будут решением задачи (6), если будет выполнено $p_1 \geq 0$ и $p_2 \geq 0$.

При произвольном N задача (6) может иметь один из 2^N возможных решений. Эти решения мы классифицируем с помощью множества $\mathbf{S} = \{S_k\}$, $k = \overline{1, 2^N}$, где случаи S_k упорядочены по возрастанию количества ненулевых $\mathbf{p}$ так, что S_0 соответствует решению с $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, а S_{2^N} – решению с $\mathbf{p} > \mathbf{0}$.

Каждому случаю S_k сопоставим вектор $\mathbf{t}$ размерности N такой, что $t_i = 1$ при $p_i > 0$ и $t_i = 0$ при $p_i = 0$, где $i = \overline{1, N}$.

Числа m и r определяют количество ненулевых и нулевых $\mathbf{p}$ для случая S_k , где $m + r = N$.

Мы рассматриваем случай S_k , в котором m ненулевых и r нулевых значений $\mathbf{p}$. Для этого должно быть выполнено $\mathbf{z}^m = \mathbf{0}$, что приводит к системе уравнений относительно неизвестных $\mathbf{p}^m$:

$$\mathbf{A}^m \mathbf{p}^m + \mathbf{b}^m = \mathbf{0}, \quad (7)$$

где матрица $\mathbf{A}^m$ и векторы $\mathbf{z}^m$, $\mathbf{p}^m$ и $\mathbf{b}^m$ составлены из (6) по ненулевым значениям вектора $\mathbf{t}$ для рассматриваемого случая S_k .

Эта система может иметь одно решение, бесконечное множество решений или не иметь решений. Предлагается сначала искать решение системы с равномерным распределением, т. е. $p_i^m = p^*$, $i = \overline{1, m}$. Рассмотрим первое уравнение системы (7). Для существования решения с

равномерным распределением должно быть выполнено условие $\sum_{j=1}^m a_{1j}^m \neq 0$. Тогда из первого

уравнения (7) получим $p^* = p_i^m = -b_1^m / \sum_{j=1}^m a_{1j}^m$, $i = \overline{1, m}$. Если будут выполнены условия

$(\sum_{j=1}^m a_{ij}^m) p^* + b_i^m = 0$, $i = \overline{2, m}$, то полученные значения p^* являются решением системы уравнений

(7). В противном случае решаем эту систему методом Гаусса. Так как $a_{ii}^m > 0$, $i = \overline{1, m}$, то систему можно привести к виду $\mathbf{U}^m \mathbf{p}^m + \mathbf{y}^m = \mathbf{0}$, где $\mathbf{U}^m$ – верхнетреугольная матрица.

Если диагональные элементы матрицы $\mathbf{U}^m$ не равны нулю, то полученная система имеет единственное решение. В противном случае система имеет бесконечное множество решений, либо не имеет решений. Тогда процедура поиска решения будет следующей. Для матрицы $\mathbf{A}^m$ с рангом равном $m - 1$ получим, что если $u_{mm}^m = 0$ и $y_m^m = 0$, то в качестве p_m^m можно

выбрать любое решение, например, $p_m^m = -b_m^m / \sum_{j=1}^m a_{mj}^m$. В том случае, если $u_{mm}^m = 0$ и $y_m^m \neq 0$, то

система не имеет решений. Если для найденного решения выполнены условия $\mathbf{p}^m > \mathbf{0}$ и

$$\mathbf{z}^r = \mathbf{A}^r \mathbf{p}^m + \mathbf{b}^r = \mathbf{0}, \quad (8)$$

где матрица $\mathbf{A}^r$ и векторы $\mathbf{z}^r$, $\mathbf{p}^r$ и $\mathbf{b}^r$ составлены из (6) по нулевым значениям вектора $\mathbf{t}$ для рассматриваемого случая S_k , то $\mathbf{p}^m > \mathbf{0}$ и $\mathbf{p}^r = \mathbf{0}$ являются решением задачи (6).

Опишем алгоритм перебора возможных вариантов решения задачи (6). Пусть есть некоторый случай S_k с вектором $\mathbf{t}$ и числами m и r , $m + r = N$. Решая систему уравнений (7) относительно $\mathbf{p}^m$ и подставляя полученные значения в (8), вычисляем $\mathbf{z}^r$. Если окажется, что $z_j^r < 0$, $j = \overline{1, r}$, то потенциальным решением для данного j может быть $p_j^r > 0$. Аналогично, если $p_k^m < 0$, $k = \overline{1, m}$, то потенциальным решением может быть $p_k^m = 0$ и $z_k^m > 0$. По изменениям вычисляем новый вектор $\mathbf{t}$, по которому определяем новый случай S_k из множества S , а предыдущий случай исключается из рассмотрения. Если окажется, что новый случай уже обработан, то выбирается первый S_k во множестве S .

Алгоритм реализации перебора возможных решений для решения задачи LCP вида (6) будет следующим:

1. Инициализация: имеем начальный случай S_k , $k = \overline{1, 2^N}$, вектор $\mathbf{t}$ и числа m и r .

2. Цикл, пока $S \neq \emptyset$.

2.1. $S = S \setminus S_k$, $\mathbf{t}' = \mathbf{t}$, $m' = m$, $r' = r$.

2.2. Решаем систему линейных уравнений: $\mathbf{A}^m \mathbf{p}^m + \mathbf{b}^m = \mathbf{0}$.

2.3. Если система в п. 2.2 не имеет решений, то выбираем первый S_k во множестве S и вычисляем $\mathbf{t}$, m и r . Переходим к п. 2.1.

2.4. Вычисляем $\mathbf{z}^r = \mathbf{A}^r \mathbf{p}^m + \mathbf{b}^r$, $\mathbf{p}^r = \mathbf{0}$.

2.5. Цикл по $j \in \{j : t'_j = 1\}$.

2.5.1. Если $p_j^m < 0$, то $t_j = 0$, $m = m - 1$, $r = r + 1$.

2.6. Цикл по $j \in \{j : t'_j = 0\}$.

2.6.1. Если $z_j^r < 0$, то $t_j = 1$, $m = m + 1$, $r = r - 1$.

2.7. Если $m == m'$ и $r == r'$, то решение $\mathbf{p}$ найдено, завершаем цикл.

2.8. По полученному вектору $\mathbf{t}$ определяем S'_k .

2.9. Если S'_k есть во множестве S , то $S_k = S'_k$. Переходим к п. 2.1.

2.10. Выбираем первый S_k во множестве S , вычисляем $\mathbf{t}$, m и r .

3. Если решение не найдено, то:

$\mathbf{p} =$ Проекционный метод Гаусса – Зейделя($\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{p}^0$, $K_{\max}$).

Если $m \geq 2$, то в п. 2.2 алгоритма требуется решать систему линейных уравнений. Согласно описанной ранее методологии сначала мы пытаемся определить решение с равномерным распределением, а уже затем решаем систему методом Гаусса с приведением ее к верхнему диагональному виду с учетом случая, когда система может иметь бесконечное множество решений. В случае отсутствия решения системы, согласно п. 2.3 алгоритма выбрать первый возможный вариант S_k из множества S . На тот случай, если аналитическое решение задачи (8) не найдено, то в п. 2.10 алгоритма используется проекционный метод Гаусса – Зейделя [9, с. 102] с начальным приближением $\mathbf{p}^0$ и максимальным количеством итераций $K_{\max}$.

Метод последовательных импульсов

Для разрешения коллизий системы тел с помощью блочного подхода предлагается действовать ранее разработанный метод последовательных импульсов. Идея этого метода состоит в последовательной обработке ограничений относительно скоростей тел и вычислении импульсов, обеспечивающих эти ограничения. При этом соотношение для импульса текущего ограничения формулируется без учета влияния других ограничений, а переход к следующему ограничению осуществляется путем вычисления новых скоростей тел, для которых будет выполнено рассматриваемое ограничение. Следующее ограничение формулируется уже относительно новых скоростей.

Опишем основные положения метода последовательных импульсов с применением блочного подхода для разрешения коллизий тел. Пусть для текущего момента времени t имеем скорости тел $\mathbf{V}(t)$ для некоторой пары тел системы. Задача состоит в том, чтобы определить новые скорости тел $\mathbf{V}(t + \Delta t)$, удовлетворяющие различным ограничениям. В методе последовательных импульсов мы обрабатываем каждую пару тел последовательно и формируем ограничения относительно промежуточных скоростей $\mathbf{V}'(t + \Delta t)$.

Рассмотрим s -ю итерацию метода последовательных импульсов и пару тел, находящихся в состоянии коллизии. Пусть $\mathbf{p}^{(s-1)}$ – импульсы в задаче (6), вычисленные на предыдущей итерации. Сформулируем задачу (6) относительно новых импульсов $\mathbf{p}^{(s)}$. Для этого скорость ограничения $\mathbf{J}\mathbf{V}(t + \Delta t)$ представим в следующем виде:

$$\mathbf{z}^{(s)} = \mathbf{J}\mathbf{V}(t + \Delta t) = \mathbf{A}(\mathbf{p}^{(s)} - \mathbf{p}^{(s-1)}) + \mathbf{J}\mathbf{V}'(t + \Delta t) = \mathbf{A}\mathbf{p}^{(s)} + \mathbf{J}\mathbf{V}'(t + \Delta t) - \mathbf{A}\mathbf{p}^{(s-1)}.$$

Тогда задача (6) примет вид:

$$\mathbf{z}^{(s)} = \mathbf{A}\mathbf{p}^{(s)} + \mathbf{b}, \mathbf{p}^{(s)} \geq \mathbf{0}, \mathbf{z}^{(s)} \geq \mathbf{0}, p_i^{(s)} z_i^{(s)} = 0, i = \overline{1, N}, \quad (9)$$

где $\mathbf{b} = \mathbf{J}\mathbf{V}'(t + \Delta t) - \mathbf{A}\mathbf{p}^{(s-1)}$.

Метод последовательных импульсов с применением блочного подхода состоит в следующем. Последовательно обрабатывая пары тел на s -й итерации мы решаем аналитически задачу (9). Для этого применяется описанный ранее алгоритм перебора с начальным случаем S_k , сформированный по предыдущему решению $\mathbf{p}^{(s-1)}$. После нахождения $\mathbf{p}^{(s)}$ вычисляем $\Delta\mathbf{p}^{(s)} = \mathbf{p}^{(s)} - \mathbf{p}^{(s-1)}$ и, согласно (3), определяем новые скорости следующим образом:

$$\mathbf{V}(t + \Delta t) = \mathbf{V}'(t + \Delta t) + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T \Delta\mathbf{p}^{(s)}.$$

Вычисленные скорости $\mathbf{V}(t + \Delta t)$ и импульсы $\mathbf{p}^{(s)}$ используются для учета трений скольжения, вращения и качения [4], которые далее обрабатываются последовательно. По общепринятой методике удар и контакт моделируются единым образом с добавлением в вектор $\mathbf{b}$ составляющей удара $-k_{vos} \cdot \mathbf{J}\mathbf{V}(t)$, где k_{vos} – коэффициент восстановления при ударе.

После обработки текущей пары тел переходим к следующей, делая замену $\mathbf{V}'(t + \Delta t) = \mathbf{V}(t + \Delta t)$. Критериями окончания итерации метода последовательных импульсов является точность полученного решения $\|\Delta\mathbf{p}^{(s)}\| \leq \varepsilon$ и превышение времени расчета $t > t_{\max}$, необходимое для обеспечения режима реального времени. Полученные решения $\mathbf{p}^{(s)}$ контакта тел используются в качестве начального приближения для следующего шага моделирования.

Результаты моделирования

Предложенные методы и алгоритмы разрешения коллизий виртуальных объектов с

применением блочного подхода были реализованы в имитационно-тренажерном комплексе, разработанном в ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН и предназначенном для моделирования виртуальных роботов. В рамках этого комплекса определение коллизий осуществляется с помощью аппроксимирующих контейнеров различного типа (боксов, сфер, цилиндров, капсул и т. д.), окружающих геометрию объектов. В случае пересечения объектов алгоритмы проверки возможных пар объектов реализованы таким образом, что возвращают параметры коллизий, включающие нормаль, точки и их глубины. С помощью специальных алгоритмов построения контактного многообразия количество возвращаемых точек сокращается до четырех.

Апробация предложенных в статье алгоритмов и методов была проведена на нескольких тестовых сценах, включающих статическое равновесие множества тел. Первая сцена представляет собой рассмотренный ранее пример (см. рис. 1) равновесия бокса на плоской поверхности. В этом случае контактная площадка содержит четыре точки. Решая задачу (9) для этого примера с помощью метода последовательных импульсов, получаем: $p_i = \frac{1}{4} mg \Delta t$, $i = \overline{1,4}$. Вычисленные значения импульсов согласуются с теорией, состоящей в том, что сила реакции опоры при равновесии тела распределяется равномерно.

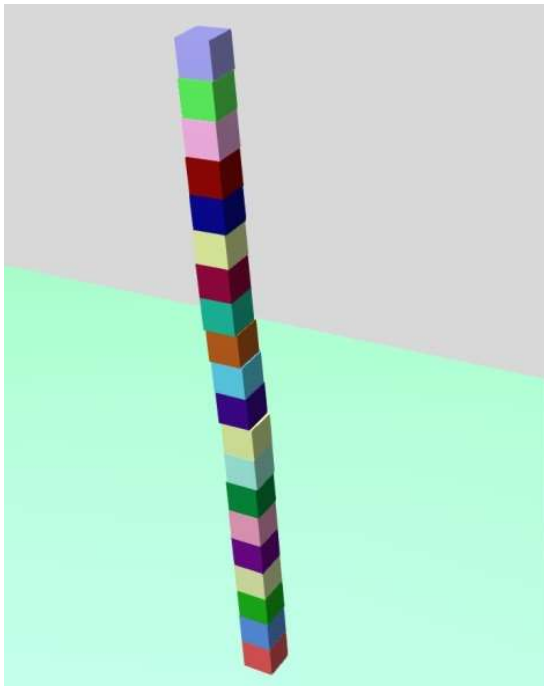


Рис. 3. Без применения блочного подхода

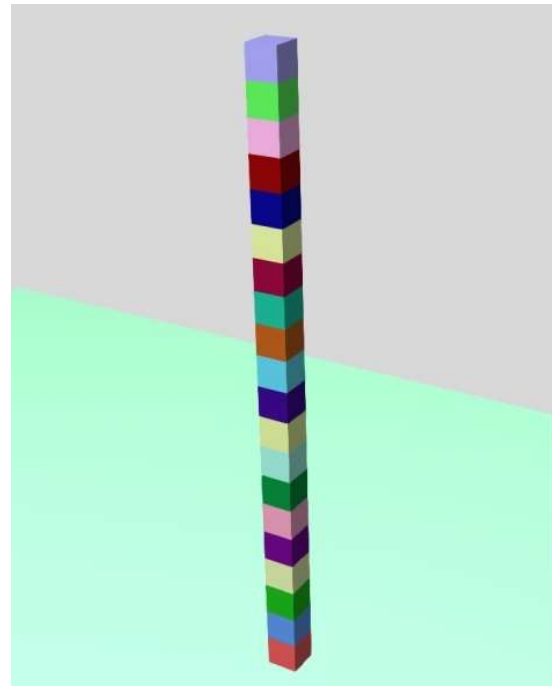


Рис. 4. С применением блочного подхода

Вторая тестовая сцена содержит 20 боксов, расположенных друг на друге. Для моделирования было взято 5 итераций метода последовательных импульсов. На этой сцене было выполнено сравнение двух подходов: без применения блочного подхода (рис. 3) и с применением (рис. 4). Без применения блочного подхода стопка боксов стремится отклониться от вертикального положения, в то время как блочный подход не обладает этой проблемой. Полученные результаты показывают, что блочный подход позволяет получить за малое количество итераций более точное решение в отличие от последовательной обработки.

В качестве третьей сцены была рассмотрена стенка из 120 боксов, выстроенная в виде пирамиды (рис. 5). Моделирование с применением блочного подхода позволяет обеспечить сходимость метода последовательных импульсов так, что обеспечивается равновесие стенки. Это имеет преимущество по сравнению с другими подходами, в которых из-за нехватки итераций возникают эффекты «дрожания» и «пошатывания» стенки.

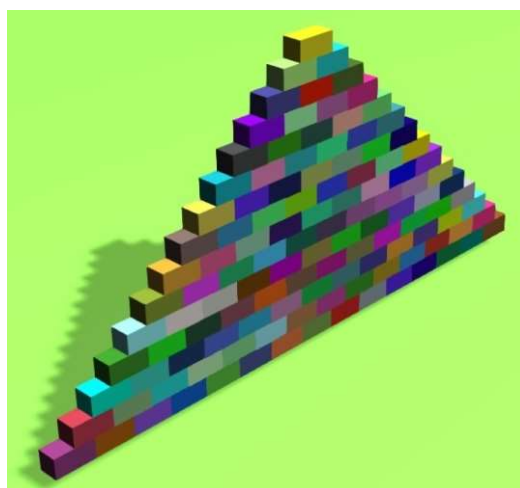


Рис. 5. Пирамида из 120 боксов

В последней виртуальной сцене был рассмотрен робот-кентавр (антропоморфный робот, установленный на подвижную платформу), находящийся внутри ангара (рис. 6). В этой сцене были протестированы захват и удержание коробки с помощью рук робота-кентавра. Полученные результаты показывают, что с применением блочного подхода удается реализовать операции захвата больших предметов.



Рис. 6. Захват коробки роботом-кентавром

Результаты апробации показали, что предложенные методы и подходы для разрешения коллизий объектов позволяют в режиме реального времени моделировать с необходимым качеством сложные динамические ситуации с равновесием покоящихся друг на друге тел.

Заключение. Предложенные в статье методы и алгоритмы для разрешения коллизий виртуальных объектов с применением блочного подхода устраняют недостатки итерационных методов. Локализация задачи контакта двух тел, с одной стороны, улучшает сходимость методов, а с другой стороны, повышает качество моделирования в сложных динамических ситуациях. В дальнейшем ожидается, что предложенные в данной работе подходы позволят реализовать захват мелких и сложной формы предметов с помощью пальцев антропоморфного робота.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-07-00137.

Литература

1. Ericson C. Real-time collision detection. CRC Press, 2004. 594 p.
2. Coutinho M. G. Guide to dynamic simulations of rigid bodies and particle systems. London : Springer, 2013. 399 p.
3. Kavan L. Rigid body collision response. Faculty of mathematics and physics Charles University of Prague, 2003.
4. Трушин А. М. Обработка коллизий виртуальных объектов с помощью метода последовательных импульсов // Тр. НИИСИ РАН. 2014. Т. 4. № 2. С. 95–105.
5. Moravanszky A., Terdiman P. Fast contact reduction for dynamics simulation // Game Programming Gems. Charles River Media. 2004. № 4. P. 253–263.
6. Murty K. G. Linear complementarity, linear and nonlinear programming. Berlin, Germany : Helderman-Verlag, 1988.
7. Baraff D. Fast contact force computation for nonpenetrating rigid bodies // Proceedings of SIGGRAPH, 1994.
8. Cline M. Rigid body simulation with contact and constraints : Master's thesis. University of British Columbia. July, 2002.
9. Stepien J. Physics-based animation of articulated rigid body systems for virtual environments. Gliwice, 2013.
10. Catto E. Iterative dynamics with temporal coherence // Game Developer Conference, 2005. P. 1–24.
11. Михайлюк М. В., Страшнов Е. В. Моделирование системы связанных тел методом последовательных импульсов // Тр. НИИСИ РАН. 2014. Т. 4. № 2. С. 52–60.
12. Shabana A. A. Computational Dynamics. Third ed. John Wiley & Sons Inc, 2010.
13. Валле-Пуссен Ш.-Ж. Лекции по теоретической механике ; в 2 т. М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948–1949.
14. Михайлюк М. В., Страшнов Е. В. Моделирование ограничений на относительное движение шарнирно связанных тел // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16. № 10. С. 678–685.

УДК 519.218:519.872

УСКОРЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПОТЕРЬ В ФРАКТАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ОЧЕРЕДЯМИ

В. Н. Задорожный, Т. Р. Захаренкова

*Омский государственный технический университет
zwn2015@yandex.ru, ZakharenkovaTatiana@gmail.com*

Разработан эффективный метод расчета вероятностей потерь в системах с очередями, выполнен анализ точности метода и достигаемого по сравнению с непосредственным моделированием ускорения. Метод используется для анализа систем со степенными распределениями, распространенных в качестве моделей сетевых устройств современных компьютерных сетей. Установлен вид зависимости в этих системах вероятности потерь от размера буфера. Исследуется влияние на эту зависимость, оказываемое тяжестью хвостов степенных распределений и числом каналов в системах. На практике полученные результаты могут использоваться для решения инженерных задач анализа и проектирования современных компьютерных сетей, функционирующих в условиях фрактального трафика.

Ключевые слова: системы с очередями, фрактальный трафик, регенеративное моделирование, ускоренные методы Монте-Карло.

RAPID METHOD FOR CALCULATION OF LOSS PROBABILITIES IN FRACTAL QUEUEING SYSTEMS

V. N. Zadorozhnyi, T. R. Zakharenkova

*Omsk State Technical University
zwn2015@yandex.ru, ZakharenkovaTatiana@gmail.com*

An effective method for loss probabilities calculation in queueing systems is developed. An analysis of accuracy and acceleration achieved in comparison with direct simulation is made. The method is used to analyze the queueing systems with power-series distributions which are widely used as models of network devices of modern computer networks. A dependence of loss probability on a buffer capacity in considered systems is established. The influence on this dependence by the heaviness of tails of power-series distributions and by the channel number is investigated. The obtained results can be used for solving engineering problems of analysis and design of modern computer networks operating under the fractal traffic.

Keywords: queueing systems, fractal traffic, regenerative modeling, rapid Monte Carlo methods.

Для описания и анализа фрактального (самоподобного) трафика применяются такие математические понятия, как самоподобный случайный процесс, *долговременная зависимость* (ДВЗ), *распределения с тяжелыми хвостами* (РТХ) [1–2]. При проектировании сетевых устройств на системном уровне подходящими математическими моделями являются системы с очередями [3–4]. Стоит отметить, что есть разные определения самоподобного трафика, часто связанные с геометрическими свойствами траекторий, описывающих количество прибытий на разных временных масштабах [1]. В этой работе внимание фокусируется на точечных процессах, и понятие самоподобия связывается с масштабной инвариантностью и степенными законами [5]. Исходя из этого, далее фрактальными системами с очередями будем называть такие системы класса $GI/GI/n/m$ [3], в которых интервалы τ_i поступления заявок и/или длительности x_i их обслуживания описываются асимптотически степенными распределениями –

подклассом РТХ. Часто используются такие распределения, которые характеризуются конечным *математическим ожиданием* (м. о.) и бесконечной дисперсией. Популярно, например, распределение Парето, задаваемое *функцией распределения* (ф.р.) $F(t) = 1 - (K/t)^\alpha$ на интервале $t \geq K$ (и $F(t) = 0$ при $t \leq K$). Здесь $K > 0$ – масштабный коэффициент, $\alpha > 0$ – параметр формы. При $1 < \alpha \leq 2$ получаем конечное м. о. и бесконечную дисперсию.

Коэффициент ρ загрузки рассматриваемых систем GI/GI/n/m меньше единицы: $\rho = \bar{x}/(n\bar{t}) < 1$, где $\bar{x}$ – это м.о. *случайной величины* (с. в.) x , т. е. среднее время обслуживания, $\bar{t}$ – среднее время между приходами заявок, n – число каналов в системе.

Типичными представителями фрактальных систем с очередями являются системы Pa/M/n/m, M/Pa/n/m и Pa/Pa/n/m. Здесь символом Pa обозначено распределение Парето (символ M, как обычно, соответствует показательному распределению). Размер m буфера будем считать конечным. Актуальной задачей расчета фрактальной системы является определение вероятности P потери заявки (вероятности отказа). Заявка теряется, если в момент ее поступления буфер заполнен, т. е. для заявки нет места в очереди. Для проектирования узлов современных компьютерных сетей актуальна также задача определения такого m , при котором вероятность P будет не больше заданной.

В общем случае решение поставленных задач аналитическими методами крайне затруднительно, поэтому они решаются, как правило, с помощью *имитационного моделирования* (ИМ).

Однако особенности рассматриваемых здесь фрактальных систем приводят при моделировании к ряду серьезных проблем, без учета и решения которых результаты моделирования будут содержать грубые или принципиальные ошибки. К числу таких проблем относятся:

1. Проблема смещения моментов (математических ожиданий) РТХ, реализуемых обычными методами, принятыми в моделировании, которая исследуется и решается, например, в [6–7]. В [7] она решается путем разработки специального вида *генератора стандартных псевдослучайных чисел* (ГСПЧ).

2. Проблема ДВЗ, которая состоит в том, что ДВЗ приводят к снижению скорости сходимости оценок с ростом числа N реализаций исследуемой с. в. (например, длины очереди). Доверительный интервал оценки средней длины очереди становится пропорционален не $N^{-1/2}$, как это бывает при моделировании обычных систем, а, например, величине $N^{-1/13}$ [8]. В рассматриваемых фрактальных системах ДВЗ возникают, например, между числами прибытий на последовательных интервалах времени равной длины при паретовском входящем потоке, а также между наблюдаемыми значениями длины очереди. Одним из путей решения этой проблемы является использование большого числа так называемых параллельных прогонов.

3. Проблема длительных переходных процессов, которая состоит в том, что их длительность при моделировании фрактальных систем на порядки больше, чем при моделировании обычных систем. Это затрудняет расчет стационарных характеристик фрактальных систем.

Одним из путей одновременного решения проблемы ДВЗ и проблемы длительных переходных процессов является использование регенеративного моделирования [9–11].

Основной идеей регенеративного моделирования является разбиение сбора статистической информации о моделируемом процессе на части, соответствующие *периодам регенерации* (ПР) этого процесса. В системах с очередями ПР начинается в момент прихода заявки в пустую систему и заканчивается в следующий момент прихода заявки в пустую систему. ПР начинается *периодом непрерывной занятости* (ПНЗ) системы, после которого следует период простоя, т. е. период, в течение которого пустая система ожидает поступления очередной заявки. Когда такая заявка поступает, текущий ПР заканчивается и начинается следующий ПР.

Процессы, происходящие в пределах какого-либо ПР, не зависят от процессов, происходящих в пределах любого другого ПР. Поэтому, например, разбиение суммарного числа отказов N_i , накапливаемого для расчета вероятности отказа P , на слагаемые, соответствующие

отдельным ПР, делает N_i суммой независимых одинаково распределенных величин. Тем самым решается проблема ДВЗ (исчезает любая зависимость) и процесс с самого начала становится стационарным (исчезает переходный процесс).

Вместе с регенеративным моделированием в разрабатываемом далее ускоренном методе используется расчет не самих независимых слагаемых величины N_i , а их оценок, которые позволяют за один прогон модели рассчитывать вероятность отказа сразу для выбранного диапазона размеров m буфера. Это позволяет эффективно решать задачу определения размера m по заданной вероятности потерь P . Кроме того, это используется далее для исследования зависимости $P(m)$ в различных видах фрактальных систем.

1. Ускоренный метод расчета вероятности отказа

Предлагаемый метод основан на асимптотическом соотношении, найденном и обоснованном в [12] профессором О. И. Кутузовым. При малых P число отказов N_i , которые произойдут за время данного i -го ПНЗ системы с *бесконечным буфером* (ББ), если его заменить *конечным буфером* (КБ) объема m , можно определять, не моделируя систему с КБ, по формуле

$$N_i \sim \max \{Q_{\max} - m, 0\}, \quad (1)$$

где $Q_{\max}$ – максимальная длина очереди, достигаемая на этом ПНЗ при бесконечном буфере. Формула является приближенной, но ее относительная погрешность сходится к нулю с уменьшением вероятности P . Уже при значениях P порядка 0,01 относительная погрешность формулы (1) лежит в пределах 1–3 %. Теперь заметим, что эта формула позволяет по одному прогону модели с ББ рассчитать общее число отказов сразу для многих значений m и получить соответствующие оценки для $P = P(m)$. Для этого достаточно, используя найденную при моделировании последовательность $Q_{\max}$, подставить в (1) соответствующие значения m . Использование этой идеи позволяет на один-три порядка сократить затраты машинного времени на анализ зависимости $P(m)$.

Основанный на этой идее ускоренный метод расчета вероятностей отказа реализован в виде программы Metod_AIM. Программа Metod_AIM в результате одного прогона модели с ББ формирует массив значений $Q_{\max}$, полученных во всех пройденных ПНЗ, и массив значений P , рассчитанных по формуле (1) для всего заданного диапазона значений m .

В программе используется ГСПЧ, разработанный в [7] и обеспечивающий несмещенность моментов реализуемых РТХ. Для обеспечения достаточно большой длины периода этот ГСПЧ использует генератор «Вихрь Мерсенна» (период повторения последовательности псевдослучайных чисел получается равным приблизительно 10^{6000}).

Результаты выполнения программы Metod_AIM (массивы) можно импортировать в Excel, чтобы выполнять дополнительные расчеты, строить различного вида диаграммы, находить уравнения регрессии («линии тренда») и т. д.

2. Проверка точности ускоренного метода

Широко известной (традиционной) оценкой для P , получаемой путем моделирования системы с ББ, является вероятность q_m того, что длина очереди (в системе с ББ) превысит m . При проверке точности разработанного ускоренного метода выполнялось также сравнение точности оценки (1) с точностью традиционной оценки.

С целью проверки точности целесообразно сравнить решение, получаемое с помощью программы Metod_AIM, с точно известным решением. Поэтому для проверки точности решалась задача расчета вероятности потерь в системе М/М/н/м – единственной системе в классе

GI/GI/n/m, для которой известно точное решение. На рис. 1 показаны результаты расчета зависимости $P(m)$ в системе M/M/1/m с коэффициентом загрузки $\rho = 0,8$.

Точное решение определено расчетом P по известной для систем M/M/1/m формуле

$$P = \rho^{m+1} \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}. \quad (2)$$

Точное решение изображено на рис. 1 кривой 1. Кривая 2 – это решение, полученное программой Metod_AIM. Решение, полученное применением традиционной оценки (кривая 3), рассчитано без моделирования системы с ББ. Вероятность q_m того, что длина l очереди будет больше, чем m , найдена как сумма известных вероятностей состояний системы M/M/1/m:

$$q_m = P(l > m) = \sum_{k=m+1}^{\infty} p_k = \sum_{k=m+1}^{\infty} (1-\rho)\rho^k = \rho^{m+1}, \quad (3)$$

где p_k – вероятность того, что в системе находится k заявок.

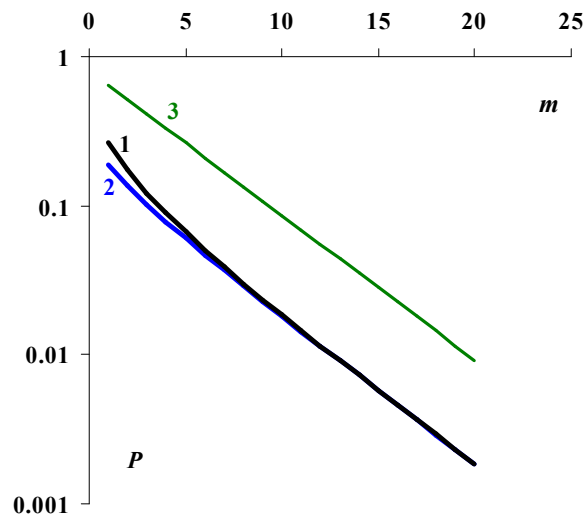


Рис. 1. Результаты проверки точности ускоренного метода:

кривая 1 – точная зависимость $P(m)$ в системе M/M/1/m с коэффициентом загрузки 0,8;

кривая 2 – зависимость, полученная выполнением программы Metod_AIM;

кривая 3 – зависимость, полученная применением традиционной оценки

Аналогично выглядят результаты расчета зависимости $P(m)$ в системах M/M/2/m и M/M/3/m с коэффициентом загрузки 0,8. Результаты расчета системы M/M/3/m представлены на рис. 2.

Для расчета вероятности P в системах M/M/n/m при $n > 1$ использовалась известная формула:

$$P = \rho^{m+n} \frac{n^n}{n!} \pi_0, \quad (4)$$

$$\text{где } \pi_0 = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^j}{j!} + \frac{(n\rho)^n}{n!} \cdot \frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho} \right]^{-1}.$$

Вероятности p_k состояний в соответствующих системах с ББ, в которых используется традиционная оценка (т. е. в системах М/М/н/∞) определялись по формулам [3]:

$$p_k = \begin{cases} p_0 \frac{(n\rho)^k}{k!}, & k \leq n, \\ p_0 \frac{\rho^k n^n}{n!}, & k \geq n, \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{где } p_0 = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^j}{j!} + \frac{(n\rho)^n}{n!} \cdot \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1}.$$

Соответственно, для расчета традиционной оценки q_m при $m \geq n$ получаем формулу:

$$q_m = P(l > m) = \sum_{k=m+1}^{\infty} p_k = \sum_{k=m+1}^{\infty} p_0 \frac{n^n}{n!} \rho^k = p_0 \frac{n^n}{n!} \frac{\rho^{m+1}}{1-\rho}. \quad (6)$$

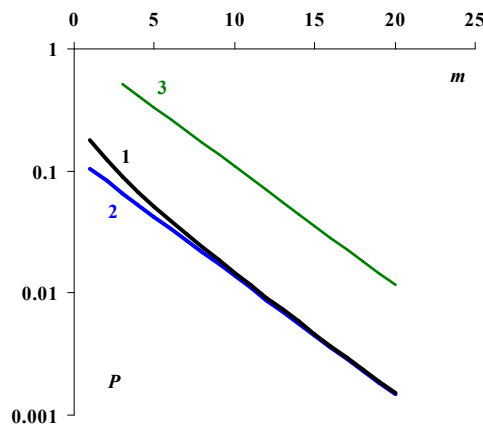


Рис. 2. Результаты расчета разными методами системы М/М/3/м с $\rho = 0,8$ (обознач. см. на рис. 1)

Выполненная проверка позволяет сделать вывод, что, во-первых, точность разработанного ускоренного метода является достаточной, во-вторых, применение оценки (1) вместо традиционной оценки является обоснованным. Эта проверка позволяет также составить представление о том, как быстро с убыванием P относительная погрешность расчета P этим методом сходится к нулю.

Далее естественно воспользоваться разработанным методом для исследования фрактальных систем, для расчета P в которых аналитические выражения отсутствуют, а расчет зависимостей $P(m)$ непосредственным моделированием слишком трудоемок.

3. Расчет фрактальных систем М/Рa/н/м

Рассмотрим результаты расчета одноканальной системы М/Рa/1/м, параметры которой определены следующим образом: $\bar{\tau} = 10$, $K = 1$, $\alpha = 1.25$. В этой системе среднее значение распределенного по закону Парето времени обслуживания конечно: $\bar{x} = K\alpha / (\alpha - 1) = 5$, дисперсия времени обслуживания бесконечна и коэффициент загрузки системы $\rho = \bar{x} / \bar{\tau} = 0.5$. Для размера m буфера выбран диапазон от 1 до 100. Пятикратный прогон программы Metod_AIM по

500 000 ПНЗ дает 5 траекторий – оценок зависимости $P(m)$ (рис. 3), м. о. которых является интересующей нас точной зависимостью. При этом, говоря «точная зависимость», мы учитываем, что ее точность ограничена той небольшой погрешностью оценки (1), которой при малых P мы пренебрегаем.

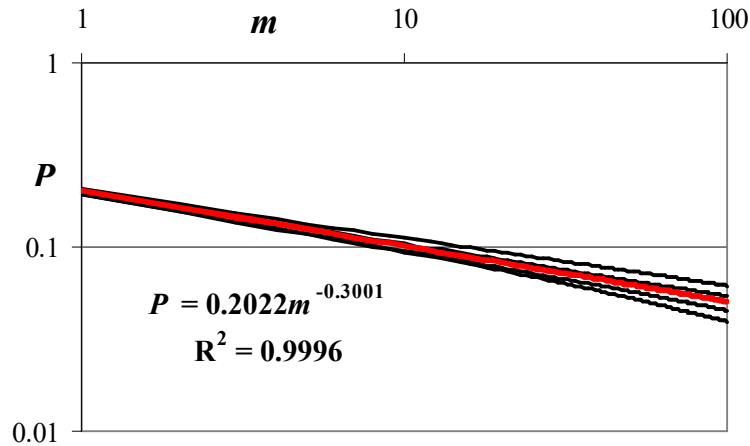


Рис. 3. Пять траекторий, полученных при пятикратном прогоне программы Metod_AIM, усредненная оценка для $P(m)$ (по центру) и уравнение регрессии с коэффициентом его достоверности R^2

Показанное на рис. 3 уравнение регрессии можно использовать для решения задачи определения m , обеспечивающего требуемую вероятность потерь P . Имея уравнение $P = 0,2022m^{-0.3001}$, мы получаем, решая его относительно m , выражение:

$$m = \left(\frac{P}{0,2002} \right)^{-\frac{1}{0,3001}} = 4,995P^{-3.332}, \quad (7)$$

которое можно использовать для оценки размера m буфера, обеспечивающего заданную вероятность потерь P , не прибегая к моделированию. Например, задавая $P = 10^{-6}$, мы получаем из (7), что для обеспечения такой P требуется буфер размера $m \approx 5 \cdot 10^{17}$. Разумеется, буфер подобного размера технически нереализуем, а если бы и был реализуем, то задержки заявок в таком буфере были бы безумно велики. Заметим, что при пуассоновском входящем потоке с той же интенсивностью, как следует из (2), достаточен буфер размера $m = 18$.

Этот пример показывает, что в общем случае при фрактальном трафике стратегия обеспечения малой вероятности потерь путем увеличения размера буфера может быть бесперспективной. Фрактальную систему, в которой обратная зависимость $m(P)$, подобно зависимости (7), делает стратегию увеличения буфера технически бесперспективной, далее будем называть жесткой системой. Чем медленнее убывает вероятность P с ростом m , тем система жестче. Высокая жесткость рассмотренной системы $M/Pa/1/m$ обусловлена близостью ее параметра α к нижней границе диапазона $1 < \alpha \leq 2$. Параметр α определяется трафиком, поэтому его называют также параметром трафика.

В отношении предлагаемого ускоренного метода заметим, что возможность построения надежных уравнений регрессии, основанных на большом числе точек траекторий, и их использования для оценки зависимостей $P(m)$ при малых порядка $P = 10^{-6}$ вероятностях решает в рамках рассматриваемой задачи классическую для моделирования проблему оценки малых вероятностей.

Перейдем теперь к системам $M/Pa/n/m$ при $n > 1$.

На рис. 4 показаны шесть траекторий $P(m)$, полученных для системы М/Ра/3/ m , и уравнение регрессии. По-прежнему хорошей аппроксимацией зависимости $P(m)$ является степенное уравнение. Увеличение числа каналов в системе привело к увеличению абсолютной величины показателя степени, уравнение регрессии приняло вид $P = 0,0309m^{-0.5651}$, и решением задачи о буфере стал его размер $m(P) = m(10^{-6}) \approx 8,8 \cdot 10^7$. Размер буфера уменьшился на десять порядков.

Рассчитанная на рис. 4 система М/Ра/3/ m сопоставима с исследованной выше одноканальной системой М/Ра/1/ m . Здесь $\bar{\tau} = 10$, $K = 3$, $\alpha = 1,25$, т. е. параметр формы распределения Парето не изменился. Произошло лишь масштабное преобразование времени обслуживания, и среднее значение этого времени стало равным $\bar{x} = K\alpha/(\alpha - 1) = 15$. Благодаря этому коэффициент загрузки $\rho = (\bar{x} / \bar{\tau}) / n$ остался равным 0,5.

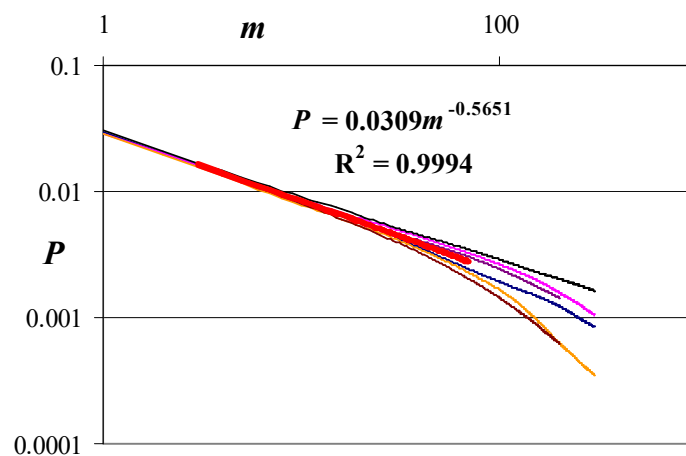


Рис. 4. Траектории $P(m)$ и уравнение регрессии для системы М/Ра/3/ m

Таким образом, выполненный с помощью разработанного ускоренного метода приближенный анализ моделей М/Ра/ n/m приводит к следующему заключению: в условиях жесткого фрактального трафика, когда его параметр α близок к единице (на практике он ограничивается снизу значением $\alpha = 1,2$), стратегия обеспечения малой вероятности потерь за счет увеличения только объема буфера одноканальной системы становится бесперспективной. Более реалистичной она становится в сочетании со стратегией увеличения числа каналов в системе.

4. Влияние параметра формы α

Для оценки влияния параметра α на ресурсы, необходимые для обеспечения низкой вероятности потерь, его значение 1,25 можно заменить менее жестким значением 1,75. При этом для сохранения коэффициента загрузки $\rho = 0,5$ в системе М/Ра/1/ m значение масштабного коэффициента $K = 1$ следует заменить значением $K = 15/7$ и, соответственно, в системе М/Ра/3/ m значение $K = 3$ – значением $K = 45/7$. В результате прогона программы Metod_AIM для этих систем получаются следующие результаты, существенно отличающиеся от предыдущих.

Теперь чтобы обеспечить в системе М/Ра/1/ m вероятность потерь, равную 10^{-6} , требуется буфер размера $m \approx 700\,000$. Это в определенных условиях может быть вполне приемлемым для сетевых устройств решением.

В системе М/Ра/3/ m для решения той же задачи теперь требуется буфер размера $m \approx 400$.

Сравнивая полученные решения с предыдущими, нетрудно заметить, что у многока-

нальной системы характеристика $t(P)$ значительно менее чувствительна к изменениям параметра α , чем у одноканальной системы.

5. Другие фрактальные системы

Чтобы лучше понимать степень общности тех или иных результатов, имеет смысл проверять их на различных фрактальных системах, которые могут рассматриваться как различные модели проектируемых сетевых устройств.

С помощью разработанного ускоренного метода можно увидеть, например, что в системах $Pa/Pa/n/m$ с ростом n подходящая степенная аппроксимация зависимости $P(m)$ быстро переходит в более подходящую экспоненциальную (в отличие от систем $M/Pa/n/m$). В качестве иллюстрации на рис. 5 показан усредненный результат пятикратного прогона программы Metod_AIM для системы $Pa/Pa/5/m$, заданной следующими параметрами:

$K_1 = 10/3$, $\alpha_1 = 1.5$ (параметры с.в. τ);

$K_2 = 75/7$, $\alpha_2 = 1.75$ (параметры с.в. x).

В этой системе $\bar{\tau} = 10$, $\bar{x} = 25$, $\rho = 0,5$.

На рис. 5 логарифмический масштаб используется только по оси ординат. Прямолинейный вид графика (асимптотически прямолинейный) в такой системе координат свидетельствует об экспоненциальном (асимптотически экспоненциальном) виде изображаемой графиком зависимости.

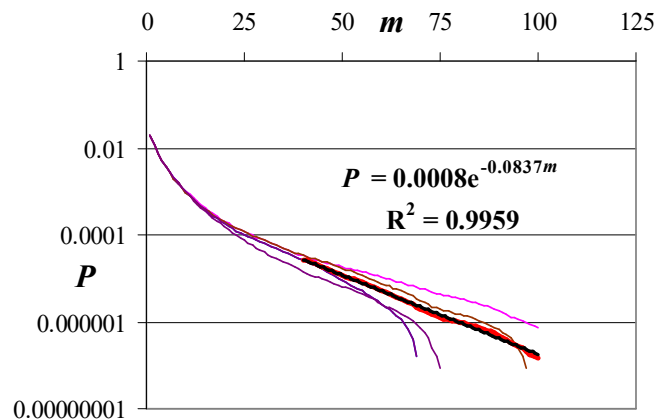


Рис. 5. Асимптотически-экспоненциальная зависимость $P(m)$ в системе $Pa/Pa/5/m$

А в системах $Pa/M/n/m$ характеристика $P(m)$ похожа на экспоненциальную функцию при любом $n \geq 1$. На рис. 6 представлены результаты пяти прогонов программы Metod_AIM для системы $Pa/M/1/m$, сопоставимой с предыдущими системами по загрузке и параметру формы.

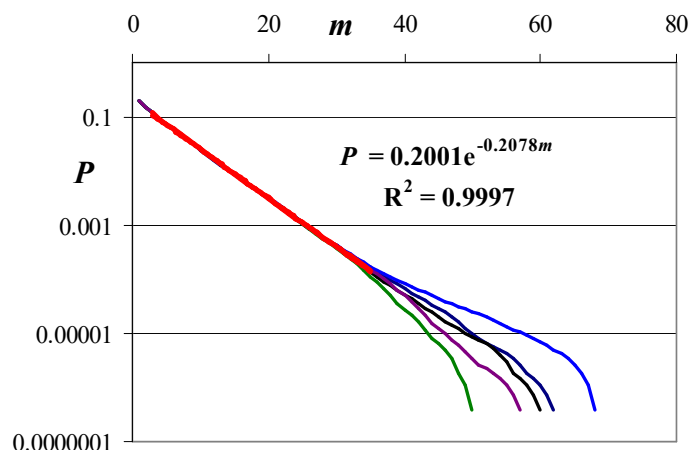


Рис. 6. Экспоненциальная зависимость $P(m)$ в системе Pa/M/1/ m

Параметры системы имеют следующие значения: $K = 2$, $\alpha = 1,25$, $\bar{x} = 5$. В этой системе $\bar{\tau} = 10$, $\rho = 0,5$.

6. Предварительная оценка точности и коэффициента ускорения метода при моделировании фрактальных систем

Оценку точности разработанного метода, выполненную в разд. 2 на примере экспоненциальных систем, нельзя механически распространять на фрактальные системы, в формирование характеристик которых вносят вклад последовательности случайных величин с бесконечными дисперсиями. Для фрактальных систем необходимо выполнить дополнительную проверку точности ускоренного метода. Используем для такой проверки систему M/Pa/1/ m , рассмотренную в разд. 3 – наиболее жесткую из рассчитанных в статье систем. На рис. 7 красная прямая линия (расположенная между двумя другими сплошными линиями) является графиком усредненной траектории $P(m)$ для указанной системы. Этот график визуальнo совпадает с линией тренда, уравнение которой также представлено на рисунке (эти данные имеются и на рис. 3). На получение сотни точек этой траектории ускоренным методом потребовалось 20 мин времени персонального компьютера. Усреднялись 5 траекторий, полученных по 500 000 ПНЗ. Для предварительной оценки точности и коэффициента ускорения разработанного метода выполнено непосредственное моделирование системы при $m \in \{1, 25, 50, 75, 100\}$. Для каждого из этих m выполнено по пять прогонов длиной в 500 000 ПНЗ. Полученные при каждом из перечисленных m значения P отмечены на рис. 7 пятью маркерами разной формы.

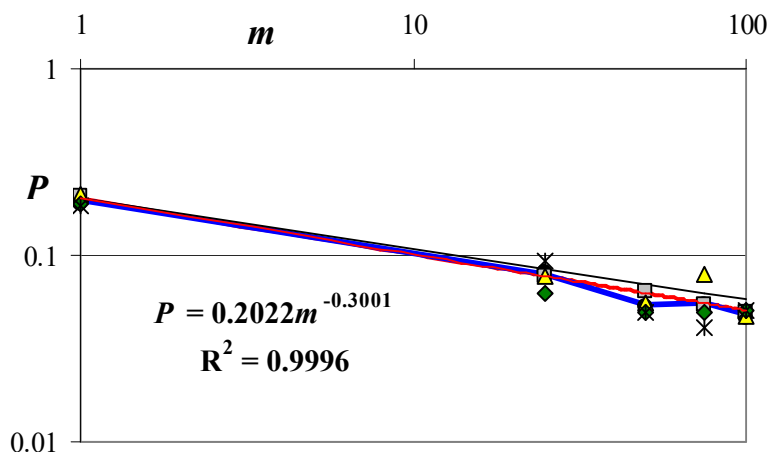


Рис. 7. Сравнение результатов расчета системы M/Pa/1/ m , полученных ускоренным методом и непосредственным ИМ

Расположение маркеров на рисунке подтверждает правильность траектории, найденной ускоренным методом. Синяя «провисающая вниз» линия на графике проведена через усредненные для каждого m результаты непосредственного ИМ.

На каждый результат-маркер затрачено 6 с компьютерного времени, на одну точку усредненной траектории – 30 с. На 100 точек усредненной траектории потребовалось бы 3 000 с, т. е. 50 мин. Это незначительно – в два с половиной раза, превышает время, потраченное ускоренным методом. Однако как видно из рис. 7, при непосредственном ИМ системы будет при этом получена траектория с большими стохастическими возмущениями. При сопоставимых затратах времени ускоренный метод демонстрирует значительно более высокую точность.

Верхняя сплошная тонкая линия на рис. 7 проведена через три точки $P(m)$, рассчитанные при $m = 1$, $m = 75$ и $m = 100$ путем непосредственного ИМ с длиной прогона 50 млн ПНЗ. В каждой точке усреднялись результаты пяти таких длинных прогонов. Эти усредненные результаты уже могут конкурировать по точности с результатами ускоренного метода. Время компьютера, затраченное на одну усредненную точку, составляет 50 мин. На 100 точек требуется 5 000 мин, т. е. в 250 раз больше, чем при использовании ускоренного метода. Таким образом, выполненная предварительная оценка разработанного метода позволяет рассчитывать, что при моделировании фрактальных систем метод позволяет достичь заданной точности результатов на два-три порядка быстрее, чем непосредственное ИМ.

Заключение. Авторами разработан и обоснован ускоренный метод для расчета вероятности P потери заявок в системах с очередями. Метод можно применять для расчета систем GI/GI/n/m различного вида, в том числе – фрактальных систем, которые широко распространены как модели устройств современных компьютерных сетей, функционирующих в условиях фрактального трафика. Существенной частью приведенного в статье определения фрактальной системы является использование в ее описании степенных распределений с конечными математическими ожиданиями и бесконечными дисперсиями.

Возможности предложенного ускоренного метода протестированы на системах M/M/n/m и использованы для демонстрационного исследования некоторых фрактальных систем, в отношении которых выполнен анализ зависимостей $P(m)$ вероятности потери заявки от размера m буфера.

Установлено, что в системах M/Pa/1/m и Pa/Pa/1/m (где Pa – символ распределения Парето) зависимость $P(m)$ близка к степенной. Выявлено, что с увеличением числа n каналов в системах Pa/Pa/n/m степенная зависимость $P(m)$ переходит в близкую к экспоненциальной. Это позволяет за счет увеличения числа каналов в системах Pa/Pa/n/m кардинально снижать вероятность потерь и ее зависимость от таких нестабильных факторов фрактального трафика, как параметр формы α .

Предварительная оценка точности и коэффициента ускорения, достигаемых разработанным методом при расчете фрактальных систем, показала, что он позволяет достичь заданной точности результатов на два-три порядка быстрее, чем непосредственное имитационное моделирование.

В общем случае получаемые с помощью разработанного метода численные результаты с их содержательным анализом могут быть использованы в практике проектирования сетевых устройств и в других приложениях, критичных к потерям обслуживаемых заявок. Эти результаты дают также исходный материал для исследования характеристики $P(m)$ строгими математическими методами. Разработанный метод может быть использован и для проверки соответствующих аналитических результатов.

Литература

1. Leland W. E., Taqqu M. S., Willinger W., Wilson D.V. On the Self-Similar Nature of Ethernet Traffic // IEEE/ACM transactions on networking. 1994. V. 2. № 1. February. P. 1–15.
2. Crovella M. E., Taqqu M., Bestavros A. Heavy Tailed-Probability distributions in the World Wide Web // A Practical Guide to Heavy Tails: Statistical techniques and Applications, 1998. P. 3–25.
3. Kleinrock L. Queueing Systems. Computer Applications. New York : Wiley Interscience, 1976. V. II. 576 p.
4. Zwart A. P. Queueing Systems with Heavy Tails. Eindhoven University of Technology, 2001. 227 p.
5. Mandelbrot B. The fractal geometry of nature. New York : W. H. Freeman and Co., 1982. 480 p.
6. Zadorozhnyi V. N. Cascade Method of Realization of Heavy-Tailed Distributions // Data Network Modelling, International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON) : conference proceeding, 21–23 May 2015, Omsk State Technical University. Omsk, ; IEEE Inc., 2015. P. 1–4.
7. Zadorozhnyi V. N. Peculiarities and Methods of Fractal Queues Simulation // International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON) : conference proceeding, 12–14 May 2016, Moscow, Russia, 2016. IEEE Inc., 2016. P. 1–5.
8. Zadorozhnyi V. N., Zakharenkova T. R. Methods of Simulation Queueing Systems with Heavy Tails // Communications in Computer and Information Science. 2016. V. 638. P. 382–396.
9. Glynn P. W., Iglehart D. L. Conditions for the applicability of the regenerative method // Management Science. 1993. V. 39. P. 1108–1111.
10. Bratley P., Fox B. L. A guide to simulation. New York : Springer-Verlag, 1987.
11. Morozov E. Weak regeneration in modeling of queueing processes // Queueing Systems. 2004. № 46. P. 295–315.
12. Кутузов О. И., Задорожный В. Н., Олзоева С. И. Имитационное моделирование сетей массового обслуживания. Улан-Удэ : Изд-во ВСГТУ, 2001. 228 с.

УДК 621.396.96

РАДИОЛОКАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ КОНТРОЛЯ НАВИГАЦИОННОЙ СУДОХОДНОЙ ОБСТАНОВКИ

Е. Л. Шошин

Сургутский государственный университет, shoshin6@mail.ru

В работе рассматриваются характеристики рассеяния и светового излучения радиооптических отражателей. Приведены результаты натурных испытаний радиооптических отражателей направленного и кругового действия. Описаны перспективные конструкции искусственных радиолокационных отражателей, обладающие поляризационно-анизотропными характеристиками и пригодные для развертывания в качестве навигационных знаков судоходной обстановки. Рассматривается техническая реализация поляриметра, способного осуществить селекцию радиолокационных объектов с использованием группы поляризационных параметров. Приведены примеры построения радиолокационного изображения реки и береговых навигационных знаков с использованием поляризационной обработки сигналов.

Ключевые слова: радиолокационный отражатель, поляризационные характеристики, матрица обратного рассеяния, поляриметр, навигационный знак.

RADAR METHODS FOR MONITORING NAVIGATIONAL ENVIRONMENT

E. L. Shoshin

Surgut State University, shoshin6@mail.ru

The characteristics of the scattering and light radiation of radio-optical reflectors are considered. The results of full-scale tests of radio-optical direct and spherical reflectors are presented. The advanced constructions of artificial radar reflectors with polarization-anisotropic characteristics, and that are suitable for deployment as navigating marks of the shipping environment are described. The technical implementation of a polarimeter capable of selecting radar objects using a group of polarization properties is considered. Examples of construction of radar images of a river and coastal navigating marks using polarization signal processing are given.

Keywords: radar reflector, polarization characteristics, inverse scattering matrix, polarimeter, navigating mark.

Безопасность речного судоходства зависит от факторов, связанных с используемым на борту судна навигационным оборудованием, квалификацией экипажа, сложившейся ограждающей и указательной судоходной обстановкой – плавучей (бакены, буи, вехи) и береговой (створные, перевальные, ходовые, весенние знаки). Как плавучая, так и береговая обстановка выставляется в зависимости от необходимости и сложности судового хода на том или ином участке реки, канала, водохранилища. Чтобы улучшить оптическую видимость речных буев и береговых навигационных знаков, их оснащают светоизлучающими приборами. Вместе с тем, наличие судового радиолокатора позволяет обнаруживать навигационные знаки в радиолокационном диапазоне длин волн. Современные судовые радиолокаторы такие, как «Река» производства НПФ «Микран», обладают высоким разрешением по азимуту (не хуже 1°), по дальности (не хуже 3 м), что позволяет обнаруживать малоразмерные объекты и осуществлять непрерывный мониторинг навигационной обстановки в различных метеорологических условиях (дождь, туман, снег). Использование искусственных радиолокационных отражателей в составе навигационных знаков актуально при осуществлении судоходства в условиях недостаточной видимости, а также при резком изменении береговой линии и русла реки, когда опасность для судна выйти из фарватера существенно возрастает.

В настоящее время в качестве искусственных радиолокационных отражателей используют биконические отражатели, трехгранные уголкового отражатели, линзы Лüneберга [1]. Биконические отражатели обладают круговой *индикатрисой обратного рассеяния* (ИОР) в азимутальной плоскости, что выгодно отличает их от других отражателей, вместе с тем их *эффективная поверхность рассеяния* (ЭПР) сильно зависит от направления прихода падающих электромагнитных волн в угломестной плоскости, что приводит к снижению вероятности обнаружения отражателя в условиях качки. Трехгранные уголкового отражатели демонстрируют направленный характер ИОР и имеют значительную ЭПР, что позволяет их использовать в составе береговых знаков, задающих транспортный коридор движения судов. В то же время невозможность визуального обнаружения экипажем судна уголкового отражателей в темное время суток ограничивает их практическое применение. Также применяют конструкции, составленные из трехгранных уголкового отражателей. Широкое распространение получил групповой радиолокационный отражатель в форме октаэдра, образованный из восьми трехгранных отражателей [1]. Такой групповой отражатель эффективно отражает радиолокационные сигналы, приходящие с произвольного азимутального направления. Волнение и сильный ветер оказывают слабое влияние на механизм обратного рассеяния падающих на групповой отражатель электромагнитных волн. Благодаря своим характеристикам, групповые уголкового отражатели применяют в составе плавучих бакенов, буюв и вех. Линзы Лüneберга имеют значительную ЭПР и круговую ИОР, но сложны в изготовлении и дорогостоящи, при рассеянии демонстрируют большое затухание в линзе и высокий уровень боковых лепестков ИОР. Все используемые в речной навигации радиолокационные отражатели обладают поляризационными характеристиками, позволяющими эффективно рассеивать излученные *судовой радиолокационной станцией* (РЛС) сигналы с линейной вертикальной поляризацией. В случае размещения искусственных отражателей в составе береговых знаков, характеристики их радиолокационного обнаружения будут зависеть не только от параметров отражателя, но и от расположенных вблизи местных объектов – зданий, деревьев, кустарников и др. Таким образом, к недостаткам применяемых в настоящее время в речном судовождении радиолокационных методов контроля навигационной обстановки относятся:

- ограничения по визуальному обнаружению радиолокационных отражателей в темное время суток;
- ограничение по использованию поляризационной сигнатуры зондирующих сигналов;
- влияние расположенных вблизи местных предметов на характеристики радиолокационного обнаружения навигационных знаков.

Радиооптические отражатели. При судовождении уголкового отражатели (далее – УО) используют для радиолокационного обозначения плавучих и береговых навигационных знаков. В 3-сантиметровом диапазоне длин волн для контроля за навигационной обстановкой применяются судовые лоаторы с мощностью излучения 5–10 кВт, длительностью зондирующего импульса 100–300 нс и приемо-передающими антеннами, имеющими веерную диаграмму направленности [2]. В темное время суток для обозначения навигационных знаков используются светосильные фонари, такие как ЭСПН-140, ЭСПН-90 и др., улучшающие оптическую видимость судового хода [3, 4]. Навигационные знаки часто покрывают светоотражающей пленкой, что в условиях недостаточной видимости, когда экипаж судна применяет прожекторное освещение, облегчает их визуальное обнаружение.

Комплексирование характеристик радиолокационного отражателя с функциями световых излучающих и светоотражающих приборов улучшает вероятностные характеристики обнаружения навигационных знаков в течение всего периода речной навигации.

Рассмотрим конструкции *радиооптических отражателей* (РОО). На рис. 1 представлен уголкового РОО направленного действия [5].

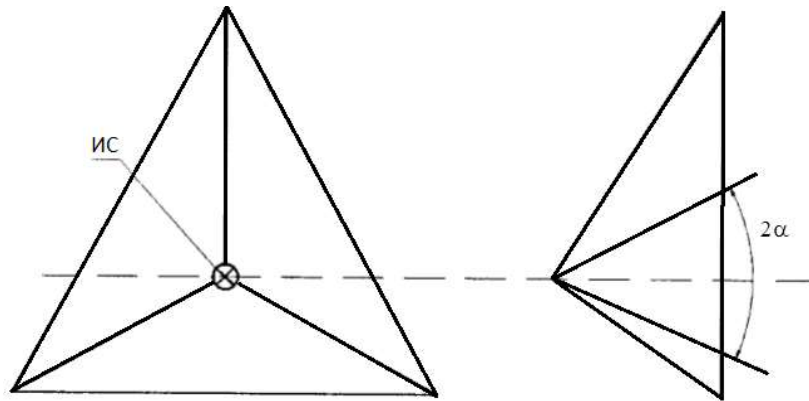


Рис. 1. Радиооптический уголкового отражатель направленного действия

В радиолокационном диапазоне длин волн ширина ИОР трехгранных УО в азимутальной и угломестной плоскостях составляет величину 42° [1]. ЭПР УО с треугольными гранями в направлении главного максимума равна [1, 6]:

$$\sigma_m = \frac{4\pi a^4}{3\lambda^2}, \quad (1)$$

где α – размер ребра;
 λ – длина волны.

Установленный в вершине УО в качестве *источника света* (ИС) светоизлучающий диод при помощи встроенной оптической линзы излучает конический световой пучок с угловой шириной $2\alpha \geq 90^\circ$. После трехкратного отражения от граней световой пучок приобретает ширину углового светорассеяния, равную ширине основного лепестка ИОР в радиолокационном диапазоне длин волн. В конструкции радиооптического УО направленного действия можно дополнительно предусмотреть наличие радиопрозрачного светоотражающего покрытия с белым, красным, зеленым или желтым цветами свечения [7]. В этом случае цвет излучения ИС будет соответствовать характеристикам светоотражающего покрытия граней. Технический результат заключается в обеспечении возможности подачи сигналов в пассивном режиме при освещении отражателя световым потоком судового прожектора и увеличении интенсивности свечения РОО в активном режиме при формировании диаграммы светоизлучения.

Другой перспективной конструкцией является групповой РОО кругового действия [8], приведенный на рис. 2, в состав которого входят восемь равных трехгранных радиолокационных уголкового отражателей, шесть из которых расположены вокруг вертикальной оси, проходящей через их общую вершину в угломестной плоскости. В вершинах установлены источники света в виде светоизлучающих диодов, формирующих круговую диаграмму светоизлучения. ИС питаются от источника постоянного тока и регулируются фотоавтоматом управления сигнальным огнем. Основной режим работы светоизлучающих диодов заключается в формировании проблескового огня.

С целью исследования эффективности применения РОО силами сотрудников производителя путевых работ Томского района водных путей и судоходства и Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники в период речной навигации 2013 г. на участке водного пути реки Томь протяженностью 6 км были проведены натурные испытания РОО направленного и кругового действия.

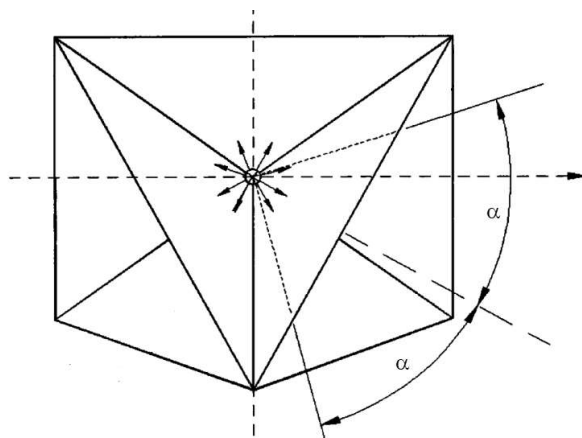
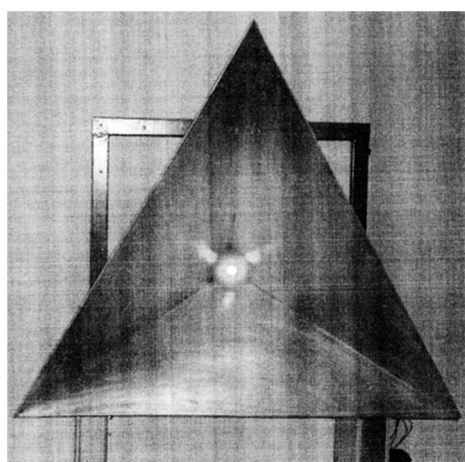


Рис. 2. Радиооптический групповой отражатель кругового действия



а



б

Рис. 3. Фотография радиооптического отражателя направленного действия:

а – в помещении; б – на испытаниях.

Для проведения испытаний был изготовлен образец РОО направленного действия, который представлен на рис. 3а. Характеристики РОО направленного действия в радиолокационном диапазоне длин волн:

- рабочая длина волны, см: 3,2;
- длина ребра отражателя, см: 53;
- эффективная площадь рассеяния, м²: 320;
- ширина индикатрисы обратного рассеяния в горизонтальной плоскости, град: 40;
- ширина индикатрисы обратного рассеяния в вертикальной плоскости, град: 40.

Характеристики РОО направленного действия в оптическом диапазоне длин волн:

- цвет сигнального огня: красный;
- ширина диаграммы светоизлучения в горизонтальной и вертикальной плоскости, град: 40;

- тип светоизлучающего диода: LED 001-W 01-C-0,25LM.

Характеристики светоизлучающего диода:

- длина волны, нм: 660;
- яркость свечения, кд: 4;
- диаметр вторичной линзы, мм: 22;
- угол свечения диода, град: 120;
- угол свечения диода с установленной вторичной линзой, град: 15.

РОО направленного действия испытывался в составе линейных створ, установленных на острове Чернильщикowski (рис. 3б): передний створ в форме деревянного щита высотой 6 м, задний створ в форме деревянного щита высотой 10 м, расстояние между ними 60 м. Оценка дальности оптической видимости линейных створ производилась в светлое время суток при движении теплохода с привязкой его местоположения к навигационной карте судовой обстановки при помощи системы ГЛОНАСС. Состояние прозрачности атмосферы на период испытаний составило 0,7–0,84. Оценка дальности видимости проблескового огня РОО производилась в темное время суток. Оценка радиолокационной дальности до РОО выполнялась судовым локатором Р722-2 со следующими техническими характеристиками: импульсная мощность – 6 кВт, длительность зондирующего импульса 200 нс, несущая частота – 9430 МГц, частота повторения импульса – 4 кГц, ширина диаграммы направленности $1,2^{\circ}$ в горизонтальной плоскости и 25° в вертикальной плоскости, высота расположения антенны над водной поверхностью – 12 м. Результаты испытаний приведены в табл. 1.

Таблица 1

**Результаты испытаний радиооптических отражателей
направленного действия**

Исследуемый навигационный объект	Источник света	Радиолокационная дальность, м	Дальность оптической видимости, м	Дальность видимости проблескового огня, м
Линейный створ с РОО направленного действия	Светоизлучающий диод LED-011W-01C-0,25LM с углом свечения 120°	2	4–4,5	3,9–4,3
	Светоизлучающий диод LED-011W-01C-0,25LM с углом свечения 15°	2	4–4,5	>4,5
Линейный створ со светосильными фонарями ЭСПН-140 направленного действия	Полупроводниковая лампа ЛПРК02-2,5	–	4–4,5	3,8–4,2

Результаты испытаний показали большее значение дальности видимости проблескового огня (более 4,5 км) линейного створа, оборудованного РОО направленного действия, в сравнении с дальностью видимости проблескового огня (3,9–4,3 км) линейного створа, оборудованного типовым световым прибором ЭСПН-140 направленного действия. Дальность оптической видимости линейных створ в светлое время суток составила 4–4,5 км: полученный результат связан с размерами щитов линейного створа и состоянием прозрачности атмосферы. Радиолокационная дальность обнаружения линейного створа, оборудованного РОО направленного действия, составила 2 км при любом состоянии атмосферы, в то время как линейный створ, оборудованный ЭСПН-140, на фоне отражений от расположенных вблизи местных объектов судовым локатором не выделялся.

Использованный в испытаниях образец РОО кругового действия представлен на рис. 4а. Характеристики РОО кругового действия в радиолокационном диапазоне длин волн:

- рабочая длина волны, см: 3,2;
- количество трехгранных угловых отражателей в группе: 6;
- длина ребра одного отражателя, см: 30;
- эффективная площадь рассеяния одного отражателя, м^2 : 33;
- ширина индикатрисы обратного рассеяния в горизонтальной плоскости, град: 360;
- ширина индикатрисы обратного рассеяния в вертикальной плоскости, град: 40.

Характеристики РОО кругового действия в оптическом диапазоне длин волн:

- цвет сигнального огня: красный;
- ширина диаграммы светозлучения в горизонтальной плоскости, град: 360;

- ширина диаграммы светозлучения в вертикальной плоскости, град: 40;
- количество светозлучающих диодов: 6;
- тип светозлучающего диода: LED 001-W 01-C-0,25M.

Характеристики светозлучающего диода:

- длина волны, нм: 660;
- яркость свечения, кд: 2;
- диаметр вторичной линзы, мм: 22;
- угол свечения диода с установленной вторичной линзой, град: 15.



а



б

Рис. 4. Фотография радиооптического группового отражателя кругового действия:

а – в помещении; б – на испытаниях

РОО кругового действия испытывался в составе плавучего буйа № 34 (рис. 4б), расположенного на участке судового хода реки Томь между перекатами Нижний Иглаковский и Верхний Поросский, при этом высота размещения РОО относительно водной поверхности составила 1,9 м. При испытаниях теплоход двигался со скоростью 10–12 км/ч, фиксировалась температура, скорость ветра, влажность и прозрачность воздуха. Оценка дальности оптической видимости плавучего буйа производилась в светлое время суток с привязкой местоположения движущегося теплохода к навигационной карте судоходной обстановки. Дальность видимости проблескового огня РОО фиксировалась в темное время суток. Оценка радиолокационной дальности до РОО выполнялась судовым локатором Р722-2. Результаты испытаний приведены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты испытаний радиооптического группового отражателя
кругового действия

Исследуемый навигационный объект	Время суток	Радиолокационная дальность, м	Дальность оптической видимости, м	Дальность видимости проблескового огня, м
Плавучий буй с РОО кругового действия	светлое	750–800	2,2–2,4	–
	темное	750–800	–	1,9–2,1
Плавучий буй с РОО кругового действия и светотражающими гранями	светлое	750–800	2,2–2,4	–
	темное	750–800	–	2,6–3,0
Плавучий буй со светосильным фонарем ЭСПН-90 кругового действия	светлое	480–500	2,2–2,4	–
	темное	480–500	–	2,0–2,2

Результаты испытаний показали большее значение дальности видимости проблескового огня (2,6–3,0 км) плавучего буйа, оборудованного РОО кругового действия со светоотражающими гранями, в сравнении с дальностью видимости проблескового огня (2,0–2,2 км) плавучего буйа, оборудованного типовым световым прибором ЭСПН-90 кругового действия. Радиолокационная дальность действия обнаружения буйа, оборудованного РОО кругового действия, составила 750–800 м при любом состоянии атмосферы, в то время как буй, оборудованный ЭСПН-900, судовым локатором обнаруживался на расстоянии 500 м.

Поляризационные характеристики радиолокационных объектов

При оценке поляризационных характеристик цели в радиолокации используют понятие *матрицы обратного рассеяния* (МОР):

$$\dot{S} = \begin{bmatrix} \dot{S}_{11} & \dot{S}_{12} \\ \dot{S}_{21} & \dot{S}_{22} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Для симметричных МОР конгруэнтное преобразование позволяет получить диагональную форму ее представления и ввести группу четко интерпретируемых параметров: ε – угол эллиптичности собственного базиса МОР, α – угол ориентации собственного базиса относительно измерительной системы координат, $\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2$ – собственные числа МОР [9]:

$$\dot{S} = \tilde{Q} \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} Q, \quad (3)$$

где Q – унитарная матрица преобразования поляризационного базиса:

$$Q = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varepsilon & j \cdot \sin \varepsilon \\ j \cdot \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Разложение МОР невзаимной среды по ортогональной системе матриц Паули приводит к виду [9]:

$$\dot{S} = \tilde{Q} \cdot S_d^c \cdot Q + \dot{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где матрица S_d^c – симметрическая, характеризует взаимные свойства радиолокационного объекта и имеет вид:

$$S_d^c = \begin{bmatrix} \dot{S}_{11} & 0,5 \cdot (\dot{S}_{12} + \dot{S}_{21}) \\ 0,5 \cdot (\dot{S}_{12} + \dot{S}_{21}) & \dot{S}_{22} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

а слагаемое $\dot{\Delta} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ представляет собой антисимметричный оператор с весовым коэффициентом $\dot{\Delta}$, равным:

$$\dot{\Delta} = 0,5 \cdot (\dot{S}_{12} - \dot{S}_{21}). \quad (7)$$

Величина $\dot{\Delta}$ инвариантна к выбору поляризационного базиса МОР и обусловлена только невязимными свойствами среды [10].

Другим инвариантом МОР является полная эффективная поверхность рассеяния (ЭПР), определяемая как:

$$\sigma = |\dot{S}_{11}|^2 + |\dot{S}_{12}|^2 + |\dot{S}_{21}|^2 + |\dot{S}_{22}|^2. \quad (8)$$

Коэффициент невязимности может быть получен из (7) и (8):

$$|\xi|^2 = \frac{2|\dot{\Delta}|^2}{\sigma}. \quad (9)$$

С физической точки зрения величина $|\xi|^2$ несет информацию о соотношении ЭПР невязимной части радиолокационного объекта к ее полной ЭПР, что позволяет провести классификацию радиолокационных отражателей на:

- взаимные отражатели, для которых $|\xi|^2 = 0$;
- абсолютно невязимные отражатели, для которых $|\xi|^2 = 1$;
- частично-невязимные отражатели, для которых величина модуля коэффициента невязимности принадлежит интервалу $0 < |\xi|^2 < 1$.

Селекция радиолокационных навигационных знаков с использованием параметров $\dot{\lambda}_1$, $\dot{\lambda}_2$, ε , α , σ , $\dot{\Delta}$ и $|\xi|^2$ на фоне отражений от местных предметов создает условия для осуществления навигации судна по радиолокационной карте местности.

Искусственные радиолокационные отражатели с поляризационно-анизотропными характеристиками

Известно [6], что трехгранный УО, составленный из взаимно перпендикулярных металлических (или металлизированных) треугольных граней, является поляризационно-изотропным объектом, МОР которого имеет вид:

$$\dot{S} = \sqrt{\sigma} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где σ – полная ЭПР отражателя, определяемая его линейными размерами и длиной волны зондирующего сигнала. Такой УО эффективно отражает электромагнитные волны линейной поляризации. Поляризациями нулевого сигнала для такого УО выступает круговая правого и левого направления вращения [6].

Бакены, буи, местные предметы береговой линии в 3-сантиметровом диапазоне длин волн демонстрируют рассеивающие свойства, близкие к поляризационно-изотропным объектам, что создает дополнительные трудности при радиолокационном обнаружении УО. Придать трехгранному УО рассеивающие свойства поляризационно-анизотропных объектов можно, поместив поляризационный трансформатор в форме решетки в раскрыв отражателя [1]. В зависимости от вертикальной либо горизонтальной ориентации линейных проводников решетки МОР УО приобретает вид:

$$\dot{S} = \sqrt{\sigma} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

или

$$\dot{S} = \sqrt{\sigma} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Физически это означает, что УО, оборудованный поляризационным трансформатором, способен отражать электромагнитные волны, линейно-поляризованные в плоскости, ортогональной структуре проводников решетки. Поляризациями нулевого сигнала для такого УО будут электромагнитные волны, линейно-поляризованные в плоскости, согласованной со структурой проводников решетки. Благодаря таким свойствам УО, оборудованный поляризационной решеткой, можно обнаружить по результатам поляризационной обработки отраженных сигналов. На практике для этого применяют поляризационную модуляцию зондирующих сигналов [11]. В [12] приведены результаты натурных испытаний трехгранных УО, оборудованных поляризационными трансформаторами с шагом между проводниками 3–5 мм, которые свидетельствуют о достижении параметром фактора формы УО $\rho = |\lambda_1|/|\lambda_2|$ значений в интервале 17–19 дБ в 3-сантиметровом диапазоне длин волн.

Другой интересной конструкцией является система из двух трехгранных УО, фазовые центры которых разнесены в азимутальной плоскости на некоторое расстояние D (рис. 5).

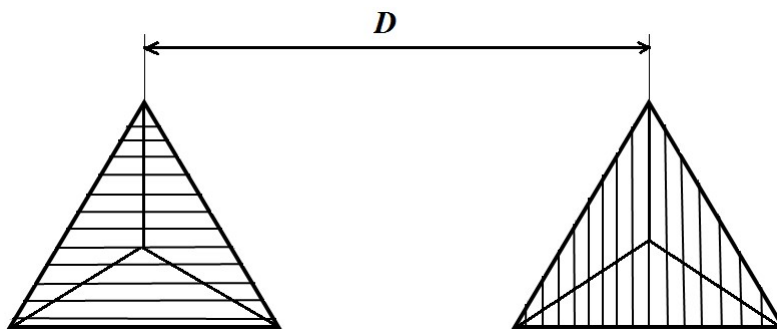


Рис. 5. Система из уголковых поляризационно-анизотропных отражателей

Каждый из УО оборудован поляризационным трансформатором в виде решетки, при этом ориентация одной решетки – горизонтальная, другой – вертикальная. МОР такой системы из двух трехгранных УО имеет вид:

$$\dot{S} = \sqrt{\sigma} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{j\Delta\varphi} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где $\Delta\varphi$ – разность фаз собственных чисел λ_1 и λ_2 .

Благодаря возможности смещать фазовые центры путем произвольного размещения УО относительно друг друга с сохранением рабочего сектора углов обратного рассеяния, такой групповой отражатель демонстрирует способность его обнаружения и селекции на фоне мешающих отражений с использованием параметра $\Delta\varphi$. Приведенные в [12] результаты испытаний свидетельствуют, что два трехгранных УО с размером ребра 53 см, разнесенные

между собой на 1,5 м и оборудованные решетками вертикальной и горизонтальной ориентации с шагом между проводниками 5 мм, демонстрируют в 3-сантиметровом диапазоне длин волн достижение значения фактора формы $\rho = 0,5 \text{ дБ}$ и параметра $\Delta\varphi = 0^\circ \dots 180^\circ$ в угловом секторе обратного рассеяния $\pm 20^\circ$. Использование поляризационных параметров ρ и $\Delta\varphi$ улучшает характеристики обнаружения УО на фоне отражений от местных предметов [12].

Недостатком применения в качестве навигационных знаков УО является их принадлежность к радиолокационным объектам взаимного типа, что затрудняет их выделение на фоне отражений от водной поверхности, местных предметов, также относящихся к рассеивающим объектам взаимного типа. Использование невзаимных радиолокационных отражателей расширяет возможности по созданию навигационных знаков, обладающих поляризационно-анизотропными характеристиками обратного рассеяния и создающих значительный радиолокационный контраст при формировании навигационной карты судовой обстановки. Практическая реализация невзаимных характеристик обратного рассеяния предполагает использование в составе искусственных отражателей ферритовых СВЧ-приборов – намагниченных ферритовых стержней, Y-циркуляторов, вентилях и гираторов.

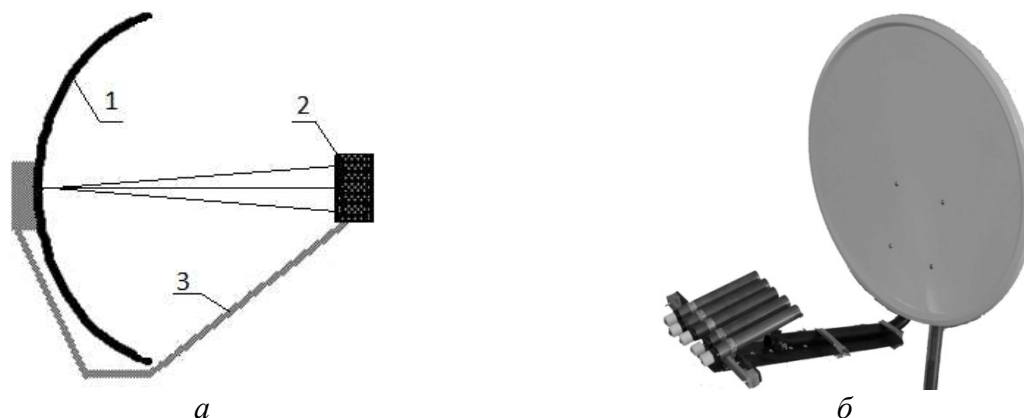


Рис. 6. Переизлучающая параболическая антенна:

а – чертеж; б – лабораторный образец

На рис. 6а приведена конструкция невзаимного радиолокационного отражателя (РО) в виде переизлучающей параболической антенны [13]. Такой отражатель пригоден для задания линейного створа реки. Переизлучающая антенна выполнена в виде параболоида вращения 1, в фокальной плоскости которого симметрично расположены короткозамкнутые облучатели 2, удерживаемые штангой 3. Фазовый центр одного из облучателей находится в фокусе параболоида, а остальные облучатели смещены в фокальной плоскости в направлениях, перпендикулярных оси параболоида. Облучатели представляют собой конические рупорные антенны с отрезками круглых закороченных волноводов с размещенными внутри продольными СВЧ-ферритовыми стержнями, степень намагниченности которых можно менять в широких пределах с помощью тока, протекающего через соленоидальный электромагнит.

Поляризационные характеристики рассматриваемой антенны-отражателя определяются свойствами облучателей. МОР короткозамкнутого облучателя с встроенным продольно-намагниченным ферритовым стержнем имеет вид [9]:

$$\dot{S} = \sqrt{\sigma} \begin{bmatrix} \cos(2\delta) & -\sin(2\delta) \\ \sin(2\delta) & \cos(2\delta) \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где δ – угол поворота плоскости поляризации электромагнитной волны при ее прохождении ферритового стержня.

При регулировке замагниченного состояния ферритовых стержней угол δ изменяется в пределах $\delta = -90^\circ \dots 90^\circ$. Антенна-отражатель при этом приобретает свойства невзаимного отражателя, коэффициент невзаимности $|\xi|^2$ которого задается в пределах 0–1. При $|\xi|^2 = 1$ (соответствует углу поворота $\delta = -45^\circ, 45^\circ$) поляризацией нулевого приема выступает любая возможная, задаваемая пространством состояний сферы Пуанкаре [14]. Физически это означает, что антенна-отражатель формирует рассеянный сигнал с поляризацией, ортогональной поляризации падающего сигнала.

Эффективная апертура зеркальной параболической антенны определяется [15]:

$$S_g = \nu \pi d^2, \quad (15)$$

где ν – коэффициент использования апертуры;

d – диаметр зеркала.

Коэффициент направленного действия (далее – КНД) зеркальной параболической антенны определяется [15]:

$$D_m = \frac{4 \pi S_g}{\lambda^2}. \quad (16)$$

ИОР рассматриваемой антенны-отражателя носит колебательный характер, связанный с формированием рассеянных сигналов для каждого из направлений падающих лучей своим короткозамкнутым облучателем. Угол наклона фокусируемых зеркалом электромагнитных волн в соседние близрасположенные облучатели отвечает условию:

$$\beta \leq 0,8 \Theta_{0,5} \quad (17)$$

где $\Theta_{0,5}$ – ширина ИОР антенны-отражателя с одним облучателем.

ИОР антенны-отражателя, в произвольном сечении фокальной плоскости которой расположены n (симметричных относительно оптической оси) облучателей, при облучении под углом θ определяется [14]:

$$\sigma(\theta) = S_g \cdot D_m \cdot \sum_{i=1}^n \Phi^4(\theta - ((n+1)/2 - i) \cdot \beta), \quad (18)$$

где $\Phi(\theta)$ – диаграмма направленности приемной параболической антенны с размещенным в фокусе облучателем.

Ширина главного лепестка ИОР $\Delta \Theta_{0,5}$ зависит от количества короткозамкнутых облучателей в фокальной плоскости:

$$\Delta \Theta_{0,5} \approx \beta n \quad (19)$$

Лабораторный образец антенны-отражателя с диаметром зеркала 76 см (рис. 6 б) демонстрирует параметры, рассчитанные согласно (15–19) для 3-сантиметрового диапазона длин волн:

- эффективная апертура при использовании с коэффициентом 0,6, m^2 : 1,09;
- КНД, дБ: 41,8;

- ЭПР в направлении главного максимума, м^2 : 16 590;
- ширина главного лепестка ИОР, град: 15.

На рис. 7 приведена нормированная ИОР, рассчитанная для лабораторного образца антенны-отражателя с количеством облучателей в сечении фокальной плоскости $n = 7$ и углом наклона $\beta = 0,75\Theta_{0,5}$.

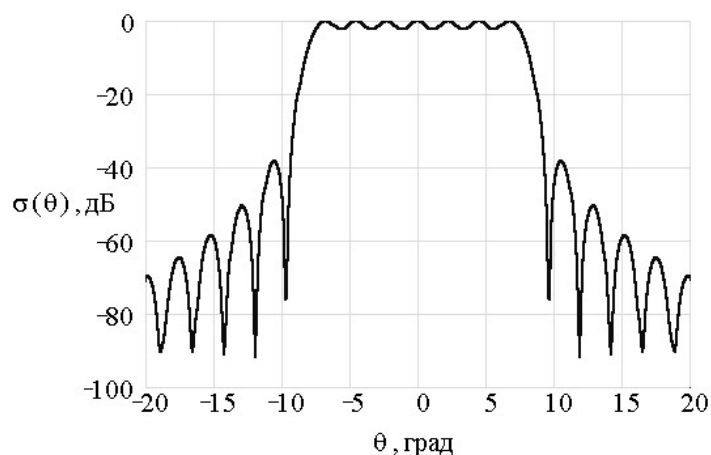


Рис. 7. Нормированная индикатриса обратного рассеяния

При практическом изготовлении конструкции параболической антенны-отражателя необходимо выполнить согласование облучателей с волновым сопротивлением окружающей среды и принять меры симметрирования диаграммы обратного рассеяния в Е и Н-плоскостях [6].

Еще одной перспективной конструкцией невзаимного радиолокационного отражателя является переизлучающая линейная или плоская решетка Ван-Атта (рис. 8), состоящая из попарно соединенных с помощью волноводов конических рупорных антенн [16]. Такой отражатель пригоден для задания линейного створа реки. С целью придания решетке Ван-Атта невзаимных на прием и передачу свойств в волноводном тракте 2, присоединенном к рупорной антенне 1, расположено устройство преобразования поляризационного состояния проходящих электромагнитных волн 3, в состав которого включены взаимный и невзаимный элементы одновременно. Функцию невзаимного элемента выполняет фарадеевский вращатель, осуществляющий поворот плоскости поляризации на угол δ , а функцию взаимного элемента выполняет фазовая пластина, ориентированная под углом α и вносящая фазовую задержку φ пропускаемых электромагнитных волн.

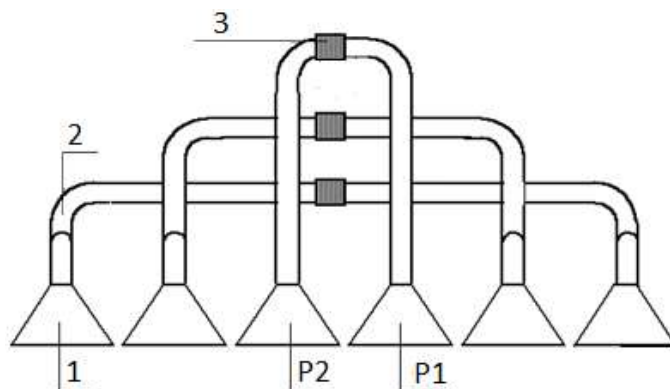


Рис. 8. Переизлучающая решетка Ван-Атта

МОР такой решетки Ван-Атта носит несимметричный вид, а реализуемый при этом коэффициент невязности определяется выражением [17]:

$$|\xi|^2 = \frac{\sin(\delta)(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))^2(1 - \cos \varphi)}{2(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))^2 + (\sin(\delta) - 4\cos^2(\alpha)\sin^2(\alpha))(1 - \cos \varphi)}. \quad (20)$$

Из (20) следует, что невязные свойства переизлучающей решетки определяются параметрами δ , α и φ . На рис. 9 показана зависимость $|\xi|^2$ от α для одной из пар рупорных антенн P1 и P2, связанных соединительным трактом, в состав которого включена четвертьволновая фазовая пластина ($\varphi=90^\circ$) и замагниченный ферритовый стержень, осуществляющий поворот плоскости поляризации пропускаемых электромагнитных волн (1. $\delta=30^\circ$, 2. $\delta=45^\circ$, 3. $\delta=60^\circ$, 4. $\delta=75^\circ$). В случае $\delta=90^\circ$ связанные рупорные антенны P1 и P2 демонстрируют характеристики рассеяния абсолютно невязного радиолокационного объекта: $|\xi|^2=1$.

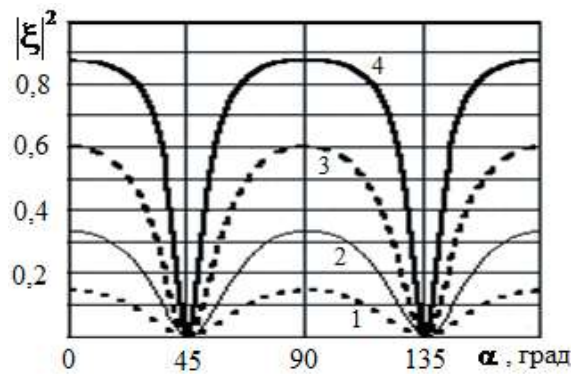


Рис. 9. Зависимость коэффициента невязности связанных рупорных антенн решетки Ван-Атта от угла ориентации четвертьволновой фазовой пластины

Эффективная апертура приемной рупорной антенны P1 определяется согласно (15). КНД излучающей конусной рупорной антенны P2 с оптимальным раскрывом определяется [15]:

$$D_m = 5 \cdot \left(\frac{2a}{\lambda} \right)^2, \quad (21)$$

где a — диаметр рупора.

ЭПР одной из связанных пар рупорных антенн в пределах главного лепестка ИОР равна:

$$\sigma_1 = S_g \cdot D_m. \quad (22)$$

ЭПР решетки Ван-Атта определяется общим количеством пар рупорных антенн N :

$$\sigma_m = N \cdot \sigma_1. \quad (23)$$

Ширина ИОР переизлучающей решетки Ван-Атта по уровню половинной мощности равна:

$$\Theta_{0,5} = 42,5^\circ \cdot \frac{\lambda}{2a}. \quad (24)$$

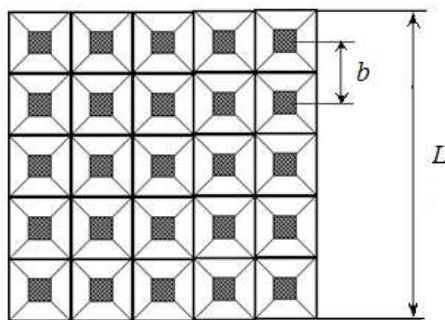
В табл. 3 приведены рассчитанные в соответствии с (21–23) значения ЭПР линейной решетки, состоящей из различного количества пар рупоров N , с диаметром рупора $a = 4,8$ см при работе в 3-сантиметровом диапазоне длин волн. При этом ширина ИОР по уровню половинной мощности в соответствии с (24) составляет $\Theta_{0,5} = 15^\circ$.

Таблица 3

Значения эффективной поверхности рассеяния линейной решетки Ван-Атта

N	3	5	10	30	100
$\sigma_m, \text{м}^2$	6.76	18.8	75.1	676	7510

Невзаимные радиолокационные отражатели, построенные из одной или нескольких переизлучающих рупорных антенн, не обладают ЭПР, достаточной для их эффективного обнаружения на фоне мешающих отражений. Для достижения требуемых энергетических характеристик рассеяния целесообразно использовать линейную или плоскую решетку из антенных элементов. На рис. 10 приведена плоская решетка, составленная из переизлучающих антенных элементов невзаимного рассеяния сигналов.

**Рис. 10. Переизлучающая плоская решетка**

КНД переизлучающей решетки определяется соотношением [17]:

$$D_m = S_g \cdot N \cdot \frac{4\pi}{\lambda^2}, \quad (25)$$

где $N = \left(\frac{L}{b}\right)^2$ – количество элементов решетки;

S_g – эффективная апертура решетки, зависящая от угла облучения θ :

$$S_g = \nu L^2 \cos \theta. \quad (26)$$

ЭПР переизлучающей решетки в направлении главного максимума определяется:

$$\sigma_m = S_g \cdot D_m. \quad (27)$$

Выбор достаточно большого числа переизлучающих антенных элементов позволяет реализовать высокий КНД решетки и, как следствие, достигнуть значительную ЭПР. С тем,

чтобы получить относительно широкий основной лепесток ИОР решетки, необходимо выполнить условие внесения дополнительного фазового сдвига, возникающего при обратном рассеянии от любой пары примыкающих друг к другу элементов решетки [18]:

$$\Psi_{\text{доп}} = \frac{4\pi b}{\lambda}. \quad (28)$$

Данное условие можно реализовать, выбирая различную электрическую длину волноводных трактов, которая для соседней пары элементов решетки составляет $\lambda_g/8$ (λ_g - длина волны в волноводе). При этом, каждый из переизлучающих элементов обладает невзаимными свойствами, которыми, в свою очередь, наделяется решетка.

Рассмотрим выбор конструкций переизлучающих элементов решетки:

1. Переизлучающая пирамидальная рупорная антенна с продольно намагниченным ферритом [14] приведена на рис. 11.

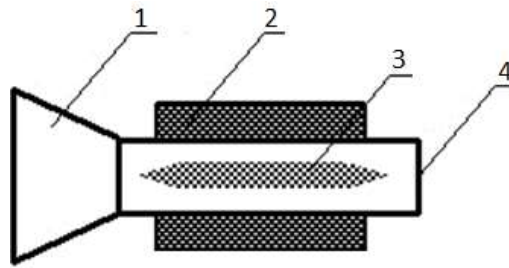


Рис. 11. Переизлучающая пирамидальная рупорная антенна

Переизлучающая антенна выполнена в виде пирамидального рупора 1 с раскрывом в форме квадрата и соединенного с ним отрезка закороченного квадратного волновода 4 с находящимся внутри СВЧ ферритовым продольным стержнем 3, степень намагниченности которого можно менять в широких пределах, изменяя ток через соленоидальную катушку 2. МОР переизлучающей антенны имеет вид (14). Антенна-отражатель выполняет поляризационное преобразование, заключающееся в повороте плоскости поляризации падающей электромагнитной волны на угол 2δ с последующим переизлучением в обратном направлении сигнала с такой же плотностью потока мощности, какую имеет падающая электромагнитная волна. При $\delta = 45^\circ$ антенна-отражатель обладает свойствами абсолютно-невзаимного рассеяния.

Эффективная апертура рупора равна [15]:

$$S_s = \nu b^2, \quad (29)$$

где ν – коэффициент использования апертуры;

b – размер стенки раскрыва рупора.

КНД рупора в направлении основной передачи равен:

$$D_m = \frac{2\pi b^2}{\lambda^2}. \quad (30)$$

ЭПР отражателя в пределах основного лепестка ИОР равна:

$$\sigma_m = S_s \cdot D_m. \quad (31)$$

Ширина основного лепестка ИОР равна:

$$\Delta\Theta_{0,5} = 48^\circ \frac{\lambda}{b} . \quad (32)$$

Численные расчеты показывают, что пирамидальная рупорная антенна с раскрывом в форме квадрата шириной 6 см в 3-сантиметровом диапазоне длин обладает параметрами, рассчитанными согласно (29–32):

- эффективная апертура при использовании с коэффициентом 0.81, м²: 0.00292;
- КНД, у.е.: 25;
- ЭПР в направлении главного максимума, м²: 0.071;
- ширина главного лепестка ИОР, град: 24.

2. Переизлучающая пирамидальная рупорная антенна с ферритовым вентилем [19] приведена на рис. 12.

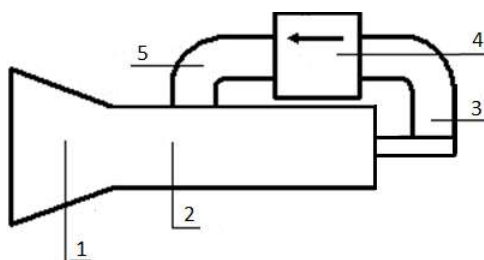


Рис. 12. Переизлучающая пирамидальная рупорная антенна

В конструкцию переизлучающей рупорной антенны входит пирамидальный рупор 1 с раскрывом в форме квадрата, конструктивно объединенный с поляризационным преобразователем, представляющим собой отрезок квадратного волновода 2 с двумя встроенными волноводами 3 и 5, при этом в прямоугольном волноводе 5 выделяется линейная горизонтально поляризованная электромагнитная волна, а в прямоугольном волноводе 3 выделяется линейная вертикально поляризованная электромагнитная волна; волноводы 3 и 5 соединяются друг с другом с помощью прямоугольного волноводного тракта со скруткой на 90°, в состав которого включен ферритовый резонансный вентиль 4.

В случае идеального ферритового вентиля МОР переизлучающей рупорной антенны соответствует виду:

$$\dot{S} = \sqrt{\sigma} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (33)$$

Переизлучающая антенна подвергает поляризационному преобразованию падающую электромагнитную волну, заключающемуся в поглощении горизонтально поляризованной компоненты падающей электромагнитной волны и преобразовании вертикально поляризованной компоненты падающей электромагнитной волны в ортогонально поляризованную с последующим переизлучением сигнала в обратном направлении. Плотность потока мощности обратно рассеянного сигнала оказывается меньше плотности потока мощности падающей электромагнитной волны. Эффективная апертура, КНД, ЭПР и ширина ИОР переизлучающей антенны определяется согласно (29–32).

3. Переизлучающая пирамидальная рупорная антенна с фазовращателем [20], приведена на рис. 13.

В конструкцию переизлучающей рупорной антенны входит пирамидальный рупор 1 с раскрывом в форме квадрата, конструктивно объединенный с поляризационным преобразователем, представляющим собой отрезок квадратного волновода 2 с двумя встроенными волноводами 3 и 5, при этом в прямоугольном волноводе 5 выделяется линейная горизонтально поляризованная электромагнитная волна, а в прямоугольном волноводе 3 выделяется линейная

вертикально поляризованная электромагнитная волна; волноводы 3 и 5 соединяются друг с другом с помощью прямоугольного волноводного тракта со скруткой на 90° , в состав которого включен фазовращатель 4.

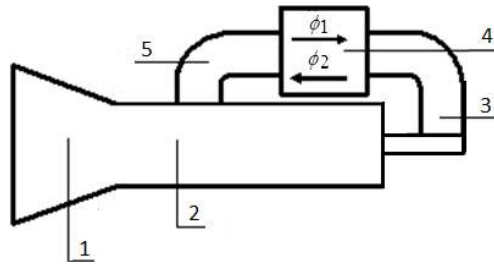


Рис. 13. Переизлучающая пирамидальная рупорная антенна

В случае идеального фазовращателя ($\phi_1 = \pi$, $\phi_2 = 0$) МОР переизлучающей рупорной антенны соответствует виду:

$$\dot{S} = \sqrt{\sigma} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Переизлучающая антенна подвергает поляризационному преобразованию падающую электромагнитную волну, поляризация которой при этом меняется на ортогональную с последующим переизлучением сигнала в обратном направлении. Плотность потока мощности обратно переизлученного сигнала оказывается равной плотности потока мощности падающей электромагнитной волны. Эффективная апертура, КНД, ЭПР и ширина ИОР переизлучающей рупорной антенны определяется согласно (29–32).

Рассмотренные конструкции переизлучающих рупорных антенн могут быть использованы в составе переизлучающей решетки (рис. 10). Численные расчеты показывают, что плоская решетка в форме квадрата шириной 60 см, состоящая из рупорных пирамидальных переизлучающих антенн с раскрывом в форме квадрата шириной 6 см, в 3-сантиметровом диапазоне длин обладает параметрами, рассчитанными согласно (25–27):

- количество антенных элементов: 100;
- КНД, дБ: 50;
- ЭПР в направлении главного максимума, м^2 : 29 720;
- ширина главного лепестка ИОР, град: 15,2.

Относительно широкая ИОР и значительная ЭПР переизлучающей решетки позволяют ее использовать в качестве маркерного навигационного знака.

Формирование радиолокационных изображений реки и судоходных навигационных знаков с использованием поляризационной обработки сигналов

Для измерения поляризационных параметров отраженных сигналов и реализации селекции объектов, обладающих требуемыми характеристиками обратного рассеяния, применяют радиолокационные поляриметры [21]. Радиолокационный контроль за судоходной обстановкой при помощи поляриметра оправдан в случаях использования поляризационно-анизотропных искусственных отражателей в составе навигационных знаков. Поляриметры при формировании и обработке сигналов выполняют операцию их разложения на ортогональные составляющие электромагнитных волн. Для этого в состав поляриметра вводят векторный формирователь излученных сигналов и многоканальный приемник, способный с помощью поляризационного расщепителя выделять ортогонально-поляризованные сигнальные компоненты и измерять их амплитудные и фазовые значения.

Рассмотрим техническую реализацию поляриметра, способного к «мгновенному» измерению значений элементов МОР и селекции радиолокационного объекта по поляризационным признакам. На рис. 14 приведена структурная схема устройства селекции целей с невязанными свойствами обратного рассеяния радиоволн [22].

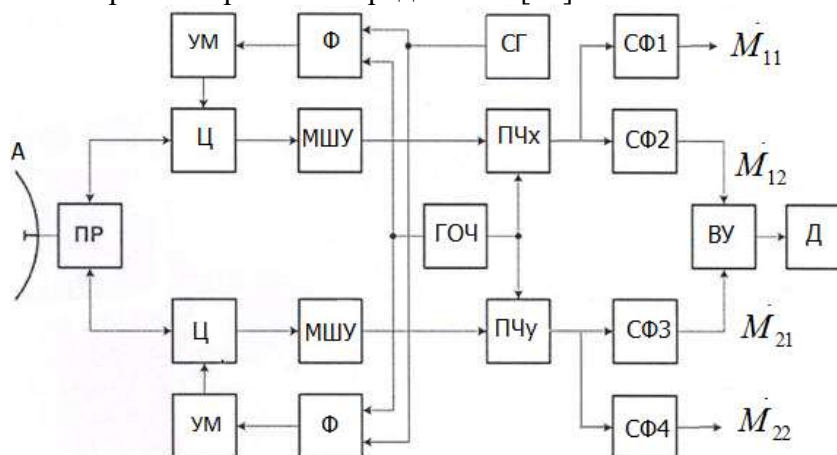


Рис. 14. Устройство селекции радиолокационных объектов по поляризационным признакам:

А – приемно-передающая антенна полного поляризационного приема-передачи сигнала;

ПР – поляризационный разделитель; Ц – циркуляторы; УМ – усилители мощности;

ГОЧ – генератор опорных частот; Ф – формирователи сложных сигналов; МШУ – малошумящие усилители; ПЧх,

ПЧу – преобразователи частоты; СФ1,2,3,4 – согласованные фильтры; ВУ – вычитающее устройство;

Д – детектор огибающей радиосигнала; СГ – синхронизирующий генератор

Устройство работает следующим образом. Формирователи сложных сигналов по запускающему сигналу синхронизирующего генератора формируют на несущей частоте ω_0 два ортогонально поляризованных радиосигнала $\dot{S}_1(t)$ и $\dot{S}_2(t)$, когерентно связанные по времени и частоте (такие, например, как ортогональные линейно частотно-модулированные сигналы). Выходные сигналы формирователей сложных сигналов усиливаются усилителями мощности и возбуждают ортогональные плечи поляризационного разделителя. При этом в пространство излучается электромагнитная волна, описываемая как вектор:

$$e_0(t) = \begin{pmatrix} \dot{S}_1(t) \\ \dot{S}_2(t) \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Прием отраженной волны осуществляется антенной в поляризационном базисе облучения:

$$e_p(t) = \begin{pmatrix} \dot{S}_{p1}(t) \\ \dot{S}_{p2}(t) \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Поляризационным разделителем выделяются два ортогональных сигнала $\dot{S}_{p1}(t)$ и $\dot{S}_{p2}(t)$, которые через циркуляторы поступают последовательно в МШУ и преобразователи частоты ПЧх и ПЧу, на выходе которых формируются радиосигналы промежуточной частоты:

$$\left. \begin{aligned} S_{P1}^{ПЧ}(t) &= \dot{k} \cdot \dot{S}_{P1}(t) \cdot e^{-j(\omega_0 + \omega_{ПЧ}) \cdot t} \\ S_{P2}^{ПЧ}(t) &= \dot{k} \cdot \dot{S}_{P2}(t) \cdot e^{-j(\omega_0 + \omega_{ПЧ}) \cdot t} \end{aligned} \right\}, \quad (37)$$

где $\omega_{\Gamma} = \omega_0 + \omega_{ПЧ}$ – частота сигнала гетеродина, вырабатываемого генератором опорных частот; $\dot{k}$ – коэффициент передачи сигналов $\dot{S}_{P1}(t)$ и $\dot{S}_{P2}(t)$ с выходов поляризационного разделителя антенны на входы согласованных фильтров.

При этом фильтр СФ₂ согласован с сигналом $\dot{S}_1(t)$, а фильтр СФ₃ согласован с сигналом $\dot{S}_2(t)$. На выходе согласованных фильтров СФ₂ и СФ₃ формируются выходные радиосигналы $\dot{U}_2$ и $\dot{U}_3$, определяемые значениями внедиагональных элементов матрицы взаимной когерентности излученного $e_0(t)$ и рассеянного $e_p(t)$ сигналов ($\dot{M}_{12}$ и $\dot{M}_{21}$ соответственно), которые в момент времени $t = \tau_i$ с точностью до модуля и фазы пропорциональны значениям внедиагональных элементов МОР объекта, находящегося в i -ом строке дальности:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_2(\tau_i) &= \dot{M}_{12}^i \sim \dot{S}_{12}^i \\ \dot{U}_3(\tau_i) &= \dot{M}_{21}^i \sim \dot{S}_{21}^i \end{aligned} \right\}. \quad (38)$$

Сигналы $\dot{U}_2$ и $\dot{U}_3$ поступают в вычитающее устройство, последовательно соединенное с детектором, на выходе которого формируется сигнал:

$$\Delta U = |\dot{U}_2 - \dot{U}_3|. \quad (39)$$

Отличие выходного сигнала от нуля представляет собой признак наличия рассеивающего объекта с невязимыми свойствами. В результате устройством селекции формируются сигналы, пропорциональные параметру ΔU , в форме развертки по дальности. При круговом сканировании антенной поляриметра и реализации в каждом из азимутальном направлений развертки отраженных сигналов по дальности формируется радиолокационное изображение с использованием поляризационного параметра $|\dot{\Delta}|$. В случае реализации речных и береговых навигационных знаков в виде невязимых отражателей на радиолокационной карте местности будут присутствовать их отметки.

Заметим, что благодаря измерению элементов МОР радиолокационных объектов, рассмотренное выше устройство позволяет выделять объекты, используя не только параметр $|\dot{\Delta}|$, но и любой другой параметр, входящий в группу $\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2, \varepsilon, \alpha, \sigma, \dot{\Delta}$ и $|\xi|^2$. Для этого достаточно измеренные значения элементов МОР объекта пересчитать в требуемый параметр или группу параметров, используя соотношения (3–9). Техническая реализация устройства, реализующего селекцию объектов с расширенной группой поляризационных параметров, требует дополнительного введения в состав поляриметра согласованных фильтров СФ₁ и СФ₄, при этом, фильтр СФ₁ будет согласован с сигналом $\dot{S}_2(t)$, а фильтр СФ₄ будет согласован с сигналом $\dot{S}_1(t)$. На выходе согласованных фильтров СФ₁ и СФ₄ будут сформированы выходные радиосигналы $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_4$, которые в момент времени $t = \tau_i$ с точностью до модуля и фазы будут

пропорциональны значениям элементов главной диагонали МОР объекта, находящегося в i -ом строке дальности:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1(\tau_i) &= \dot{M}_{11}^i \sim \dot{S}_{11}^i \\ \dot{U}_4(\tau_i) &= \dot{M}_{22}^i \sim \dot{S}_{22}^i \end{aligned} \right\}. \quad (40)$$

Расширенные функциональные возможности работы поляриметра создают основу для проведения контроля за навигационной судоходной обстановкой с использованием широкого класса радиолокационных отражателей взаимного и невзаимного типа рассеяния.

На рис. 15 в качестве примера приведены радиолокационные изображения береговой зоны водного бассейна, включающей в себя остров, разделяющий реку на два рукава и два противоположных берега. На острове оборудованы передний и задний створные знаки, в состав которых входят невзаимные искусственные отражатели, задающие линию судового хода. Расстояние между створными знаками – 60 м. Радиолокационные изображения получены поляриметром в обзорном режиме работы при проведении измерений уровней отраженных сигналов, связанных со значениями $|\dot{S}_{11}|$ (рис. 15а) и $|\dot{S}_{12}|$ (рис. 15б). Оба изображения демонстрируют фрагментарный характер береговых линий, что обусловлено зависимостью элементов МОР от выбора поляризационного измерительного базиса радиолокационной системы. Присутствующие в изображении на рис. 15б отметки от невзаимных отражателей не обладают радиолокационным контрастом, необходимым для их уверенного выделения на фоне отражений от местных объектов.



Рис. 15. Радиолокационные изображения:

a – с использованием параметра $|\dot{S}_{11}|$; b – с использованием параметра $|\dot{S}_{12}|$



Рис. 16. Радиолокационные изображения:

a – с использованием параметра σ ; b – с использованием параметра $|\Delta|$

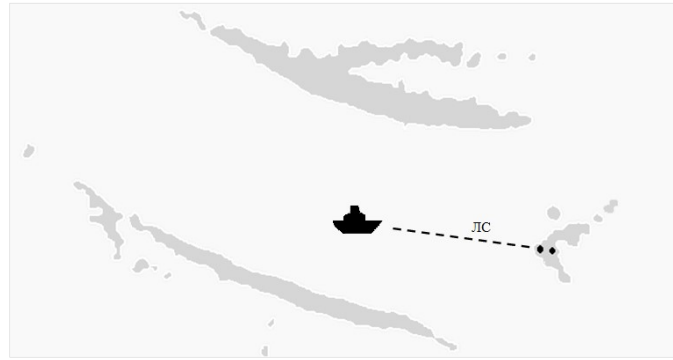


Рис. 17. Реконструкция радиолокационной карты реки и береговой зоны

На рис. 16а приведено радиолокационное изображение, полученное поляриметром в режиме измерения в каждом пикселе полной ЭПР σ матрицы S_d^C , характеризующей рассеивающие объекты взаимного типа. В полученном изображении береговых линий в виде сплошных образований исключено влияние поляризационного базиса радиолокатора на формирование яркостных отметок точечных целей. При этом в изображении на рис. 16а отсутствуют отметки от невзаимных отражателей. На рис. 16б приведено радиолокационное изображение, полученное поляриметром в режиме селекции объектов с использованием параметра $|\Delta|$ матрицы S . На изображении присутствуют точечные отметки от невзаимных отражателей и отсутствуют отражения от местных предметов. На рис. 17 представлена реконструкция карты судового хода реки с выделением береговых линий и навигационных знаков, определяющих *линейный створ* (ЛС) транспортного коридора.

Литература

1. Кобак В. О. Радиолокационные отражатели. М. : Совет. радио, 1975. 248 с.
2. Дуров А. А., Кан В. С., Ничипоренко Н. Т., Устинов Ю. М. Судовая радиолокация. Судовые радиолокационные системы и САРП : учеб. для вузов. 2-е изд., перераб. и испр. Петропавловск-Камчатский : КамчатГТУ, 2005. 280 с.
3. Шмерлинг И. Е. Монтер судоводной обстановки. М. : Транспорт, 1977. 173 с.
4. Шмерлинг И. Е., Белова Л. Т. Инструкция по содержанию судоводной обстановки на внутренних водных путях. М. : Транспорт, 1974. 160 с.
5. Пат. 2572795 Российской Федерации Ф 7 Н 01 Q 15/00. Навигационный радиооптический уголкового отражатель направленного действия / Гулько В. Л. / ФГОУ ВПО «Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники»; заявл. 01.09.2014; опубл. 20.01.2016. Бюл. № 2.
6. Канарейкин Д. Б., Потехин В. А., Шишкин И. Ф. Морская поляриметрия. Л. : Судостроение, 1968. 328 с.
7. Пат. 2634550 Рос. Федерации Н 01 Q 15/18, B63B 22/02. Навигационный радиооптический уголкового отражатель направленного действия со светоотражающими гранями / Гулько В. Л., Блинковский Н. П., Мещеряков А. А. / ФГОУ ВПО «Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники»; заявл. 15.04.2016; опубл. 31.10.2017. Бюл. № 31.
8. Пат. 2617799 Рос. Федерации Н 01 Q 15/18, B63B 22/16, G01S 1/70. Навигационный радиооптический групповой отражатель кругового действия со светоотражающими гранями / Блинковский Н. К., Гулько В. Л., Крутиков М. В., Мещеряков А. А. / ФГОУ ВПО «Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники»; заявл. 29.10.2015; опубл. 26.04.2017, Бюл. № 12.

9. Хлусов В. А., Лигхарт Л. П., Шарыгин Г. С., Воробьев П. В. Поляризационные аспекты механизма обратного рассеяния электромагнитных волн частично-невзаимными средами (Теория. Экспериментальное моделирование) // СИБПОЛ – 2002: сибир. поляризацион. Семинара : сб. докл. Томск, 2002. С. 22–31.
10. Хлусов В. А. Параметризация матрицы обратного рассеяния невзаимных сред // Оптика атмосферы и океана. 1995. Т. 8. № 10. С. 1441–1445 с.
11. А. с. 1309758 СССР, М. кл. G01S. Способ измерения коэффициента анизотропии радиолокационной цели / Хлусов В. А., Карнышев В. И., Татаринцов В. Н., Масалов Е. В., Потехин В. А., Деревянченко С. С., Рудман Э. А. 1987.
12. Бадулин Н. Н., Былина В. В., Гулько В. Л., Петров А. Ф., Соколов К. Г., Шошин Е. Л. Обнаружение искусственных радиолокационных целей по поляризационным признакам на фоне подстилающей поверхности // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника. 1991. № 8. С. 29–32.
13. Пат. 2225059 Рос. Федерации Н 01 Q 19/17. Радиолокационный отражатель / Шошин Е. Л., Суханюк А. М., Рыжаков В. В. / СурГУ; заявл. 13.05.2002; опубл. 27.02.2004. Бюл. № 6.
14. Шошин Е. Л., Кузьмичев В. Д. Характеристики рассеяния невзаимных искусственных радиолокационных отражателей // Радиолокация, навигация, связь : материалы VIII междунар. научн.-техн. конф. Воронеж, 2002. Т. 3. С. 1636–1647.
15. Белоцерковский Г. Б. Основы радиотехники и антенны. Ч. 2. Антенны. М. : Радио и связь, 1983.
16. Пат. 34258 РФ Рос. Федерации G 01 S 13/95 Радиолокационный отражатель / Шошин Е. Л., Суханюк А. М. / СурГУ; заявл. 02.07.2003; опубл. 27.11.2003. Бюл. № 33.
17. Антенны и устройства СВЧ. Проектирование фазированных антенных решеток : учеб. пособие для вузов / под ред. Д. И. Воскресенского. М. : Радио и связь, 1981.
18. Шошин Е. Л., Суханюк А. М. Применение ферритовых СВЧ-приборов в конструкциях искусственных радиолокационных отражателей // Радиолокация, навигация, связь : материалы IX Междунар. научн.-техн. конф. Воронеж, 2003. Т. 3. С. 1745–1755.
19. Пат. 36533 Рос. Федерации G 01 S 13/95. Радиолокационный отражатель / Шошин Е. Л., Суханюк А. М., Суханюк А. М. / СурГУ; заявл. 05.11.2003; опубл. 10.03.2004. Бюл. № 7.
20. Пат. 36532 Рос. Федерации G 01 S 13/95. Радиолокационный отражатель / Шошин Е. Л., Суханюк А. М., Суханюк А. М. / СурГУ; заявл. 05.11.2003, опубл. 10.03.2004. Бюл. № 7.
21. Татаринцов В. Н., Татаринцов С. В., Лигтхарт Л. П. Введение в современную теорию поляризации радиолокационных сигналов. Поляризация плоских электромагнитных волн и ее преобразования : моногр. Т. 1. Томск : Изд-во ТГУ, 2006. 380 с.
22. Пат. 2413185 Рос. Федерации G01G 13/02. Способ селекции невзаимных радиолокационных объектов и устройство для его реализации / Бутко В. А., Доценко В. В., Гюнтер В. Я., Носов Д. М., Осипов М. В., Ровкин М. Е., Сурков А. С., Хлусов В. А. / ЗАО «Научно-производственная фирма Микран»; заявл. 27.08.2009; опубл. 27.02.2011. Бюл. № 6.

УДК 622.276:531.72

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ НА ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СЕТКАХ РАЗЛИЧНОГО ВИДА

О. И. Бутнев¹, В. Ю. Кузнецов¹, В. А. Пронин¹, М. Л. Сидоров¹,
Р. М. Кац², И. В. Афанаскин², А. В. Королев², П. В. Ялов²

¹ Федеральный научный центр Российский федеральный ядерный центр –
Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики,
г. Саров, virtualvi@mail.ru

² Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных
исследований Российской академии наук», Ivan@Afanaskin.ru

В статье приводится методика расчета двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей (нефти и воды) на основе модели «Black Oil» с использованием призматических структурированных и неструктурированных сеток. Для решения уравнений применяется полностью неявный конечно-объемный метод. Работоспособность методики проверена на задаче, основанной на стандартном тесте SPE8. Показано качественное и количественное согласие результатов с французским коммерческим симулятором Rubis компании Kappa Engineering.

Ключевые слова: двухфазная фильтрация, модель черной нефти, конечно-объемный метод, неструктурированные сетки.

TWO-PHASE FLUID FLOW CALCULATION METHODOLOGY FOR POROUS MEDIA AT DIFFERENT PRISMATIC GRID TYPES

O. I. Butnev¹, V. Yu. Kuznetsov¹, V. A. Pronin¹, M. L. Sidorov¹,
R. M. Kats², I. V. Afanaskin², A. V. Korolev², P. V. Yalov²

¹Russian Federal Nuclear Center, All-Russian Research Institute of Experimental Physics,
Sarov, virtualvi@mail.ru

²System Research Institute, Russian Academy of Sciences, Ivan@Afanaskin.ru

The article describes the two-phase fluid filtration calculation for non-mixing fluids based on the Black-oil model with an application of structured and unstructured prismatic grids. Equations solution is conducted through a fully implicit finite volume method. The described approach is tested on the SPE8 algorithm. Quantitative and quality parameters correlate with the commercial software package Rubis (Kappa Engineering).

Keywords: two-phase filtration, black-oil model, finite volume method, unstructured grids.

Введение. В настоящее время большая часть нефтяных месторождений на территории Российской Федерации находится на стадии истощения [1]. Доминирующей технологией разработки является заводнение (закачка в пласт больших объемов воды для вытеснения нефти и поддержания пластового давления). Поскольку в реальных пластах вытеснение нефти водой не является поршневым – для извлечения 30–35 % запасов нефти необходимо прокачать несколько поровых объемов воды. При этом в результате неоднородности пласта по фильтрационно-емкостным свойствам (по площади и по толщине), а также в результате существования обширной зоны совместной фильтрации нефти и воды, добывающие скважины длительное время одновременно добывают две жидкости – нефть и воду, причем доля воды в продукции скважин неуклонно растет. Для некоторых скважин соотношение дебитов воды и жидкости (обводненность) может составлять до 99 %. У многих скважин, находящихся в эксплуатации, обводненность составляет более 90 %. В связи со сложившейся ситуацией необходимо наличие программного обеспечения, позволяющего путем математического моделирования определять рациональные режимы разработки месторождений с целью увеличения коэффициента

нефтеотдачи и снижения производственных издержек.

На данный момент рынок программных продуктов, предназначенных для решения данных задач, представлен в основном иностранными компаниями: Schlumberger [2], CMG [3], Roxar [4], Карра Engineering [5] и др. Однако доступ к данным программным продуктам в связи со сложной внешнеполитической обстановкой может быть существенно ограничен или полностью закрыт. Также при использовании иностранных программных продуктов, представляющих для пользователя «черный ящик», нельзя полностью исключить возможность утечки информации, представляющей коммерческую тайну.

Современное программное обеспечение для моделирования процессов разработки нефтяных месторождений должно удовлетворять ряду требований:

- наличие средств подготовки и анализа результатов (пре-пост-процессор);
- интуитивно понятный интерфейс;
- возможность проведения расчетов с использованием большого количества сеточных блоков (порядка 10 млн) и вычислительных ядер (до нескольких тысяч).

Геологическая структура нефтяных месторождений является достаточно сложной, имеющей неоднородности как по структурному составу, так и по геометрическим характеристикам (разломы, линзы и т. д.). Подробное воспроизведение в сеточной модели данных особенностей строения позволяет получать более точные результаты при прогнозировании процесса разработки и при оценке результатов геолого-технических мероприятий. Для описания подобных объектов необходимо построение специализированных сеток. Как правило, при моделировании нефтяных коллекторов используются сетки формата «Corner Point», которые являются регулярными топологическими и нерегулярными геометрическими. С ростом вычислительных ресурсов компьютеров стали все чаще использоваться неструктурированные сетки ввиду их способности хорошо описывать геометрические особенности модели (выклинивания, разломы и т. д.), поэтому представляются перспективными программная реализация и внедрение в практику повседневных расчетов использования таких сеток.

Модель двухфазной фильтрации

В большинстве случаев для моделирования разработки месторождений нефти на поздних этапах разработки можно использовать модель двухфазной фильтрации.

В данной работе мы опишем модель двухфазной фильтрации в системе вода – нефть, полученную на основе широко известной модели «Black Oil» [6].

Уравнения модели «нелетучей нефти» («Black Oil») представляют собой систему уравнений, объединяющих уравнения сохранения объема флюида в поверхностных условиях и уравнения движения Дарси. Движение среды описывается с точки зрения Эйлера. Система дифференциальных уравнений сохранения объема, описывающая двухфазное трехмерное течение жидкости в пористой среде, имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right) - \nabla \cdot \left(\frac{\vec{W}_o}{B_o} \right) = q_o, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) - \nabla \cdot \left(\frac{\vec{W}_w}{B_w} \right) = q_w, \quad (2)$$

где все обозначения – стандартные.

Уравнения движения (скорость фильтрации) описываются законом Дарси:

$$\vec{W}_o = -\lambda_o (\nabla p_o - \gamma_o \nabla h), \quad (3)$$

$$\vec{W}_w = -\lambda_w (\nabla p_w - \gamma_w \nabla h), \quad (4)$$

где λ_o , λ_w – коэффициенты проводимости соответствующей фазы имеют вид:

$$\lambda_o = \frac{k_{ro} K_a}{\mu_o}; \lambda_w = \frac{k_{rw} K_a}{\mu_w}.$$

Для замыкания системы уравнений (1)–(4) необходимы следующие соотношения:

$$p_o - p_w = P_{cow}(S_w), \quad (5)$$

$$S_o + S_w = 1. \quad (6)$$

Отношение (5) выражает зависимость капиллярного давления в системе вода – нефть и используется для пересчета давления воды p_w . Уравнение (6) используется для пересчета одной из насыщенностей.

Для полной формулировки математической модели исходная система уравнений (1)–(6) должна быть дополнена уравнениями состояния (данными PVT), а также начальными и граничными условиями.

Метод учета скважин в численных моделях фильтрации основан на допущении того, что вблизи скважины течение описывается аналитическим решением, граничные условия для которого определяются из численного решения задачи для пласта. Этот подход впервые предложен Писманом [7].

Скважина рассматривается как множество интервалов перфорации, вскрывающих сеточные блоки (ячейки). На скважине могут задаваться: забойное или устьевое давление, дебит флюидов в поверхностных или пластовых условиях. Распределение дебита по фазам и по интервалам перфорации осуществляется с учетом гравитационных сил и состава смеси в скважине.

В случае, когда на скважине заданы забойные давления, объемный фазовый дебит интервала перфорации, приведенный к стандартным условиям, имеет вид [8]:

$$q_{l\alpha} = WI_l \left\{ K_{al} h_l \left(\frac{k_{r\alpha}}{B_{\alpha} \mu_{\alpha}} \right) \delta_l \left[p_l - p_{wb} - \bar{\gamma} (H_l - H_{ref}) \right] \right\}; \quad l = 1, 2, \dots, N_p; \quad \alpha = o, w; \quad (7)$$

$$q_{lg} = q_{lo} R_{lo}; \quad l = 1, 2, \dots, N_p; \quad (8)$$

где p_l – давление в ячейке, содержащей интервал перфорации l ; p_{wb} – забойное давление, приведенное к опорной глубине; WI_l – коэффициент скважины для интервала перфорации l ; h_l – толщина интервала l (может быть меньше, чем толщина ячейки, содержащей интервал l , но не может быть больше ее); δ_l – индекс противотока; $\bar{\gamma}$ – осредненный удельный вес жидкости в стволе скважины; H_l – глубина интервала l ; H_{ref} – опорная глубина; N_p – число интервалов перфорации.

Здесь для добывающей скважины должно выполняться соотношение:

$$\delta_l = \begin{cases} 1, & p_l - p_{wb} - \bar{\gamma}(H_l - H_{ref}) \geq 0, \\ 0, & p_l - p_{wb} - \bar{\gamma}(H_l - H_{ref}) < 0, \end{cases}$$

в котором для нагнетательной скважины знаки неравенств меняются на противоположные; $\bar{\gamma} = \frac{\sum_l \sum_\alpha q_{l\alpha} \gamma_{l\alpha}}{\sum_l \sum_\alpha q_{l\alpha}}$, причем $\sum_l \sum_\alpha q_{l\alpha} \neq 0$, в противном случае $\bar{\gamma} = \gamma_\alpha$, где γ_α согласуется с начальными условиями.

Коэффициент скважины (для прямоугольной сетки и сетки «Corner Point») в выражении (7) вычисляется как:

$$WI_l = \frac{2\pi}{\ln\left(\frac{r_{bl}}{r_{wl}}\right) + S_l},$$

где должно выполняться условие $r_{bl} \geq r_{wl} \cdot \exp(-S_l)$; r_{bl} – эквивалентный радиус сеточного блока (ячейки), содержащего интервал l ; r_{wl} – радиус скважины на интервале l ; S_l – скин-фактор на интервале l .

Эквивалентный радиус сеточного блока, содержащего интервал l , для вертикальной скважины рассчитывается с помощью формулы Писмана:

$$r_{bl} = 0,28 \frac{\sqrt{\sqrt{\frac{k_{yl}}{k_{xl}}} \Delta x_l^2 + \sqrt{\frac{k_{xl}}{k_{yl}}} \Delta y_l^2}}{\sqrt[4]{\frac{k_{yl}}{k_{xl}}} + \sqrt[4]{\frac{k_{xl}}{k_{yl}}}},$$

где k_{xl} и k_{yl} – абсолютные проницаемости сеточного блока, содержащего интервал l , по соответствующим направлениям; Δx_l и Δy_l – размеры сеточного блока, содержащего интервал l .

Фазовые дебиты скважин рассчитываются с помощью выражения:

$$q_\alpha = \sum_l q_{l\alpha}.$$

В случае, когда на скважине заданы фазовые дебиты q_α , $\alpha = \{o, w\}$ либо дебиты жидкости $q_L = \sum_\alpha q_\alpha$, $\alpha = \{o, w\}$, используется упрощенный метод распределения дебитов по интервалам перфорации:

$$q_{l\alpha} = \frac{B_{l\alpha} T_{l\alpha} q_\alpha}{\sum_l B_{l\alpha} T_{l\alpha}}; \alpha = \{o, w\};$$

$$q_{l\alpha} = \frac{B_{l\alpha} T_{l\alpha} q_L}{\sum_l \sum_\beta B_{l\beta} T_{l\beta}}; \alpha = \{o, w\}; \beta = \{o, w\}; \quad (9)$$

где $T_{l\alpha} = WI_l k_l h_l \frac{f_{l\alpha}}{B_{l\alpha} \mu_{l\alpha}} K_{\text{exp}}$, аналогично для $T_{l\beta}$.

Для случая, когда на скважине заданы фазовые дебиты либо дебиты жидкости, забойные давления рассчитываются из выражения (7).

Для случая, когда на скважине задан дебит жидкости, по формуле (9) производится распределение дебитов нефти и воды по интервалам перфорации. Затем по формуле (7), записанной для нефти или воды, определяется забойное давление. После чего по формуле (8) определяется дебит газа.

Искомые параметры скважины (забойное давление либо дебит) могут быть учтены в явной или неявной форме.

Под начальными условиями понимается начальное распределение искомых значений давления и насыщенностей на момент времени $t = 0$.

Под краевыми условиями понимается задание граничных условий (режимов работы) на границе моделируемой области и на каждом из источников, представляющих скважины.

В системе уравнений (1)–(6) 11 неизвестных:

$$\begin{array}{ccc} p_o & p_w & \\ S_o & S_w & \\ B_o & B_w & \\ \rho_o & \rho_w & \\ k_{ro} & k_{rw} & \phi \end{array}$$

для которых требуется 11 уравнений:

- 2 уравнения состояния или таблицы (PVT), позволяющие вычислить $\rho_o, \rho_w = f(P)$;
- 2 уравнения или таблицы PVT, задающие $B_o, B_w = f(P)$;
- 2 таблицы относительных фазовых проницаемостей, задающих $k_{ro} = f(S_w)$, $k_{rw} = f(S_w)$;
- уравнение для насыщенностей, дающее $S_o = 1 - S_w$;
- таблица капиллярных давлений, дающая зависимость $p_w = p_o - P_{cow}(S_w)$,

Разностные уравнения полностью неявной схемы

Для получения разностных уравнений двухфазной модели фильтрации будет использован метод конечных объемов, а для аппроксимации потоков через боковые грани ячеек – метод отложенной коррекции.

Для решения разностных уравнений используется полностью неявный метод, известный еще и как метод совместного решения [6]. Суть данного метода заключается в записи производных от насыщенностей в правой части уравнений (1)–(2) через производные от давлений и решение уравнений в переменных давления нефти p_o и насыщенности воды S_w . Впервые это было предложено Дугласом [9].

Так как исходные уравнения являются нелинейными, в качестве метода линеаризации используется метод Ньютона – Рафсона [8]. В результате дискретизации и линеаризации образуются по два уравнения для каждого сеточного блока. При этом матрица принимает блочный вид.

Метод совместного решения. Обозначим через n временной шаг ($n > 0$). Введем следующий временной оператор для функции от времени v :

$$\bar{\delta}v = v^{n+1} - v^n.$$

При неявной аппроксимации по времени система уравнений (1)–(2) определяется как

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\delta}}{\Delta t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) &= \Delta [\lambda_w^{n+1} (\Delta p_w^{n+1} - \gamma_w^{n+1} \Delta h)] + q_w^{n+1}; \\ \frac{\bar{\delta}}{\Delta t} \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right) &= \Delta [\lambda_o^{n+1} (\Delta p_o^{n+1} - \gamma_o^{n+1} \Delta h)] + q_o^{n+1};\end{aligned}\quad (10)$$

где $\Delta t = t^{n+1} - t^n$. Система (10) является нелинейной с неизвестными p_α^{n+1} и S_α^{n+1} , $\alpha = \{o, w\}$ и может быть линеаризована методом Ньютона – Рафсона. Для этого запишем:

$$p_\alpha^{n+1, l+1} = p_\alpha^{n+1, l} + \delta p_\alpha, \quad S_\alpha^{n+1, l+1} = S_\alpha^{n+1, l} + \delta S_\alpha, \quad \alpha = o, w.$$

где l обозначает номер итерации, а δp_α и δS_α представляют изменение давления и насыщенности за этот итерационный шаг.

Зная, что:

$$\begin{aligned}v^{n+1} &\approx v^{n+1, l+1} = v^{n+1, l} + \delta v, \\ \bar{\delta} v &\approx v^{n+1, l} - v^n + \delta v,\end{aligned}$$

перепишем систему (10) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta t} \left[\left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right)^{n+1, l+1} - \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right)^n + \delta \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) \right] &= \Delta [\lambda_w^{n+1, l+1} (\Delta p_w^{n+1, l+1} - \gamma_w^{n+1, l+1} \Delta h)] + q_w^{n+1, l+1}; \\ \frac{1}{\Delta t} \left[\left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right)^{n+1, l+1} - \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right)^n + \delta \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right) \right] &= \Delta [\lambda_o^{n+1, l+1} (\Delta p_o^{n+1, l+1} - \gamma_o^{n+1, l+1} \Delta h)] + q_o^{n+1, l+1};\end{aligned}\quad (11)$$

В этой системе δp_α и δS_α являются неизвестными. В качестве независимых переменных выбираются δp , δS_w .

Отметим, что $\delta S_o = -\delta S_w$. Соответственно, левая часть системы (11) может быть представлена следующим образом:

для водной фазы

$$\delta \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) = c_{wp} \delta p + c_{wS_w} \delta S_w;$$

где

$$c_{wp} = \phi^0 c_R \left(\frac{S_w}{B_w} \right)^l + \left(\phi S_w \frac{dB_w^{-1}}{dp} \right)^l, \quad c_{wS_w} = \left(\frac{\phi}{B_w} \right)^l,$$

для нефтяной фазы

$$\delta \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right) = c_{op} \delta p + c_{oS_o} \delta S_o;$$

где

$$c_{op} = \phi^0 c_R \left(\frac{S_o}{B_o} \right)^l + \left(\phi S_o \frac{dB_o^{-1}}{dp} \right)^l, \quad c_{oS_o} = \left(\frac{\phi}{B_o} \right)^l.$$

Опуская далее временной индекс, запишем значение проводимости фазы на $l+1$ итерации

$$\lambda_\alpha^{l+1} = \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha^{l+1} B_\alpha^{l+1}} K, \alpha = o, w,$$

где $\mu_w^{l+1} = \mu_w$. Таким образом, дебиты скважин определяются следующим образом:

$$q_w^{l+1} = \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wf}} W I^{(j,m)} \frac{k_{rw}^{l+1}}{\mu_w} \left((p_{bh}^{(j)})^{l+1} - p^{l+1} + p_{cow}^{l+1} - \rho_w^{l+1} \wp(z_{bh}^{(j)} - z) \right) \delta(x - x^{(j,m)})$$

$$q_o^{l+1} = \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wf}} W I^{(j,m)} \frac{k_{ro}^{l+1}}{\mu_o^{l+1}} \left((p_{bh}^{(j)})^{l+1} - p^{l+1} - \rho_o^{l+1} \wp(z_{bh}^{(j)} - z) \right) \delta(x - x^{(j,m)}).$$

Для удобства вводится понятие фазового потенциала

$$\Phi_w^{l+1} = p^{l+1} - p_{cow}^{l+1} - \gamma_w^{l+1} \nabla h,$$

$$\Phi_o^{l+1} = p^{l+1} - \gamma_o^{l+1} \nabla h,$$

Представляя потенциалы, проводимости и дебиты фаз в основных переменных (δp и δS_w), получим.

Для водной фазы:

$$\Phi_w^{l+1} = \Phi_w^l + d_{wp} \delta p + d_{wS_w} \delta S_w,$$

где

$$d_{wp} = 1 - \left(\frac{d\rho_w}{dp} \right)^l \wp z, \quad d_{wS_w} = \left(\frac{dp_{cow}}{dS_w} \right)^l.$$

Для нефтяной фазы:

$$\Phi_o^{l+1} = \Phi_o^l + d_{op} \delta p,$$

где

$$d_{op} = 1 - \left(\frac{d\rho_o}{dp} \right)^l \wp h.$$

Проводимости фаз могут быть выражены аналогичным образом.

Для водяной фазы:

$$T_w^{l+1} = T_w^l + E_{wp} \delta p + E_{wS_w} \delta S_w,$$

где

$$E_{wp} = \left(\frac{k_{rw}}{\mu_w} \frac{dB_w^{-1}}{dp} \right)^l K, \quad E_{wS_w} = \left(\frac{dk_{rw}}{dS_w} \frac{1}{\mu_w B_w} \right)^l K.$$

Для нефтяной фазы:

$$T_o^{l+1} = T_o^l + E_{op} \delta p + E_{oS_w} \delta S_w,$$

где

$$E_{op} = \left(k_{ro} \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{\mu_o B_o} \right) \right)^l K, \quad E_{oS_w} = \left(\left(\frac{dk_{ro}}{dS_w} \right) \frac{1}{\mu_o B_o} \right)^l K.$$

Дебиты скважин также представляются подобным образом.

Для водяной фазы:

$$q_w^{l+1} = q_w^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} WT^{(j,m)} \left[e_{wp}^{(j)} \delta p + e_{wS_w}^{(j)} \delta S_w + e_{wp_{bh}}^{(j)} \delta p_{bh}^{(j)} \right] \delta(x - x^{(j,m)}),$$

где

$$e_{wp}^{(j)} = -\frac{1}{\mu_w} \left[k_{rw} \left(1 + \frac{d\rho_w}{dp} \wp(z_{bh}^{(j)} - z) \right) \right]^l, \quad e_{wp_{bh}} = \frac{k_{rw}^l}{\mu_w},$$

$$e_{wS_w}^{(j)} = \frac{1}{\mu_w} \left[\frac{dk_{rw}}{dS_w} (p_{bh}^{(j)} - p - p_{cow} - \rho_w \wp(z_{bh}^{(j)})) - k_{rw} \frac{dp_{cow}}{dS_w} \right]^l.$$

Для нефтяной фазы:

$$q_o^{l+1} = q_o^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} WT^{(j,m)} \left[e_{op}^{(j)} \delta p + e_{oS_w}^{(j)} \delta S_w + e_{op_{bh}} \delta p_{bh}^{(j)} \right] \delta(x - x^{(j,m)}),$$

где

$$e_{op}^{(j)} = \left\{ k_{ro} \left[\frac{d\mu_o^{-1}}{dp} (p_{bh}^{(j)} - p - \rho_o \wp(h_{bh}^{(j)} - h)) - \frac{1}{\mu_o} \left(1 + \frac{d\rho_o}{dp} \wp(h_{bh}^{(j)} - h) \right) \right] \right\}^l,$$

$$e_{oS_w}^{(j)} = \left[\frac{1}{\mu_o} \left(\frac{dk_{ro}}{dS_w} \right) (p_{bh}^{(j)} - p - \rho_o \wp(h_{bh}^{(j)} - h)) \right]^l.$$

Продлав подобные разложения для коэффициента объемного расширения $B_\alpha, \alpha = o, w$, получим

$$B_\alpha^{l+1} = B_\alpha^l (1 - b_{\alpha p} \delta p), \quad \alpha = o, w,$$

где

$$b_{\alpha p} = - \left(\frac{1}{B_\alpha} \frac{dB_\alpha}{dp} \right)^l, \quad \alpha = o, w,$$

Метод дискретизации уравнений на неструктурированных сетках

Аппроксимация по времени. Аппроксимация производной по времени искомой функции φ (немая переменная) в ячейке J по схеме первого порядка точности имеет вид:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_J = \frac{\varphi_J^{n+1} - \varphi_J^n}{\tau^n}.$$

Аппроксимация по пространству. В случае, когда проводимость пласта задана в виде скалярной функции, значение градиента будем вычислять с использованием метода отложенной коррекции. В данном методе производная от давления по нормали в центре грани аппроксимируется с учетом вычисленного в ячейках сетки значения градиента, который определяется либо по формуле Гаусса, либо методом наименьших квадратов. При неявной аппроксимации значение градиента скалярного поля в ячейках определяется по значению поля с предыдущей итерацией (отложенной коррекцией). Отметим, что в случае использования разностных уравнений в дельта-форме аппроксимация потоков приращений через грани проводится без учета градиентов от приращений в центрах ячеек.

В задачах с анизотропной проводимостью градиент от искомой функции в центре грани определяется по формуле Гаусса интегрированием по контрольному объему, который является объединением среднемедиальных контрольных объемов относительно узлов граней ячеек.

Ранее подобный метод аппроксимации градиента был описан в работе [10]. Рассмотрим P – ю ячейку и f – ю грань этой ячейки, которая является общей для P и F ячеек. Точка f – центр грани. Проведем через центры P и F ячеек плоскости, перпендикулярные нормали ($\vec{n}_f$) к f – й грани. Найдем (рис. 1) точки P' и F' пересечения этих плоскостей с нормальной линией к грани f .

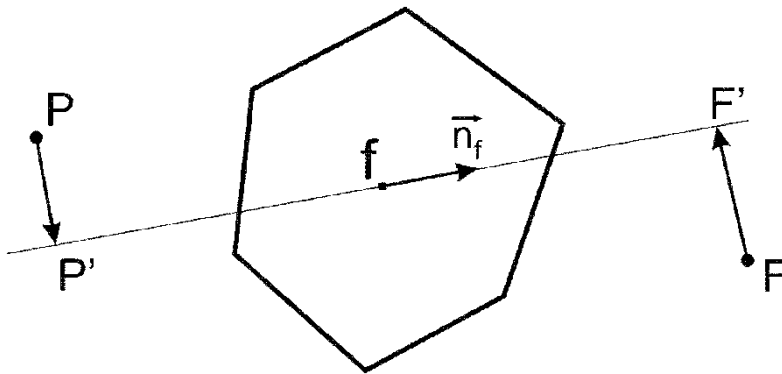


Рис. 1. Шаблон точек для аппроксимации $\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_f$ на внутренней грани

Векторы $\Delta \vec{R}_{PP'}$ и $\Delta \vec{R}_{FF'}$, с учетом ориентации вектора нормали, определяются по следующим формулам:

$$\Delta \vec{R}_{PP'} = \vec{R}_{P'} - \vec{R}_P = (\vec{R}_f - \vec{R}_P) - \vec{n}_f (\vec{n}_f \cdot (\vec{R}_f - \vec{R}_P)),$$

$$\Delta \vec{R}_{FF'} = \vec{R}_{F'} - \vec{R}_F = (\vec{R}_f - \vec{R}_F) - \vec{n}_f (\vec{n}_f \cdot (\vec{R}_f - \vec{R}_F)).$$

Считая, что в точках P' и F' известны значения ϕ , тогда поток через грань определяется по формуле:

$$(\lambda_\phi \text{grad } \phi \cdot \vec{n})_f \Delta S_f = \left(\lambda_\phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_f \Delta S_f = (\lambda_\phi)_f \frac{\phi_{F'} - \phi_{P'}}{|\Delta \vec{R}_{FF'}| + |\Delta \vec{R}_{PP'}|} \Delta S_f, \quad (12)$$

Значения $\phi_{P'}$ и $\phi_{F'}$ определим с использованием $\text{grad } \phi$, вычисленного в центрах ячеек:

$$\phi_{P'} = \phi_P + ((\text{grad } \phi)_P \cdot (\vec{R}_{P'} - \vec{R}_P)) = \phi_P + ((\text{grad } \phi)_P \cdot \Delta \vec{R}_{PP'}), \quad (13)$$

$$\varphi_{F'} = \varphi_F + \left((\text{grad } \varphi)_F \cdot (\vec{R}_{F'} - \vec{R}_F) \right) = \varphi_F + \left((\text{grad } \varphi)_F \cdot \Delta \vec{R}_{FF'} \right). \quad (14)$$

При подстановке (13)–(14) в (12), поток будет определяться по формуле:

$$\left(\lambda_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_f \Delta S_f = \frac{(\lambda_\varphi)_f}{|\Delta \vec{R}_{F'f}| + |\Delta \vec{R}_{P'f}|} \left(\varphi_F - \varphi_P + \left((\text{grad } \varphi)_F \cdot \Delta \vec{R}_{FF'} \right) - \left((\text{grad } \varphi)_P \cdot \Delta \vec{R}_{PP'} \right) \right).$$

При неявной аппроксимации потока величины φ через грань f выделим неявную и явную части и запишем поток в виде:

$$\left(\lambda_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_f \Delta S_f = \chi_f^n \left(\varphi_F^{n+1} - \varphi_P^{n+1} \right) + q_f^n,$$

где

$$\chi_f^\gamma = 2 \frac{\sigma(k_{r\varphi})_P + (1-\sigma)(k_{r\varphi})_F}{(\mu_\varphi B_\varphi)_P + (\mu_\varphi B_\varphi)_F} \frac{K_P K_F}{(K_P |\Delta \vec{R}_{F'f}| + K_F |\Delta \vec{R}_{P'f}|)} \Delta S_f,$$

$$q_f^\gamma = \chi_f^\gamma \left[\left((\text{grad } \varphi)_F^n \cdot \Delta \vec{R}_{FF'} \right) - \left((\text{grad } \varphi)_P^n \cdot \Delta \vec{R}_{PP'} \right) \right],$$

$$\sigma_f = \begin{cases} 1, & \text{если } (p_o)_P > (p_o)_F \\ 0, & \text{если } (p_o)_P < (p_o)_F \end{cases}.$$

Пусть грань f принадлежит граничной поверхности, где задано значение функции φ :

$$\varphi_f = \varphi_{\partial G}(\vec{R}_f, t), \quad \vec{R}_f \in \partial G,$$

тогда поток через внешнюю грань будет определяться по формуле:

$$\left(\lambda_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_f \Delta S_f = (\lambda_\varphi)_f \frac{\varphi_f - \varphi_{P'}}{|\Delta \vec{R}_{P'f}|} \Delta S_f. \quad (15)$$

Значение $\varphi_{P'}$ вычисляется с использованием $\text{grad } \varphi$ в центре ячейки (рис. 2) по формуле (13), при подстановке которой в (15), выражение для потока через внешнюю грань приобретает вид:

$$\left(\lambda_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_f \Delta S_f = \frac{(\lambda_\varphi)_f \Delta S_f}{|\Delta \vec{R}_{P'f}|} \left(\varphi_{\partial G} - \varphi_P - \left((\text{grad } \varphi)_P \cdot \Delta \vec{R}_{PP'} \right) \right).$$

Выражение для потока через внешнюю грань при неявной аппроксимации, с учетом разделения на неявную и явную часть, здесь представим в виде:

$$\left(\lambda_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_f \Delta S_f = -(\chi_\varphi)_f^n \varphi_P^{n+1} + q_f^n,$$

где

$$\chi_f^\gamma = \frac{(k_{\text{rf}})_P}{(\mu_\phi B_\phi)_P} \frac{K_P}{|\Delta \vec{R}_{F'f}|} \Delta S_f,$$

$$q_f^\gamma = \chi_f^\gamma \left[\phi_{\partial G}^{n+1} - \left((\text{grad } \phi)_P^\gamma \cdot \Delta \vec{R}_{PP'} \right) \right].$$

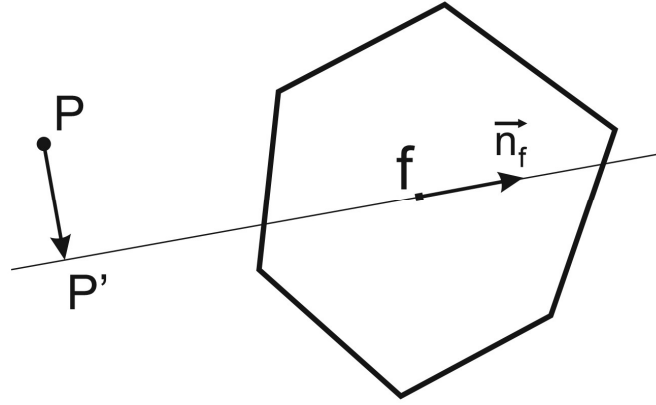


Рис. 2. Шаблон точек для аппроксимации $\chi \frac{\partial \phi}{\partial n}$ на внешней грани

Если грань f принадлежит поверхности, на которой задан поток, то

$$-\left(\lambda_\phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{\vec{R} \in \partial G} = q_\phi(\vec{R}, t),$$

тогда выражение для потока через внешнюю грань запишется в виде:

$$\left(\lambda_\phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_f \Delta S_f = -q_\phi(\vec{R}_f, t) \Delta S_f.$$

Для расчета значения градиента $\text{grad } \phi$ в ячейках разностной сетки используются два алгоритма. Первый алгоритм основан на вычислении значения $\text{grad } \phi$ в центре P -й ячейки по формуле Гаусса:

$$(\text{grad } \phi)_P = \frac{\oint_{\Sigma_P} \phi \vec{n} dS}{\iiint_{\Delta V_P} dV} = \frac{\sum_{f=1}^F \phi_f \vec{n}_f \Delta S_f}{\Delta V_P},$$

где ϕ_f – значение в центре грани (в точке f , f -й грани), $\vec{n}_f$ – внешняя нормаль к грани относительно P -й ячейки, ΔS_f – площадь грани, ΔV_P – объем ячейки, суммирование ведется по всем граням ячейки.

Значение ϕ в центре внутренней грани определяется интерполяцией по длине кривой

$$\varphi_f = \frac{\varphi_P |\Delta \vec{R}_{ff}| + \varphi_F |\Delta \vec{R}_{pf}|}{|\Delta \vec{R}_{pf}| + |\Delta \vec{R}_{ff}|}.$$

Расчет тестовой задачи

Рассмотрим решения двухфазной задачи. Постановка данной задачи основывается на восьмом тесте из набора тестов SPE [11]. На рис. 3 показана начальная постановка теста SPE8. Проведем расчет данного теста на призматических сетках различного вида: прямоугольной (рис. 4) – сетка 1, многоугольной (рис. 5) – сетка 2 и треугольной (рис. 6) – сетка 3. Отметим, что сетки 2 и 3 имеют более разреженный вид в областях отсутствия внешних источников и стоков. Вдоль оси OZ использовались 4 слоя ячеек. В итоге сетка 1 имеет 400 ячеек, сетка 2 – 108 ячеек, сетка 3 – 152 ячейки.

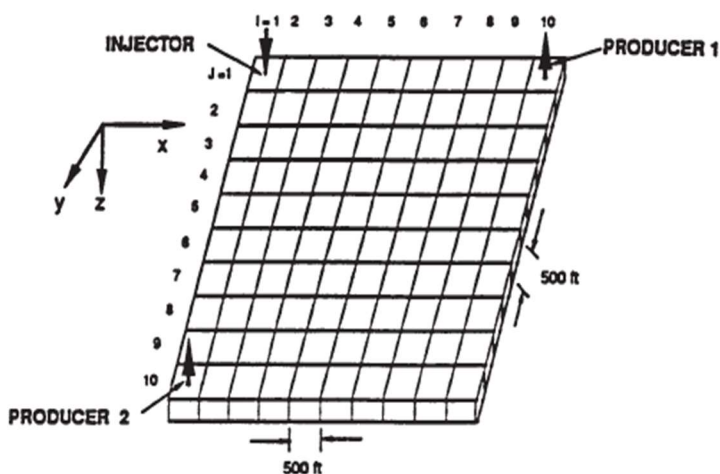


Рис. 3. Постановка теста SPE 8

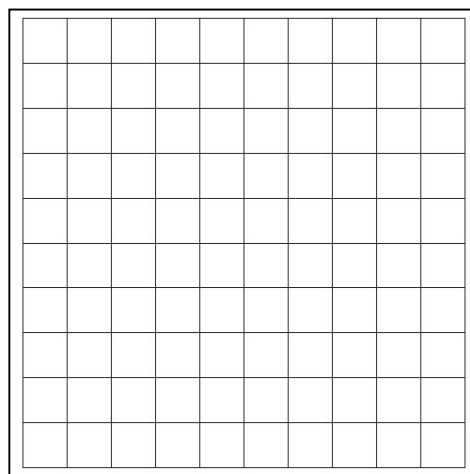


Рис. 4. Ортогональная сетка (сетка 1)

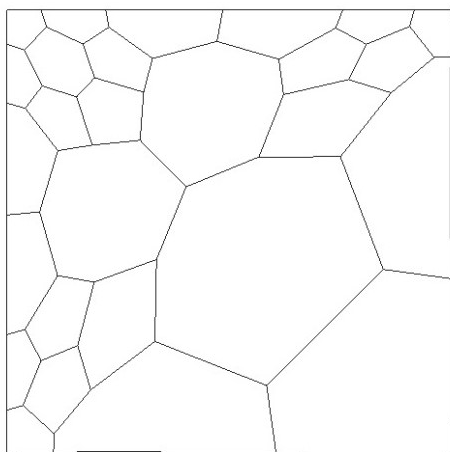


Рис. 5. Многоугольная призматическая сетка (сетка 2)

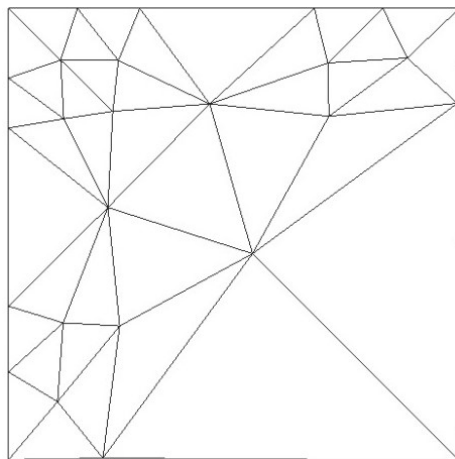


Рис. 6. Треугольная призматическая (сетка 3)

В табл. 1–4 представлены свойства породы и жидкости для данной задачи.

Область месторождения разрабатывается системой из трех скважин. Две добывающие скважины работают со значением дебита 2 000 м³/сут, нагнетательная скважина имеет приемистость 6 000 м³/сут.

Таблица 1

PVT свойства воды

Давление, атм	Объемный коэффициент, м ³ /м ³	Сжимаемость, 1/атм	Вязкость, мПа·с
339,00	1,02	4,7E-05	0,36

Таблица 2

PVT свойства нефти

Давление, атм	Объемный коэффициент, м ³ /м ³	Расстворимость газа в нефти, м ³ /м ³	Вязкость, мПа·с
339,00	1,55	0,0	0,397

Таблица 3

Таблица относительной фазовой проницаемости для системы вода – нефть

SWAT	KRW	KROW	PCOW
0,37	0	1	0
0,4046	0,013	0,242	0
0,4253	0,023	0,131	0
0,459	0,036	0,074	0
0,525	0,078	0,029	0
0,557	0,103	0,012	0
0,5839	0,143	0,01	0
0,6	0,191	0,008	0
0,63	0,502	0	0
1	1	0	0

Таблица 4

Таблица свойств коллектора

Слой	Толщина, м	Проницаемость, мД	Пористость, д.ед.
1	7,62	500	0,3
2	22,86	50	0,2
3	22,86	20	0,2
4	45,72	10	0,1

На рис. 7–8 представлены графики дебитов добывающих скважин. Сравнение производится с коммерческим программным обеспечением (КПО) Rubis (Карра Engineering) [5], расчет по которому осуществлен на ортогональной сетке. Из данных графиков видно, что время начала падения дебита нефти обеих добывающих скважин, рассчитанное по предлагаемой модели и с помощью КПО, хорошо согласуется друг с другом.

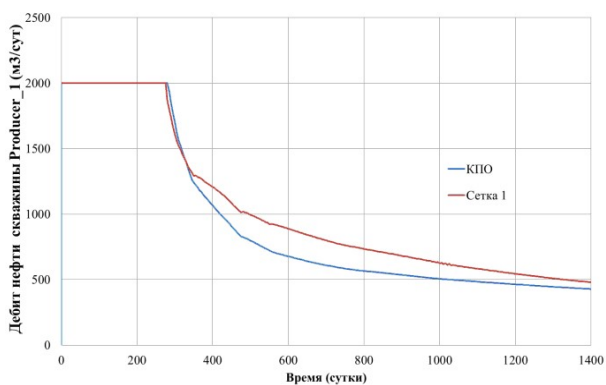


Рис. 7. Дебит нефти скважины «Producer_1»

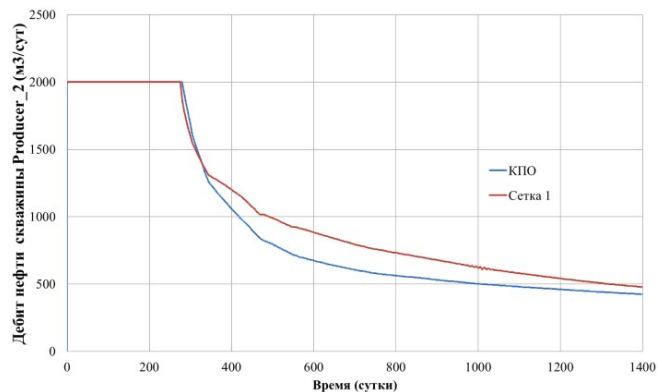


Рис. 8. Дебит нефти скважины «Producer_2»

На рис. 9 представлены временные зависимости значений насыщенности воды в ячейках со скважинами. Из графика видно, что данные величины имеют хорошее согласие результатов.

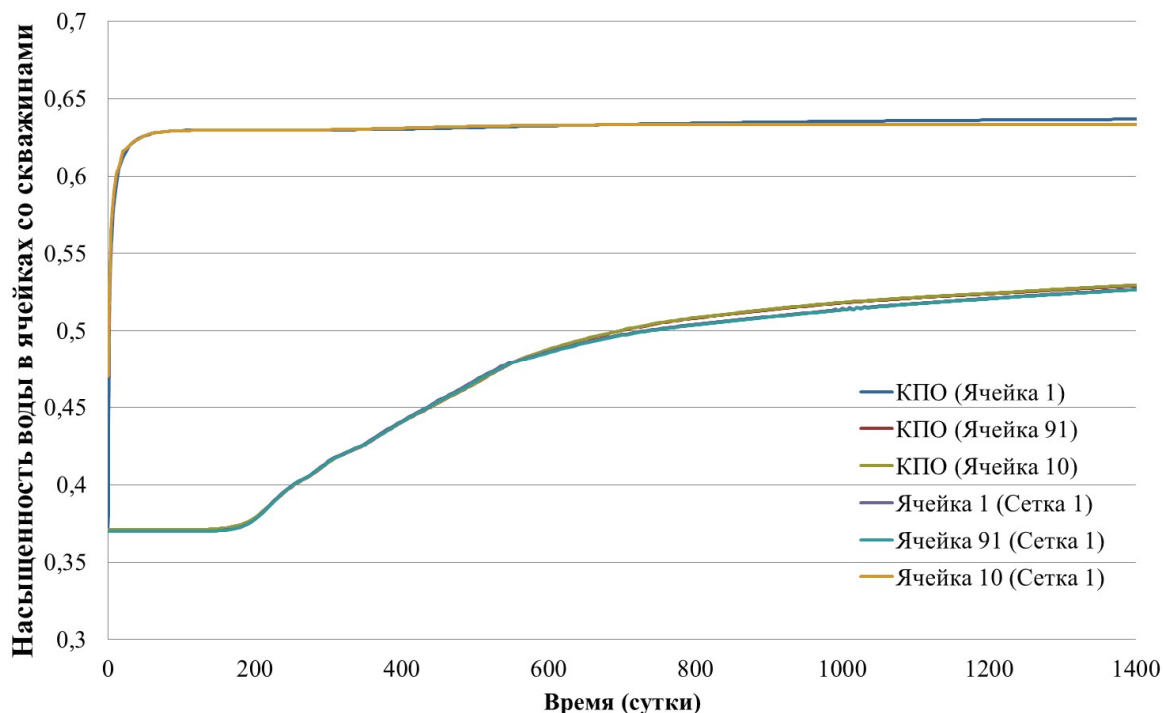


Рис. 9. Насыщенность воды в ячейках со скважинами

Далее проведем сравнение результатов, полученных на сетках 2 и 3. На рис. 10–11 представлены результаты дебитов добывающих скважин. Как видно из рис. 10, время начала падения дебита нефти на сетках 2 и 3 отличается от времени, полученного на сетке 1, примерно на 9 % для скважины «Producer_1». Для скважины «Producer_2» время начала падения дебита нефти для сеток 1 и 3 практически совпадает, в то время как для сетки 2 отличие составляет порядка 9 %.

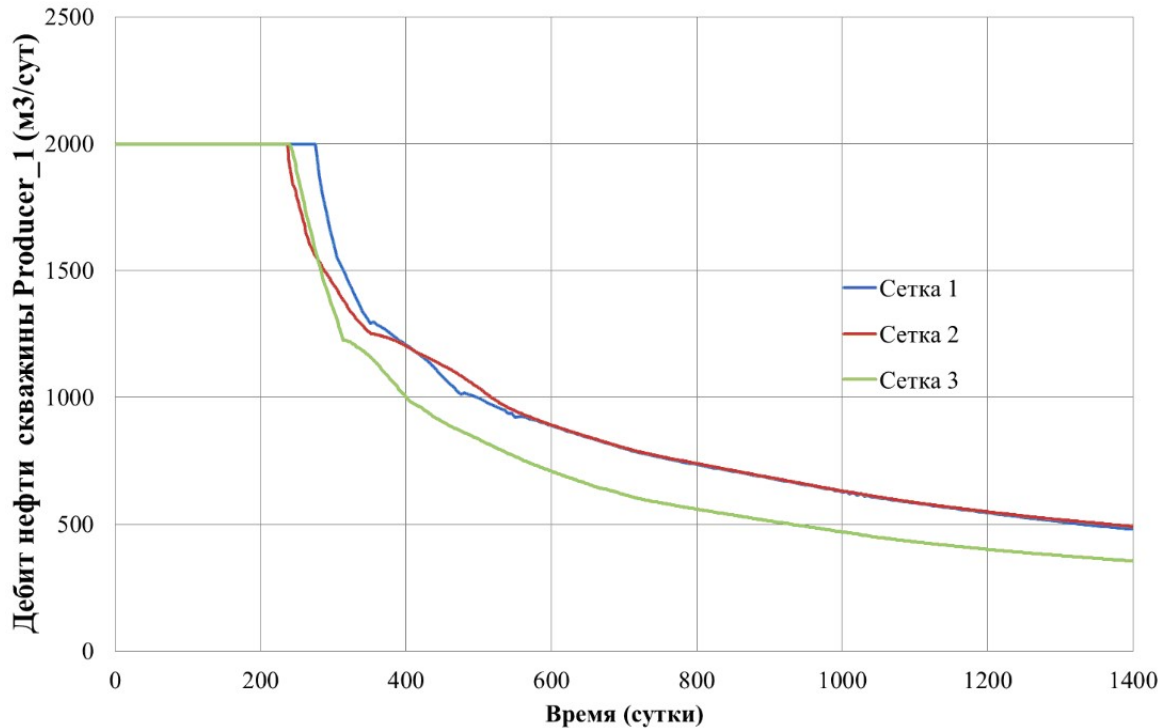


Рис. 10. Дебит нефти скважины «Producer_1»

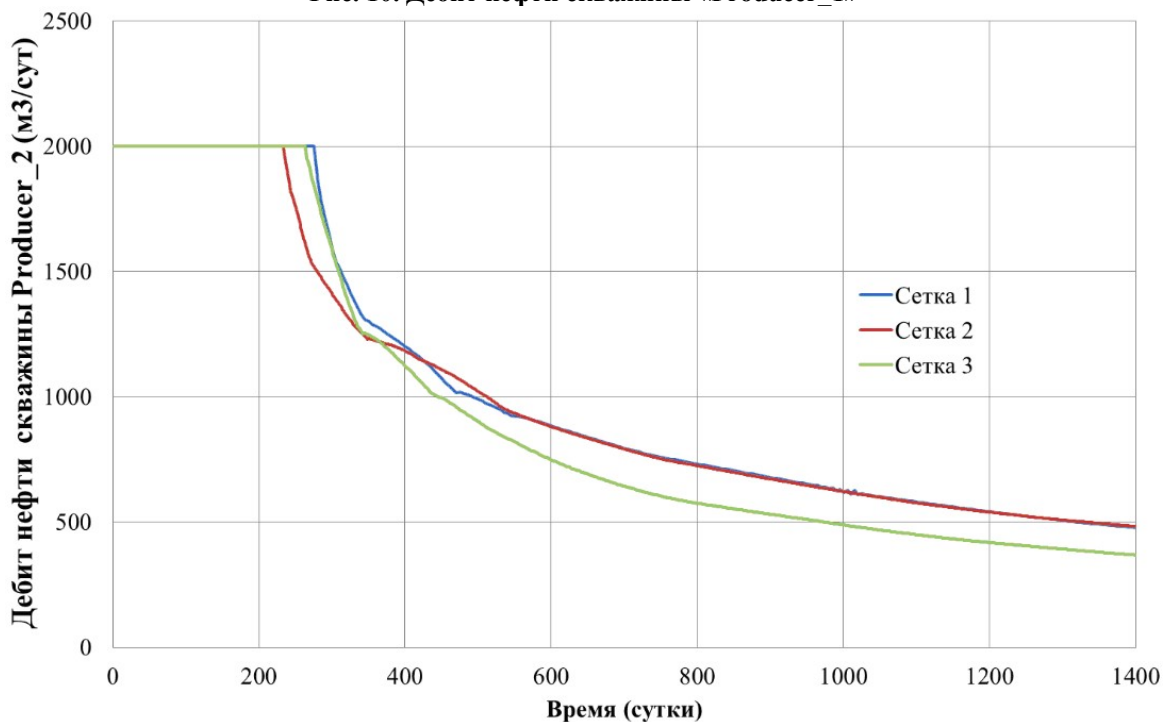


Рис. 11. Дебит нефти скважины «Producer_2»

На рис. 12 представлены временные зависимости насыщенности воды в ячейках со скважинами на разных сетках. Из рисунка видно, что на сетках 1 и 2 время прихода водного фронта к добывающим скважинам составляет одинаковую величину. Для сетки 3 отличие по времени составляет порядка 20 дней и возникает из-за различного количества ячеек между нагнетательной скважиной и добывающими скважинами «Producer_1» и «Producer_2».

На рис. 13–15 представлено поле насыщенности воды на момент окончания расчета.

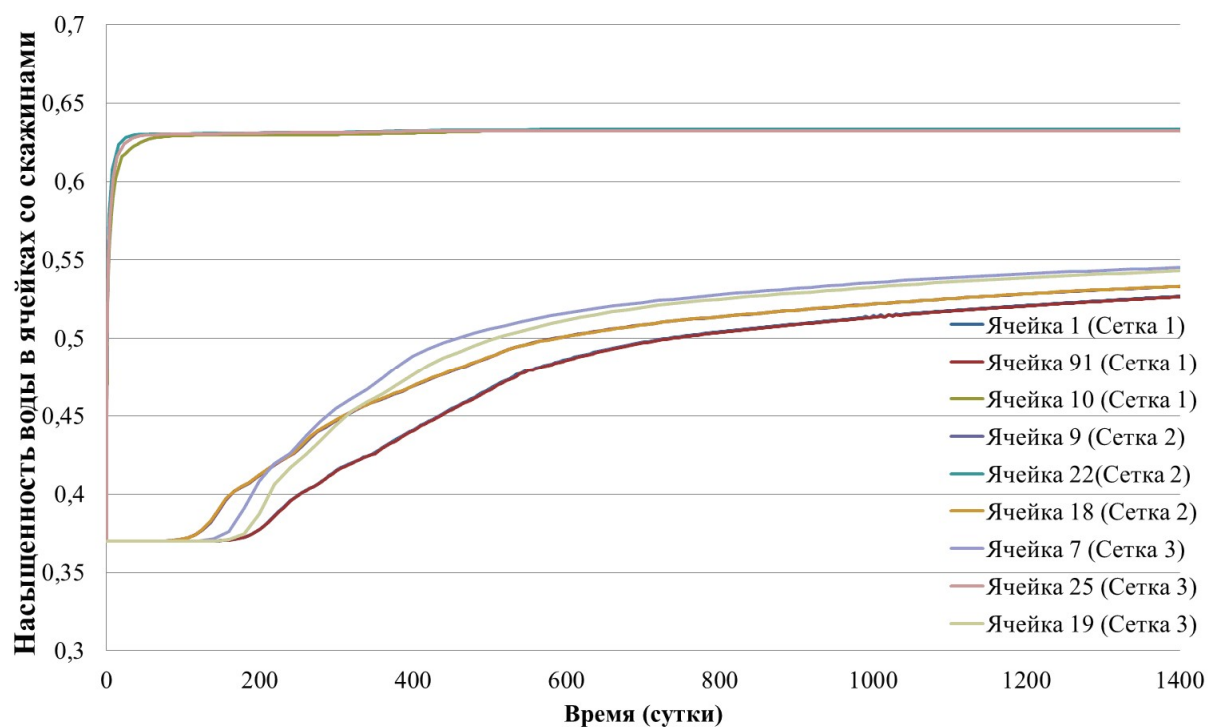


Рис. 12. Насыщенность воды в ячейках со скважинами

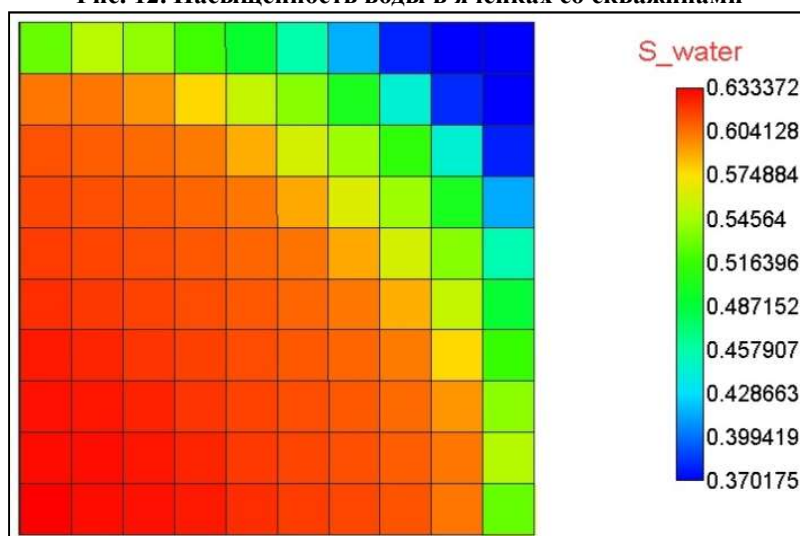


Рис. 13. Поле насыщенности воды на момент окончания расчета (сетка 1)

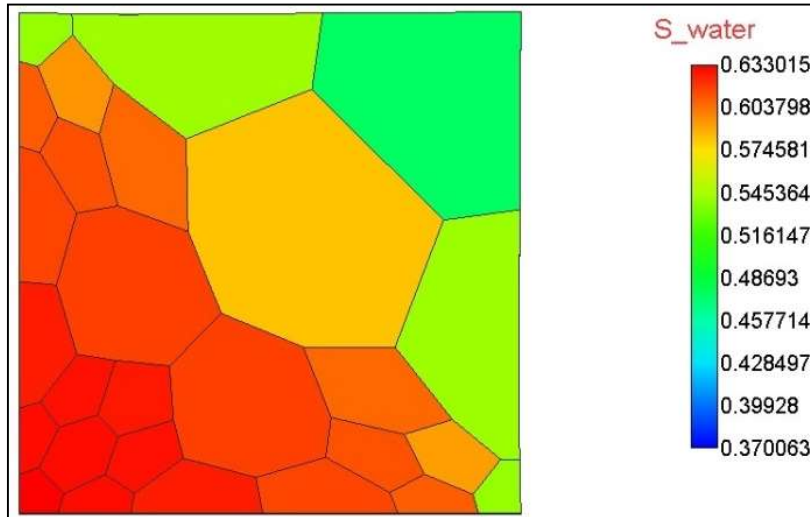


Рис. 14. Поле насыщенности воды на момент окончания расчета (сетка 2)

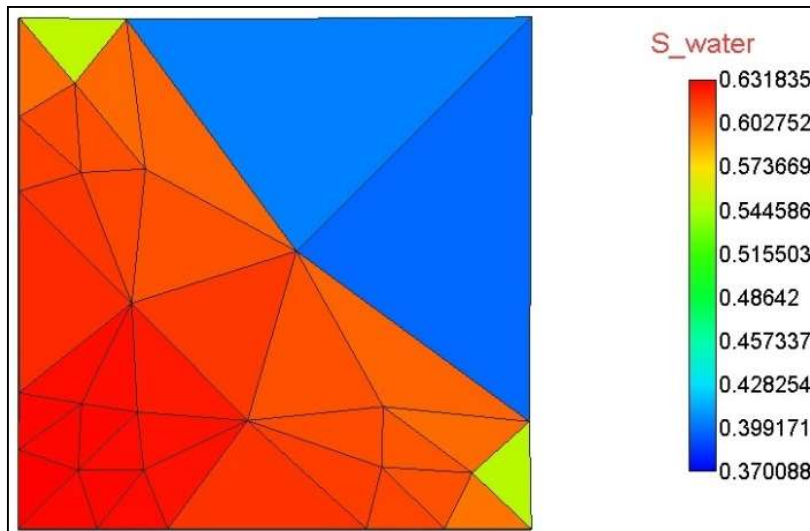


Рис. 15. Поле насыщенности воды на момент окончания расчета (сетка 3)

Заключение. Создана методика расчета двухфазной фильтрации жидкостей на основе модели «Black Oil» с использованием призматических структурированных и неструктурированных сеток. Для решения уравнений применяется полностью неявный конечно-объемный метод.

Работоспособность методики проверена на различных тестах. В статье представлены результаты тестирования разработанной методики на тесте, основанном на стандартном тесте SPE8, и сравнение их с результатами расчетов с помощью зарубежного коммерческого симулятора Rubis (Kappa Engineering). На основе полученных результатов можно сделать вывод о работоспособности методики, так как достигается достаточное для практических расчетов качественное и количественное согласие результатов между разработанной методикой и Rubis.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 18-07-00671 А.

Литература

1. Методические указания по созданию постоянно действующих геолого-технологических моделей нефтяных и газонефтяных месторождений. Ч. 2. Фильтрационные модели. М. : ВНИИОЭНГ, 2003. 228 с.
2. Schlumberger : официал.сайт компании. URL: <http://www.slb.ru/sis> (дата обращения: 07.07.2018).
3. Computer Modelling Group Ltd. : официал. сайт компании. URL: <http://www.cmgroup.com/software/stars.htm> (дата обращения: 10.07.2018).
4. Roxar : официал. сайт компании. URL: <http://www.roxar.com> (дата обращения: 03.07.2018).
5. Kappa Engineering/Rubis – численное моделирование: описание. URL: <https://www.kappaeng.com/software/rubis/overview> (дата обращения: 11.07.2018).
6. Aziz K., Odeh A. S. Comparison of Solution to a Three-Dimensional Black-Oil Reservoir Simulation Problem // JPT. 1981. January. Vol. 33. P. 13–25.
7. Peaceman D. W. Interpretation of well-block pressure in numerical reservoir simulation // SPE Journal. 1983. Vol. 23. № 3. P. 531–543.
8. Zgangxin C., Gyamrem H., Yuanle M. Computational methods for multiphase flows in porous media. Dallas : Texas : Southern Methodist University, 2006.
9. Douglas J. Jr., Peaceman D. W., Rachford H. H. Jr. A method for calculating multi-dimensional immiscible displacement // Trans. SPE AIME. 1959. № 216. P. 297–306.
10. Davidson L. A Pressure Correction Method for Unstructured Arbitrary Control Volumes // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1996. Vol. 22. № 4. P. 265–281.
11. Quandalle Ph. Eighth SPE comparative solution project: Gridding Techniques in Reservoir Simulation // SPE 25263. The 12th SPE Symposium on Reservoir Simulation. New Orleans : LA, 1993.

УДК 622.276.1/4:519.8

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ГИДРОПРОСЛУШИВАНИЯ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РАЗРАБОТКИ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

А. А. Колеватов, Ю. М. Штейнберг, Ю. Б. Чен-лен-сон, А. Г. Дяченко, Д. В. Солопов
*Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных
исследований Российской академии наук, akolevatov@niisi.ras.ru*

В статье рассматриваются вопросы применимости результатов гидродинамических исследований пласта методом гидропрослушивания для уточнения гидродинамических моделей карбонатных трещиноватых нефтенасыщенных коллекторов. Приводится описание технологии исследований методом гидропрослушивания в карбонатных трещиноватых нефтенасыщенных коллекторах. Приводится описание полученных результатов исследований.

Ключевые слова: карбонатные нефтенасыщенные коллектора, гидродинамические исследования (ГДИ), гидропрослушивание, математическое моделирование процессов разработки месторождений.

ACCURACY EVALUATION OF WELL INTERFERENCE TESTING RESULTS FOR FIELDS DEVELOPMENT SIMULATION

A. A. Kolevatov, Yu. M. Steinberg, Yu. B. Chen-len-son, A. G. Dyachenko, D. V. Solopov
System Research Institute, Russian Academy of Sciences, akolevatov@niisi.ras.ru

The article describes the applicability of the results of pressure transient analyses of the reservoir with the method of well interference testing to clarify the hydrodynamic models of fractured carbonaceous oil-saturated reservoirs. A description of the well interference testing in fractured carbonaceous oil-saturated reservoirs is given. The results of the research are presented.

Keywords: carbonaceous oil saturated reservoirs, pressure transient analysis, well interference testing, mathematic simulation of field development process.

Математическое моделирование процессов разработки месторождений нефти как один из важнейших инструментов оценки потенциала добычи, требует верификации данных, на основе которых строится распределение свойств в модели. Источниками информации для моделирования являются результаты геологического анализа, сейсморазведка, скважинная геофизика, керн, испытания скважин и гидродинамические исследования (ГДИ). Данная статья рассматривает применимость результатов исследований методом гидропрослушивания [8] межскважинного пространства пласта как одного из видов ГДИ. Как любой другой метод исследования, гидропрослушивание имеет свои преимущества и недостатки. Приведенные в статье результаты интерпретации исследований методом гидропрослушивания были смоделированы с целью оценки их точности и применимости для моделирования процессов разработки месторождений нефти в карбонатных трещиноватых коллекторах.

Описание объекта исследования

Анализ применимости результатов гидропрослушивания для математического моделирования пласта [7] в целом проводился на примере месторождения нефти в карбонатных трещиноватых коллекторах как на наиболее сложном случае, имеющем место на практике. Изучаемое месторождение находится в Тимано-Печорском регионе. Скважинами вскрыты нефтенасыщенные коллекторы позднего девона. Залежь представляет собой массивное рифовое

тело, заключенное в толщу облекания. То есть представляет собой замкнутый объект, имеющий нефтенасыщенный поровый объем с подстилающими водонасыщенными коллекторами. ГДИ скважин показали, что карбонатный коллектор месторождения имеет преобладающую трещинную составляющую в проницаемости. Трещины имеют масштаб от микроуровня, сопоставимого с размером пор коллектора, до макроуровня при минимальной пористости. Основным механизмом фильтрации в таких коллекторах описывается интерпретационной моделью «двойная проницаемость» (рис. 1). Это означает, что приток нефти в скважину может осуществляться не из всей вскрытой толщины нефтенасыщенного коллектора, а по трещинным каналам [6], которые могут иметь связь с выше- и нижележащими толщами, а также с участками месторождения, находящимися на удалении до нескольких километров.

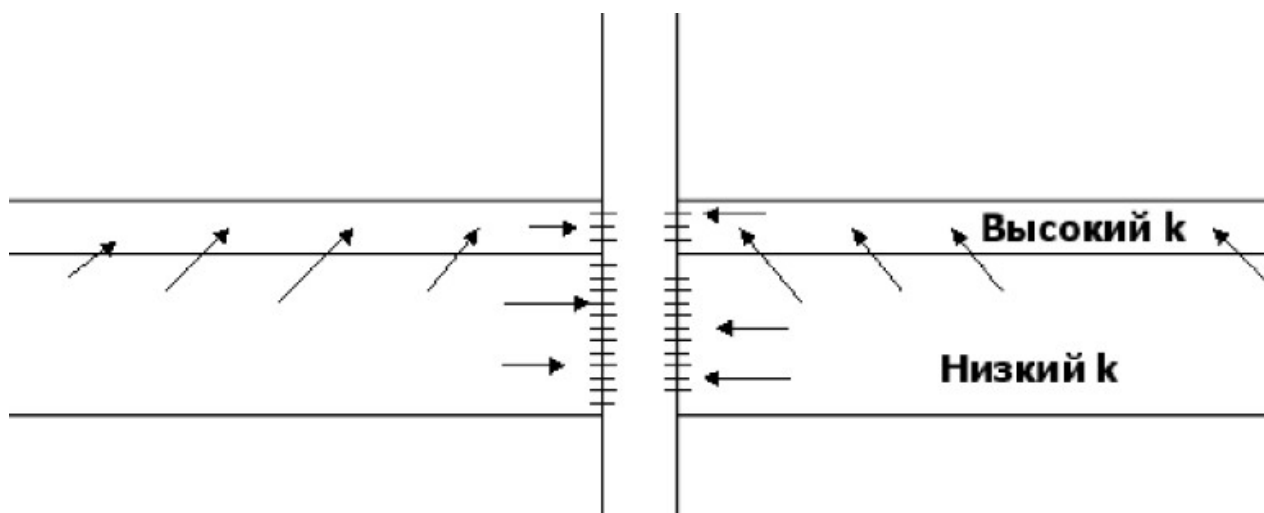


Рис. 1. Пример возможной схемы перетока флюидов в пласте по системе трещин в карбонатных нефтенасыщенных коллекторах позднего девона.

Следующей характерной особенностью карбонатных нефтенасыщенных коллекторов является высокая латеральная неоднородность. То есть на любом произвольно выбранном участке пласта такого месторождения свойства пласта коллектора могут меняться на несколько порядков от массивного плотного известняка с минимальным объемом пористости (2–4 %) и низкими значениями проницаемости (1–10 мД) до доломитизированного трещинного/кавернозного коллектора, подвергнувшегося выщелачиванию и растрескиванию в процессе формирования с пористостью до 17–20 % и проницаемостью несколько Дарси (рис. 2, 3).

Перечисленные особенности строения карбонатных коллекторов, как правило, являются причиной того, что промыслово-геофизические исследования скважин по определению профиля притока дают разную информацию о работающих толщинах в зависимости от режима, при котором исследуется скважина. Разница может достигать нескольких метров и связана с разной раскрытостью трещин в зависимости от забойного давления.

Наличие системы трещин в карбонатных коллекторах является причиной прорывов воды в скважины из подстилающих горизонтов, так как депрессия в скважинах распространяется не только по латерали, но и в выше- и нижележащие горизонты.

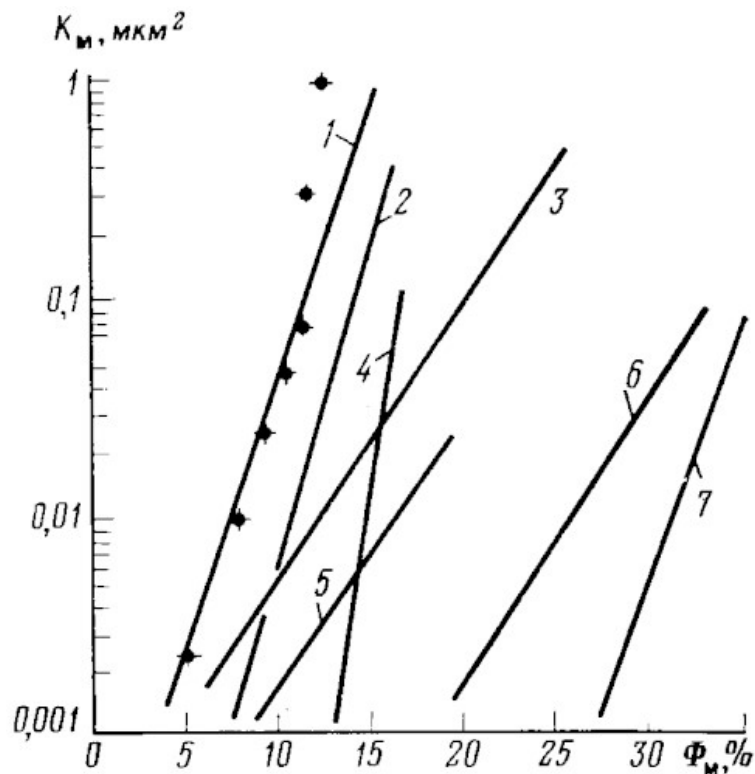


Рис. 2. График зависимости проницаемости матрицы от пористости для различных типов горных пород:

- 1 – рифовые известняки; 2 – оолитовые известняки; 3 – сахаровидные доломиты;
 4 – хорошо сцементированные песчаники; 5 – известняки и доломиты с межгранулярной пустотностью;
 6 – мелоподобные известняки; 7 – тонкозернистые песчаники [3]

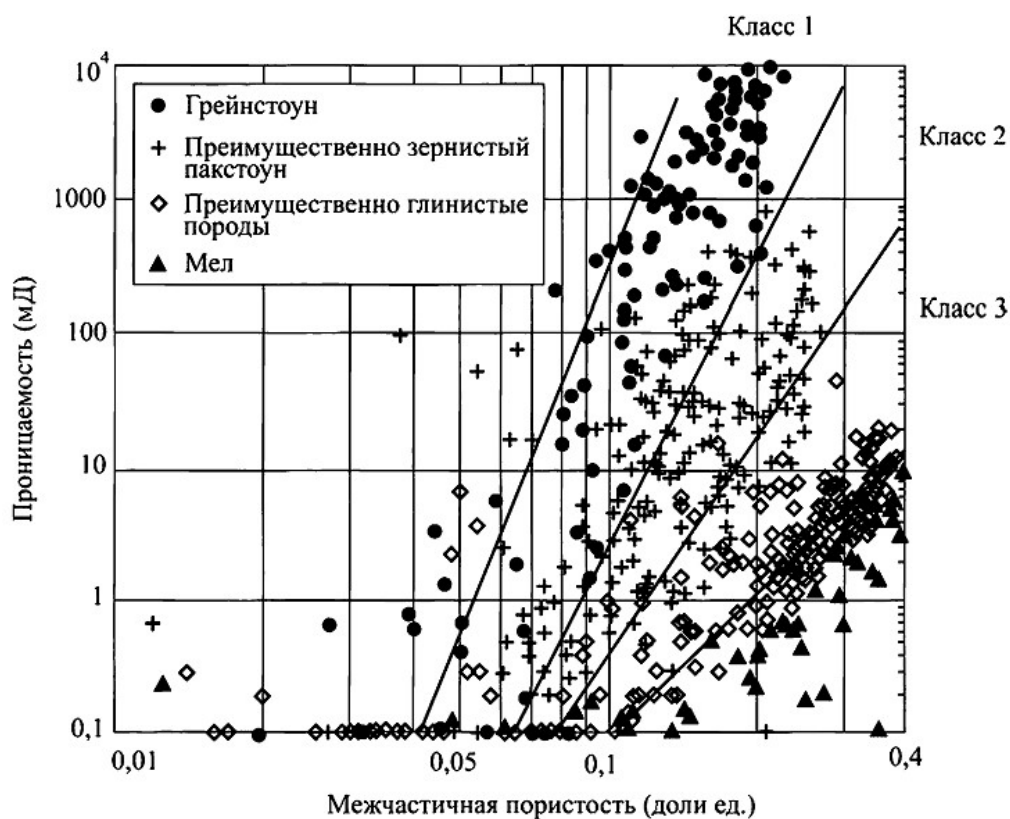


Рис. 3. Зависимости между пористостью и проницаемостью для кавернозных известняков на примере одного из месторождений [4]

Описание технологии гидродинамических исследований нефтенасыщенных коллекторов методом гидропрослушивания

Гидропрослушивание [5] при наличии определенных условий позволяет получить ответы на следующие вопросы:

- оценка степени участия матрицы карбонатного коллектора в процессе фильтрации;
- уточнение тектонического строения продуктивного горизонта (проводимость или непроницаемость разломов);
- уточнение объемов подвижных запасов нефти между удаленными скважинами и гидродинамической связи между отдельными структурами продуктивного пласта посредством определения параметра mh , где m – пористость, а h – толщина пласта, по которой происходит фильтрация жидкости.

Ответы на вопросы могут быть получены посредством решения следующих задач:

1. Установление взаимосвязи по пласту между скважинами. Выявление в пласте тектонических или литологических границ.
2. Уточнение типа коллектора. Оценка степени участия матрицы в фильтрации флюида.
3. Определение фильтрационных характеристик продуктивного пласта в окрестности возмущающей и реагирующей скважин.

Проведение исследований

В простаивающие реагирующие скважины за несколько дней до начала исследований спускаются глубинные манометры для регистрации фонового изменения давления.

В это время в окружающих скважинах, в том числе и в возмущающей, поддерживается постоянство режима работы. В возмущающей скважине периодически проводятся измерения дебита (расхода).

За продолжительность регистрации фонового изменения давления обычно принимается промежуток времени, равный половине всего времени исследований. При длительном времени регистрации кривых реагирования, порядка 10–15 суток и более, продолжительность наблюдения за фоновым изменением давления можно сократить до трети времени исследований.

Если возмущающей скважиной является скважина, работающая на постоянном режиме отбора, то ее останавливают или переводят на работу с большим или меньшим постоянным дебитом. Если для создания импульса выбрана простаивающая скважина, то ее пускают в работу с максимально возможным постоянным дебитом. В процессе исследований периодически проводятся измерения дебита возмущающей скважины.

Чтобы определить способ и необходимое время возмущения, оценить, достаточна ли величина дебита возмущающей скважины, следует провести оценочные расчеты по определению возможных величин изменения давления в реагирующей скважине (величин реакции). Расчеты проводятся по основной формуле упругого режима [2]:

$$\Delta p = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \left[- \operatorname{Ei} \left(- \frac{R^2}{4\alpha t} \right) \right] \quad (1)$$

где: Δp – изменение давления в реагирующей скважине (величина реакции); q – дебит (расход) возмущающей скважины; $\varepsilon = kh/\mu$ – гидропроводность пласта; k – проницаемость пласта; h – эффективная нефтенасыщенная толщина; μ – вязкость флюида в пластовых условиях; R – расстояние между реагирующей и возмущающей скважинами; α – пьезопроводность пласта; t – время с момента изменения режима работы возмущающей скважины; $\left[- \operatorname{Ei} \left(- \frac{R^2}{4\alpha t} \right) \right]$ – интегральная экспоненциальная функция.

Если возмущение пласта производится не путем остановки или пуска скважины, а лишь изменением дебита (расхода) на величину Δq , то для расчета реакции [1] в формулу (1) вместо дебита (расхода) возмущающей скважины подставляется величина Δq .

Оценочные расчеты позволяют получить графики расчетных изменений забойного давления в реагирующей скважине, по которым возможно оценить свойства пласта при наличии гидродинамической связи.

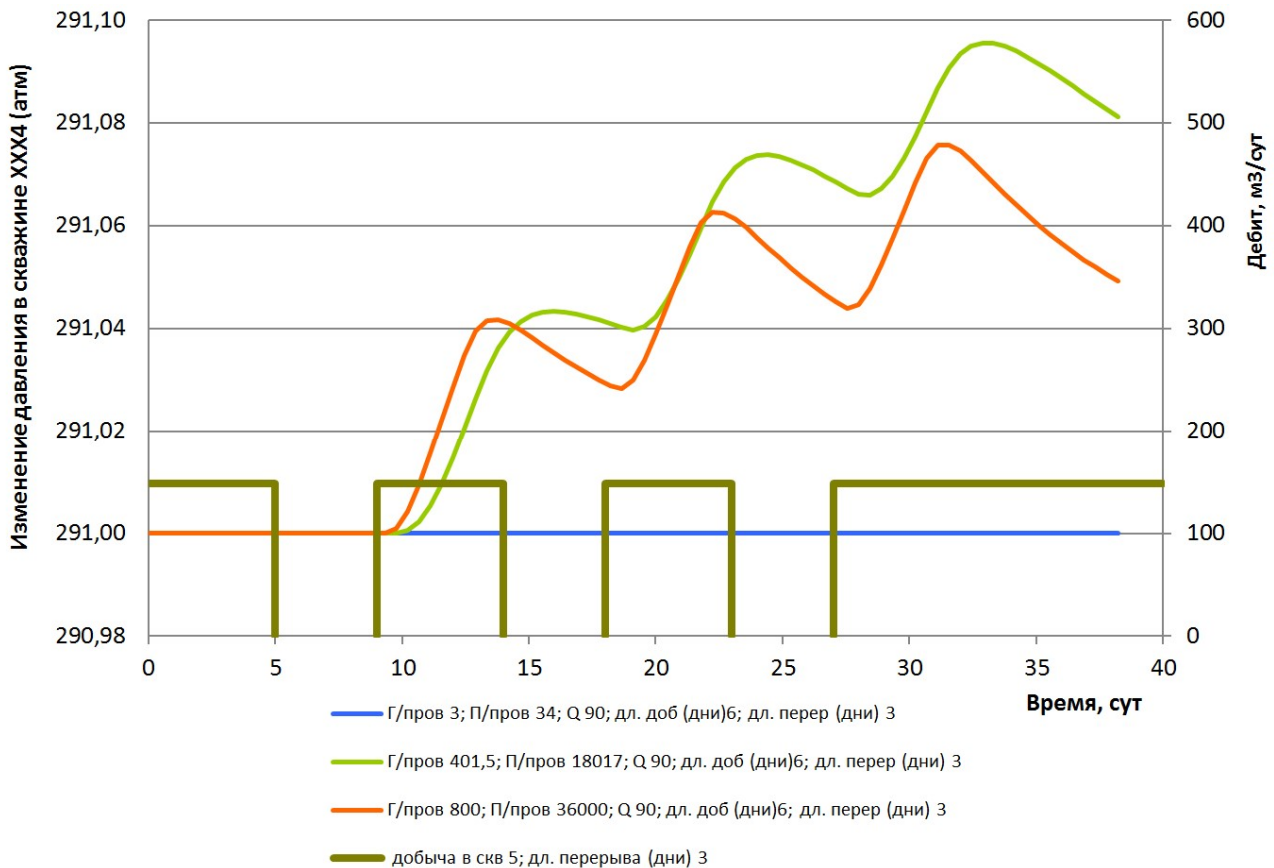


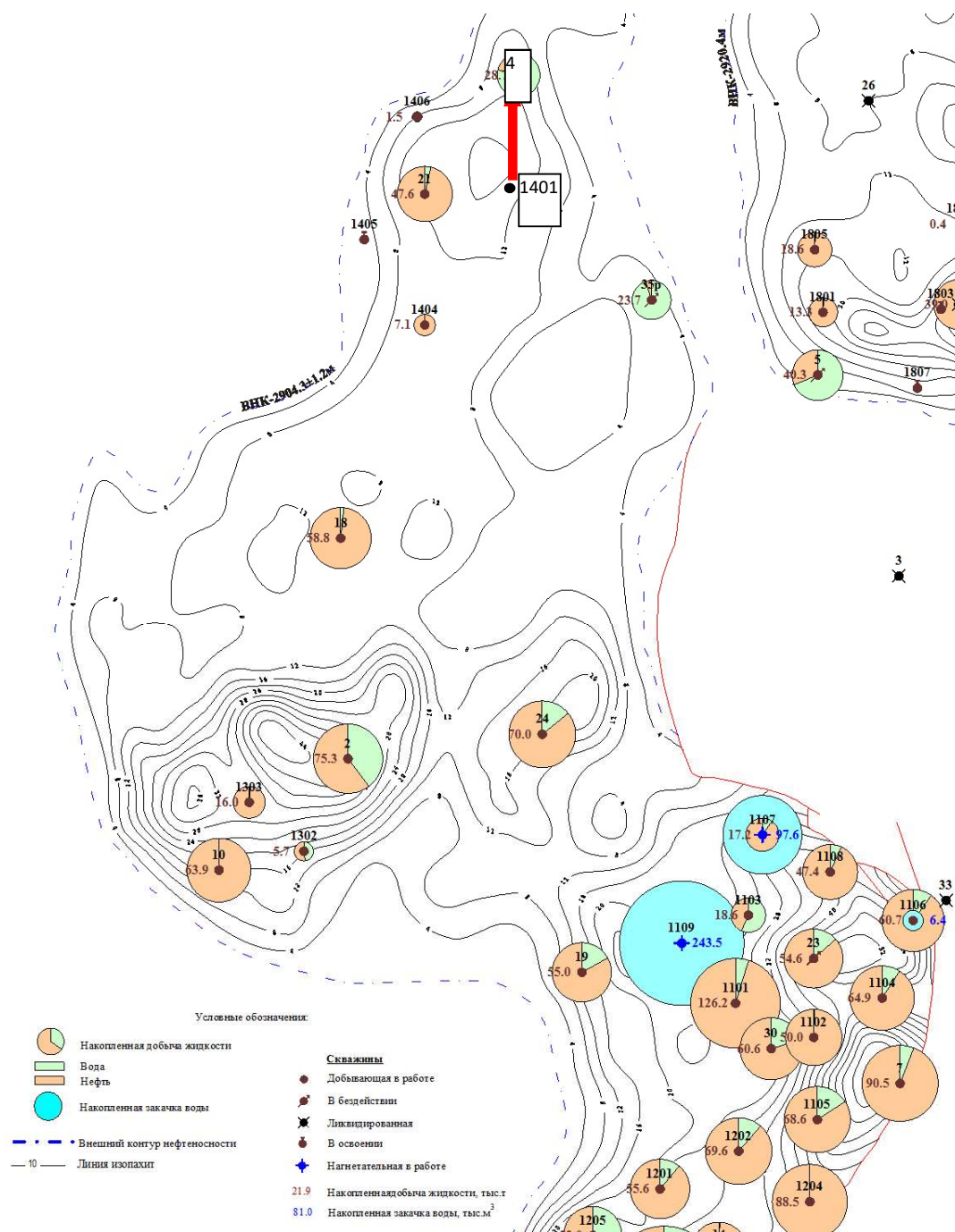
Рис. 4. Пример расчетных кривых реагирования в скв. XXX4 при возмущении в скв. XY01.
(Единицы измерения гидропроводности – $D^* \text{см/спз}$; пьезопроводности – $\text{см}^2/\text{сек}$)

При получении расчетных изменений давления, аналогичных по виду графику на рис. 4, как правило, принимается решение о целесообразности выполнения исследований.

Пример гидродинамических исследований нефтенасыщенных коллекторов методом гидропрослушивания

Далее приведен пример, иллюстрирующий ограничения метода гидропрослушивания для определения свойств пласта коллектора и позволяющий получить преимущественно качественные результаты, нежели количественные.

По одному из месторождений нефти в карбонатных трещиноватых коллекторах позднедевонского возраста проводились исследования с целью установить параметры пласта между скважинами № 4 и № 1401. Область исследования обозначена красной стрелкой на рис. 5. Необходимое время исследований согласно приведенному выше описанию технологии расчета составило 30 суток. По причинам производственного характера общее время исследований составило более 60 суток. Технологическая схема исследований приведена на рис. 6.



**Рис. 5. Участок месторождения нефти
в карбонатных трещиноватых коллекторах позднего Девона.**

Анализ графика на рис № 6 показал, что до начала создания в скважине № 1401 возмущающего импульса давления имело место изменение режимов работы водонагнетательных скважин № 1107 и № 1109, отстоящих от скважины № 4 (в которой регистрировались изменения давления) на 7 км. Этот факт позволил произвести оценку свойств пласта не только между скважинами № 4 и № 1401, но и на пространстве между скважинами № 1401, 1107, 1109. Оценка средних фильтрационно-емкостных свойств пласта производилась посредством выполнения нескольких расчетных этапов, производившихся на модели, созданной в программном модуле Sapphire (KAPPA Engineering). Первым этапом моделировалось изменение давления, регистрируемое в скважине № 4 как реакция на остановку нагнетания в скважины № 1107 и № 1109 (рис. 7).

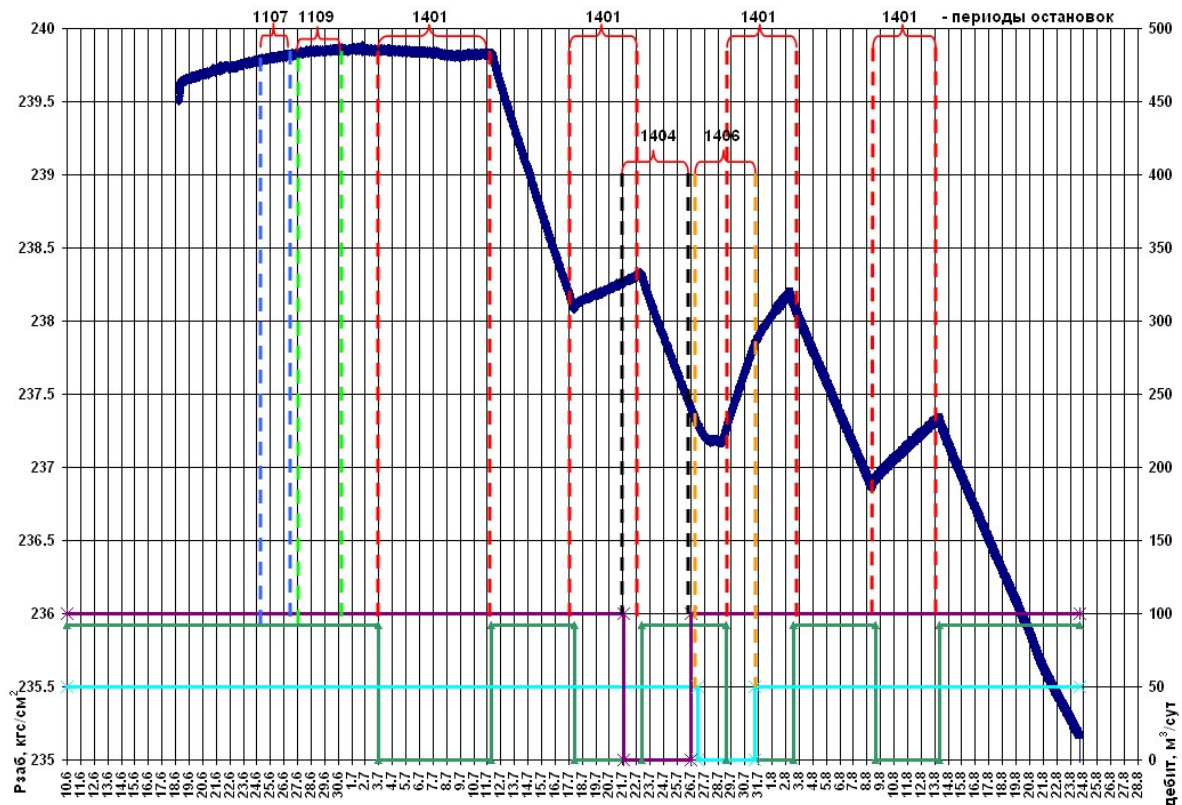


Рис. 6. Технологическая схема гидродинамических исследований методом гидропрослушивания между скважинами 4, 1401, 1107 и 1109. Давление в скважине №4. Период исследований 18.06-23.08.2012

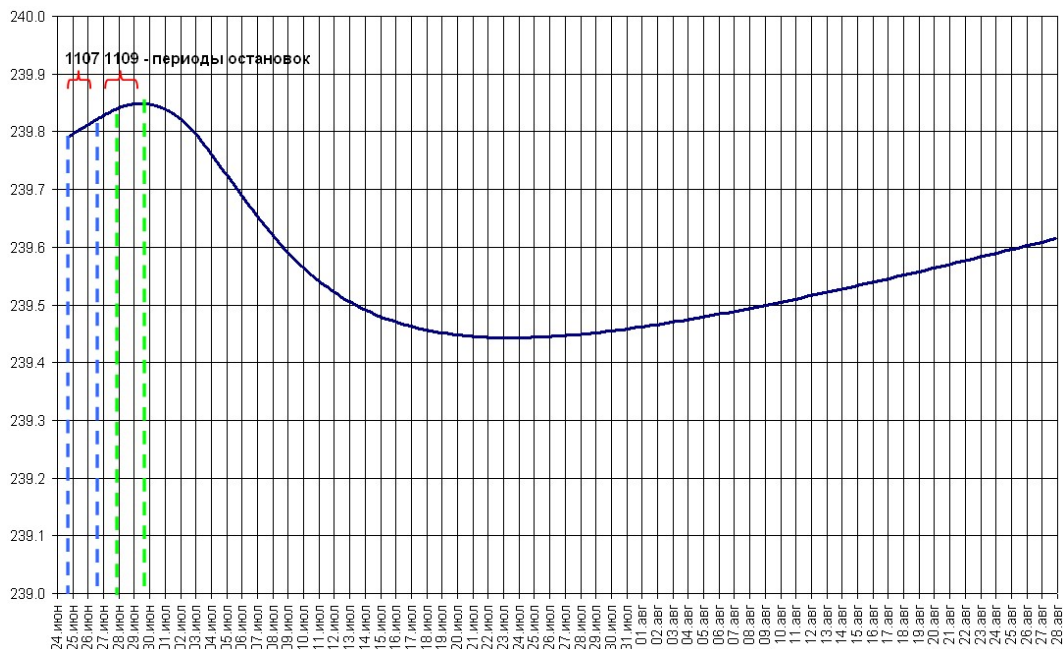


Рис. 7. Смоделированное фоновое забойное давление в скважине № 4 (сплошная синяя линия) при остановке скважин 1107 и 1109. Период исследований 18.06–23.08.2012

Следующим этапом проводилось моделирование изменения давления, зарегистрированного в скважине № 4, с учетом влияния изменения режимов нагнетательных и добывающих скважин (рис. 8). График изменения давления в целом довольно точно воспроизводит картину, зарегистрированную глубинным манометром в скважине № 4.

В табл. 1 приведены результаты интерпретации гидродинамических исследований методом гидропрослушивания между скважинами № 4 и № 1401, а также на участке между скважинами № 4 и водосбросными скважинами № 1107 и № 1109.

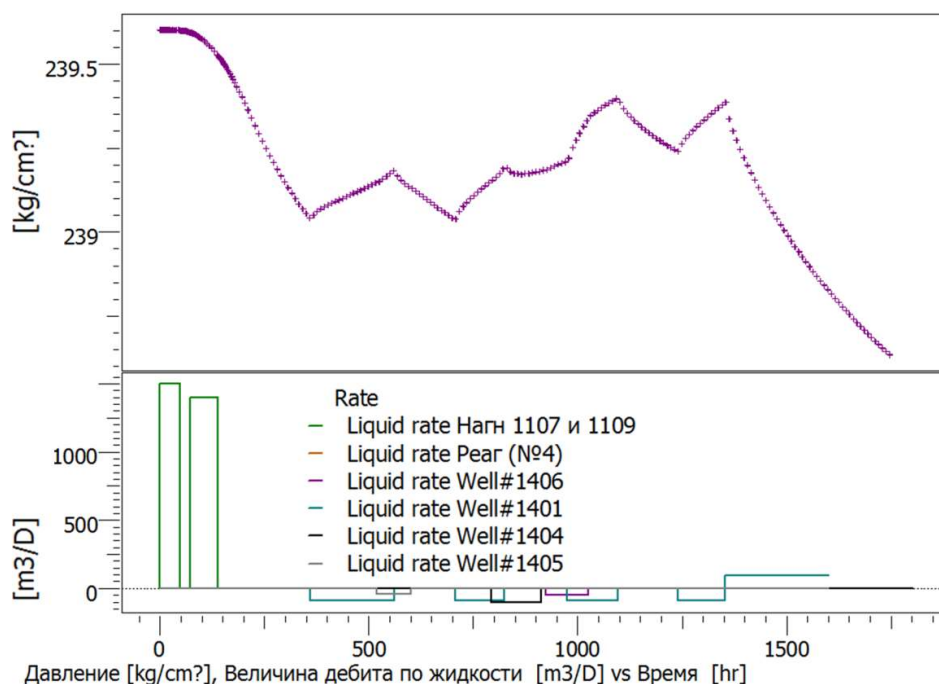


Рис. 8. Смоделированное фоновое забойное давление в скважине № 4 при остановке скважин 1107 и 1109, а также при работе скважин № 1406, 1401, 1404 и 1405. Период исследований 18.06–23.08.2012

Для пары скважин № 4 и № 1401 работающая мощность пласта, по которой происходила передача импульса давления, может составлять от 11 до 15 метров (при общей мощности нефтенасыщенных и подстилающих водонасыщенных коллекторов до 150 метров). Данный интервал выбран в связи с тем, что не представляется возможным достоверно установить характер насыщенности в пространстве между скважинами.

Для участка месторождения между скважиной № 4 и водосбросными № 1107 и № 1109 наиболее вероятно, что сигнал проходил по водонасыщенной части пласта. Это обусловлено тем, что скважина № 4 полностью обводнена, а сбрасываемая вода нагнетается в водоносный горизонт и вероятнее всего поднимается к продуктивному горизонту по трещинам.

Таблица 1

Результаты интерпретации гидропрослушивания

Пара скважин	4–1401
Гидропроводность, $D^* \text{см/спз}$	83
Пьезопроводность, $\text{см}^2/\text{сек}$	3 850
Работающая мощность пласта, м	11–15
Зона между скважинами	4–1107:1109
Гидропроводность, $D^* \text{см/спз}$	131
Пьезопроводность, $\text{см}^2/\text{сек}$	9 780

Проведенные исследования, включающие гидропрослушивание между двумя парами скважин, показали, что район 4-го куста и участок месторождения между 4-м кустом и водосбросными скважинами 1107 и 1109 является единым гидродинамическим объектом (происходит передача изменений давления в пласте), несмотря на сброс воды на 120 метров глубже нефтеносного пласта D3fm III–IV в пласт D3fm II.

Заключение. Гидропрослушивание месторождений нефти с карбонатными нефтенасыщенными коллекторами носит преимущественно качественный характер и, соответственно, параметры, определяемые посредством этого метода исследований, носят оценочный характер:

1. Рассчитанные гидропроводность и пьезопроводность на участке между скважинами № 4, 1401, 1107, 1109 показывают только некие средние значения для пространства с размерами по одной из осей 7 км.

2. Рассчитанная мощность, по которой происходила передача изменений давления между водосбросными скважинами № 1107, 1109 и реагирующей скважиной № 4, как минимум в 10 раз меньше толщины пород, имеющих коллекторские свойства и вскрытых скважинами. Это означает, что передача изменений давлений в пласте на 7 км происходила преимущественно по системе трещин, пронизывающих большую часть объема коллекторов месторождения.

3. Наличие высокопроницаемых трещин исключает возможность точного определения по результатам гидропрослушивания нефтенасыщенных мощностей, по которым могли бы передаваться изменения давления. Даже в случае отбора жидкости из скважин, работающих чистой нефтью, передача изменений давления идет в том числе через водонасыщенные подстилающие толщи.

Работа выполнена при поддержке Программы ФНИ государственных академий наук на 2013–2020 г., проект № 0065-2018-0118.

Литература

1. Вольпин С. Г., Мясников Ю. А., Ефимова Н. П., Свалов А. В. «TESTAR – пакет программ для обработки материалов гидродинамических исследований нефтегазоводоносных пластов» // Нефт. хоз-во. 2002. № 5. С. 58–60.
2. Басниев К. С. Подземная гидравлика. М. : Недра, 1986. 303 с.
3. Голф-Рахт Т. Д. Основы нефтепромысловой геологии и разработки трещиноватых коллекторов. М. : Недра, 1986. 608 с.
4. Лусиа Ф. Дж. Построение геолого-гидродинамической модели карбонатного коллектора: интегрированный подход. М. : Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» ; Ижев. ин-т компьютер. исслед., 2010. 384 с.
5. Деева Т. А., Камартдинов М. Р., Кулагина Т. Е., Мангазеев П. В., Панков М. В. Гидродинамические исследования скважин. Томск : ТПУ, 2004. 340 с.
6. Бузинов С. Н. Умрихин И. Д. Исследование нефтяных и газовых скважин и пластов М. : Недра, 1984. 269 с.
7. Кременецкий М. И., Ипатов А. И., Гуляев Д. Н. Информационное обеспечение и технологии гидродинамического моделирования нефтяных и газовых залежей. Ижевск : ИКИ, 2011. 896 с.
8. Чодри А. Гидродинамические исследования нефтяных скважин М. : Премиум Инжиниринг, 2011. 687 с.

УДК 519.23

ПОЛУЧЕНИЕ РАЗРЕЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ D-ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ ИСХОДНОЙ ВЫБОРКИ НА ОБУЧАЮЩУЮ И ТЕСТОВУЮ ЧАСТИ И КРИТЕРИЯ РЕГУЛЯРНОСТИ

А. А. Попов, Ш. А. Бобоев

Новосибирский государственный технический университет

a.popov@corp.nstu.ru, shboboev@mail.ru

В работе рассмотрены способы получения разреженного решения на основе метода LS-SVM. Для получения разреженного решения используются обучающие выборки, формируемые по схеме D-оптимального планирования эксперимента. Приводится также алгоритм формирования тестовой выборки с использованием критерия регулярности. Для проверки эффективности предлагаемых методов формирования обучающей выборки проведен вычислительный эксперимент с использованием модельных данных. Повышение обобщающих свойств моделей, полученных по LS-SVM, проводилось через подбор параметра гауссовой ядерной функции при минимизации ошибки прогноза. Параметр ядерной функции подбирался по минимуму внешних критериев. В качестве внешних критериев оценки качества моделей использовались критерий скользящего контроля и критерий регулярности. Эффективность получаемых решений оценивалась по среднеквадратичной ошибке. Дисперсия помехи (уровень шума) при моделировании данных задавалась в процентах от мощности сигнала. По итогам полученных результатов сделаны выводы, что для получения разреженного решения можно использовать обучающую выборку, полученную с использованием D-оптимального разбиения, а также дополнительную оптимизацию состава точек (алгоритм замены), которая в ряде случаев позволяет получать лучшие решения.

Ключевые слова: регрессионная модель, метод LS-SVM, ядерная функция, квадратичная функция потерь, D-оптимальный план, критерий скользящего контроля, среднеквадратичная ошибка.

OBTAINING OF SPARSE SOLUTIONS WITH D-OPTIMAL PARTITIONING OF ORIGINAL SAMPLE INTO TRAINING AND TEST PARTS AND REGULARITY CRITERION

A. A. Popov, Sh. A. Boboev

Novosibirsk State Technical University

a.popov@corp.nstu.ru, shboboev@mail.ru

The article considers the methods of obtaining sparse solutions based on the LS-SVM method. The training samples generated according to the D-optimal experiment design are used for obtaining a sparse solution. An algorithm for forming a test sample using the regularity criterion is also presented. A computational experiment is conducted to check the efficiency of the proposed methods of forming a training sample. The artificial data is used for this purpose. The improvement of the generalizing properties of the models obtained by LS-SVM is carried out through the selection of the Gaussian kernel function parameter while minimizing the prediction error. The kernel function parameter is chosen according to the minimum of external criteria. The criteria of cross-validation and regularity are used as external criteria for assessing the quality of models. The effectiveness of the obtained solutions is estimated by mean square error. The noise variance (noise level) is set as a percentage of the signal power during the data modeling. According to the results, conclusions are made that to receive a sparse solution it is possible to use a training sample, obtained with the use of D-optimal split. The additional optimization of the composition of points (exchange algorithm) is possible to use as well, which in some cases allows getting the best solutions.

Keywords: regression model, LS-SVM method, kernel function, quadratic loss function, D-optimal design, cross-validation criterion, mean square error.

Введение. В настоящее время для построения регрессии предложено несколько модификаций алгоритма опорных векторов [1–2]. При этом все большую популярность приобретает алгоритм опорных векторов на основе квадратичной функции потерь (LS-SVM) [1]. Однако его применение требует решения задачи по настройке его ряда внутренних параметров. Эвристический подход по априорному их выбору описан в [3]. Подбор этих параметров можно также осуществлять через минимизацию критерия скользящего контроля [4–8].

При использовании классического SVM имеется возможность построения разреженных решений. Разреженное решение характеризуется тем, что в аддитивном его разложении по ядерным функциям задействуются не все точки выборки. Это достигается за счет использования функции потерь ε -нечувствительности Вапника. Построение разреженных решений особенно важно в случае выборок больших объемов. Стоит заметить, что при использовании линейной и полиномиальной ядерных функций проблем с компактным представлением модели не возникает. Для этих функций всегда можно вернуться в исходное пространство данных и в результате получить сжатую форму представления модели. В то же время при использовании, например, ядерной функции Гаусса сделать это не удастся. Модель в этом случае записывается в виде суммы ядер. Максимальное число ядер может быть равно числу наблюдений в выборке. Можно поставить задачу по сокращению числа слагаемых в этой сумме ядер. При ее решении мы будем получать так называемое разреженное решение.

При использовании метода SVM с квадратичной функцией потерь для получения разреженных решений приходится прибегать к специальным приемам. Например, для их получения можно воспользоваться подходом, предложенным в работе [9]. Основная идея при этом состоит в отбрасывании точек выборки, для которых параметры в аддитивном разложении решения по ядерным функциям имеют малые по модулю значения. Другим подходом в получении разреженных решений может быть разбиение имеющейся выборки на обучающую и тестовую части. При этом обучающая часть и составит выборку, по которой будут вычисляться решения. По отношению к полной выборке эти решения будут разреженными. Получаемая тестовая выборка может быть использована для вычисления на ней критериев качества решений, по которым можно вести настройку параметров алгоритма. Эти критерии, связанные с точностью прогноза на тестовой выборке, относятся к классу внешних критериев [10–12]. Формирование обучающей и тестовой части выборки можно проводить по процедуре планирования эксперимента [13–14].

Рассмотрим возможность получения разреженных решений посредством формирования обучающей части выборки с привлечением методов оптимального планирования эксперимента.

Разреженное решение по методу LS-SVM

Предположим, у нас имеется обучающая выборка $D_n = \{(x_k, y_k) : x_k \in X, y_k \in Y; k=1, \dots, n\}$ объема n наблюдений вида:

$$y_k = m(x_k) + e_k, k=1, \dots, n,$$

где ошибка $e_k \in R$ имеет характеристики $E[e_k | x = x_k] = 0$ и $Var[e_k] = \sigma^2 < \infty$, $m(x)$ – неизвестная действительная гладкая функция и $E[y_k | x = x_k] = m(x_k)$. Нас будет интересовать аппроксимация $m(x)$ в виде $f(x) = \omega^T \varphi(x) + b$. Предположим, что исходная выборка наблюдений W разбита на обучающую и тестовую части, и обозначим их через A и B . Соответственно, через

n_A обозначим объем обучающей выборки, а через n_B – объем тестовой выборки. Координаты точек обучающей и тестовой выборок будем обозначать через x и z . Для получения решения по методу LS-SVM составляем СЛАУ вида:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1_{n_A}^T \\ 1_{n_A} & \Omega_A + \frac{1}{\gamma} I_{n_A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{\alpha}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y_A \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $y_A = (y_1, \dots, y_{n_A})^T$ – точки из обучающей выборки, $1_{n_A} = (1, \dots, 1)^T$, $\hat{\alpha}_A = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_{n_A})$ и $\Omega_{kl} = \varphi(x_k)^T \varphi(x_l)$, $k, l = 1, \dots, n_A$; γ – параметр регуляризации.

Решив СЛАУ вида (1), получим результирующую разреженную LS-SVM модель, имеющую вид:

$$\hat{y}(x) = \sum_{k=1}^{n_A} \hat{\alpha}_k K(x, x_k) + \hat{b},$$

где $K(x, x_k)$ – ядро скалярного произведения,

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \frac{1_{n_A}^T \left(\Omega_A + \frac{1}{\gamma} I_{n_A} \right)^{-1} y_A}{1_{n_A}^T \left(\Omega_A + \frac{1}{\gamma} I_{n_A} \right)^{-1} 1_{n_A}}, \\ \hat{\alpha}_A &= \left(\Omega_A + \frac{1}{\gamma} I_{n_A} \right)^{-1} (y_A - 1_{n_A} \hat{b}). \end{aligned}$$

Выбор обучающей части выборки для метода LS-SVM с помощью D -оптимального планирования эксперимента

Для построения дискретного D -оптимального плана будем использовать описанные в работе [15] алгоритмы.

Через G_s обозначим матрицу, имеющую размер $s \times s$ для обучающей выборки объемом в s наблюдений, который состоит из элементов $(G_s)_{ij} = K(x_i, x_j) + \frac{1}{\gamma} I_s$, $i, j = 1, \dots, s$.

Матрица G_{s+1} на $s+1$ шаге принимает вид:

$$G_{s+1} = \begin{pmatrix} G_s & F(x_{s+1}) \\ F^T(x_{s+1}) & K(x_{s+1}, x_{s+1}) + \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix},$$

где $F^T(x_{s+1}) = (K(x_1, x_{s+1}), K(x_2, x_{s+1}), \dots, K(x_s, x_{s+1}))$.

Для вычисления определителя окаймленной матрицы воспользуемся формулой $|G_{s+1}| = |G_s| * \Delta(x_{s+1})$, где $\Delta(x_{s+1}) = [K(x_{s+1}, x_{s+1}) + \frac{1}{\gamma} - F^T(x_{s+1}) G_s^{-1} F(x_{s+1})]$.

Таким образом, поиск очередной точки, которую будем включать в обучающую вы-

борку, выполняем по следующей схеме: $x_{s+1} = \underset{x}{\operatorname{Argmax}} \Delta(x)$. Подробно данный алгоритм разбиения выборки на части приведен в работе [14].

В алгоритме используется матрица G_s , элементы которой зависят от параметров используемых ядерных функций. Очевидно, что перед проведением процедуры D -оптимального разбиения, эти параметры необходимо как-то оценить. Можно пойти по традиционному пути, используя критерий контроля по отдельным объектам (Leave-One-Out, LOO).

Важно также, чтобы получаемое разреженное решение не имело какого-либо смещения. В вычислительном эксперименте удобным критерием контроля точности получаемых моделей является среднеквадратичная ошибка предсказания MSE:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u_i - \hat{y}_i)^2,$$

где $u_i, \hat{y}_i, i=1, \dots, n$ соответственно незашумленное и оцененное по модели значение отклика.

Получение обучающей части выборки с помощью критерия регулярности

Предлагаемый выше метод получения разреженного решения предполагает использование обучающей выборки, свойства которой обеспечивают получение на ней решения, обеспечивающего наименьшую дисперсию предсказания на тестовой части выборки. Можно пойти по-другому пути, формируя обучающую выборку через минимизацию ошибки прогноза на тестовой выборке. Ошибка прогноза на тестовой выборке в литературе еще известна как критерий регулярности

$$\Delta^2 = (y_B - \hat{y}_B)^T (y_B - \hat{y}_B) / n_B,$$

где $\hat{y}_B = \Phi_B \hat{\alpha}_A + \hat{b}_A$ – прогнозные значения по модели, оцененной на обучающей выборке. Критерий регулярности может быть также задействован в рассмотренном выше алгоритме разбиения выборки по процедуре D -оптимального планирования эксперимента на заключительном этапе при уточнении внутренних параметров алгоритма LS-SVM.

Для получения разреженного решения на основе обучающей части выборки и критерия регулярности рассмотрим следующие алгоритмы.

Вариант включения:

1. Предварительное оценивание параметра ядерной функции с использованием критерия LOO.
2. Выполняем последовательную схему наращивания объема обучающей выборки до необходимого объема. Добавляемая в обучающую часть точка выбирается по минимуму критерия Δ^2 . Целесообразно периодически перенастраивать внутренние параметры LS-SVM.

Вариант исключения:

1. Предварительное оценивание параметра ядерной функции с использованием критерия LOO.
2. Выполняем последовательную схему наращивания объема тестовой выборки. Добавляемая в тестовую часть точка выбирается по минимуму критерия Δ^2 . Оставшиеся точки образуют обучающую выборку. Целесообразно периодически перенастраивать внутренние параметры LS-SVM. Новое значение параметров LS-SVM выбираем в том случае, если удастся при нем улучшить значение критерия Δ^2 .

Вариант замены:

1. Предварительное оценивание параметра ядерной функции с использованием критерия LOO.
2. Выполняем D -оптимальное разбиение исходной выборки на обучающую и тестовую части. Далее выполняем поиск оптимальных значений внутренних параметров LS-SVM

по критерию Δ^2 .

3. Оптимизация состава обучающей выборки. На этом шаге точки из обучающей выборки поочередно заменяем точками тестовой выборки. При этом вычисляем критерий регулярности. В случае если замена привела к улучшению данного критерия, оставляем ее в силе, если удачных замен нет – останов.

4. Выполняем поиск оптимальных значений внутренних параметров LS-SVM по критерию Δ^2 , обучаясь на выборке, полученной на шаге 3.

Данный алгоритм позволяет уточнить состав точек обучающей выборки, которая была получена по процедуре D -оптимального планирования эксперимента.

Вычислительный эксперимент

Вычислительный эксперимент проводился с целью сравнения качества разреженных решений, получаемых по различным алгоритмам.

Тестовая функция вида: $m(x) = 7 / e^{(x+0.75)^2} + 3x$, заданная на отрезке $[-1; 1]$, была использована для проведения исследований. В качестве ядерной функции использовалось Гауссово ядро. Нормально распределенные величины были использованы в качестве помехи. Уровень помехи задавался в пределах от 5 % до 25 % от мощности полезного сигнала. Число наблюдений задавалось равным 10, 20, 30 и 50. Параметр регуляризации в LS-SVM фиксировался на уровне 10. Лучшее решение подбиралось по параметру масштаба Гауссового ядра на интервале от 10^{-5} до 10^0 по сетке с шагом 0,1.

В таблице приведены значения среднеквадратичной ошибки. В строках «без разбиения» указаны значения MSE для неразреженных решений, полученных на полных выборках. Настройка параметров ядерных функций в этом случае проводилась по критерию LOO.

Таблица

Среднеквадратичная ошибка предсказания при 20 %-м уровне шума

Объем выборки	Вариант разбиения	Размер тестовой части выборки (%)									
		5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
N = 10	без разбиения	0,0367	0,0367	0,0367	0,0367	0,0367	0,0367	0,0367	0,0367	0,0367	0,0367
	D-опт. план	0,0944	0,0944	0,0944	0,0944	0,0685	0,0685	0,0192	0,0192	0,0193	0,0193
	замена	0,0944	0,0944	0,0944	0,0944	0,0685	0,0685	0,0198	0,0198	0,0298	0,0298
	исключение	0,3155	0,3155	0,0944	0,0944	0,0685	0,0685	0,0192	0,0192	0,0193	0,0193
	включение	0,3155	0,3155	0,0944	0,0944	0,0685	0,0685	0,0258	0,0258	0,0193	0,0193
N = 20	без разбиения	0,0079	0,0079	0,0079	0,0079	0,0079	0,0079	0,0079	0,0079	0,0079	0,0079
	D-опт. план	0,0182	0,0277	0,0277	0,0099	0,0138	0,0079	0,0099	0,0119	0,0116	0,0148
	замена	0,0170	0,0170	0,0277	0,0182	0,0182	0,0138	0,0182	0,0148	0,0182	0,0182
	исключение	0,0110	0,0277	0,0277	0,0099	0,0138	0,0079	0,0099	0,0119	0,0116	0,0148
	включение	0,0182	0,0182	0,0182	0,0182	0,0182	0,0182	0,0182	0,0182	0,0138	0,0148
N = 30	без разбиения	0,0021	0,0021	0,0021	0,0021	0,0021	0,0021	0,0021	0,0021	0,0021	0,0021
	D-опт. план	0,0034	0,0157	0,0024	0,0020	0,0020	0,0020	0,0042	0,0034	0,0034	0,0034
	замена	0,0034	0,0157	0,0157	0,0020	0,0020	0,0020	0,0042	0,0042	0,0042	0,0042
	исключение	0,0034	0,0157	0,0024	0,0020	0,0020	0,0020	0,0042	0,0034	0,0034	0,0034
	включение	0,0068	0,0068	0,0068	0,0068	0,0068	0,0068	0,0068	0,0053	0,0053	0,0053
N = 50	без разбиения	0,0021	0,0021	0,0021	0,0021	0,0021	0,0021	0,0021	0,0021	0,0021	0,0021
	D-опт. план	0,0028	0,0039	0,0023	0,0039	0,0051	0,0051	0,0068	0,0021	0,0051	0,0021
	замена	0,0031	0,0039	0,0100	0,0039	0,0051	0,0068	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022
	исключение	0,0028	0,0039	0,0023	0,0039	0,0051	0,0051	0,0068	0,0021	0,0051	0,0021
	включение	0,0020	0,0022	0,0020	0,0022	0,0022	0,0022	0,0024	0,0023	0,0020	0,0022

Можно сравнивать между собой неразрезанное решение и наполовину разреженное при 50 %-й тестовой части. Видно, что получаемые разреженные решения при D -оптимальном разбиении выборки лишь немногим проигрывают неразрезанному по величине MSE. При этом, если использовать вариант разбиения на основе критерия регулярности, то улучшения качества решения с позиции MSE чаще всего не наблюдается. Это позволяет говорить о том, что для получения разреженного решения можно использовать обучающую выборку, полученную с использованием D -оптимального разбиения ее на части. Вместе с тем включение дополнительной оптимизации состава точек (см. алгоритм «замена») позволяет в ряде случаев получать лучшие решения.

Заключение. В работе для получения разреженного решения на основе метода LS-SVM предложены различные способы получения обучающей части выборки. По результатам проведенных вычислительных экспериментов для получения разреженных решений можно рекомендовать использование обучающей выборки, которая может быть получена, в том числе по процедуре D -оптимального планирования эксперимента. При этом окончательную настройку внутренних параметров метода LS-SVM можно осуществлять, ориентируясь на величину ошибки на тестовой части выборки.

Литература

1. Suykens J. A. K., Van Gestel T., De Brabanter J., De Moor B., Vandewalle J. Least Square Support Vector Machines. New Jersey ; London ; Singapore ; Hong Kong : World Scientific, 2002. 290 p.
2. Vapnik V. Statistical Learning Theory. New York : John Wiley, 1998. 736 p.
3. Cherkassky V., Ma Y. Practical selection of SVM parameters and noise estimation for SVM regression // Neural Networks. 2004. № 17. P. 113–126.
4. Попов А. А., Саутин А. С. Определение параметров алгоритма опорных векторов при решении задачи построения регрессии // Сб. науч. тр. НГТУ (Новосибирск). 2008. № 2 (52). С. 35–40.
5. Popov A. A., Sautin A. S. Selection of support vector machines parameters for regression using nested grids // The Third International Forum on Strategic Technology (Novosibirsk), 2008. P. 329–331.
6. Mao W., Mu X., Zheng Y., Yan G. Leave-one-out cross-validation-based model selection for multi-input multi-output support vector machine // Neural Computing and Application. 2014. № 2 (24). P. 441–451.
7. Rivas-Perea P., Cota-Ruiz J., Rosiles J.-G.. A nonlinear least squares quasi-Newton strategy for LP SVR hyper-parameters selection // International Journal of Machine Learning and Cybernetics. 2014. № 4 (5). P. 579–597.
8. Gupta A. K., Guntuku S. C., Desu R. K., Balu A. Optimisation of turning parameters by integrating genetic algorithm with support vector regression and artificial neural networks // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. 2015. № 1–4 (77). P. 331–339.
9. Suykens A. K., De Brabanter J., Lukas L., Vandewalle J. Weighted least squares support vector machines: robustness and sparse approximation // Neurocomputing. 2002. Vol. 48. P. 85–105.
10. Степашко В. С., Кочерга Ю. Л. Методы и критерии решения задач структурной идентификации // Автоматика. 1985. № 5. С. 29–37.
11. Сарычев А. П. Усредненный критерий регулярности метода группового учета аргументов в задаче поиска наилучшей регрессии // Автоматика. 1990. № 5. С. 28–33.
12. Степашко В. С. Асимптотические свойства внешних критериев выбора моделей // Автоматика. 1988. № 6. С. 75–82.
13. Попов А. А. Разбиение выборки для внешних критериев селекции моделей с использованием методов планирования эксперимента // Заводская лаборатория. 1997. № 1. С. 49–53.

14. Попов А. А., Бобоев Ш. А. Получение тестовой выборки в методе LS-SVM с использованием оптимального планирования эксперимента // Науч. вестн. Новосиб. гос. технич. ун-та. 2016. № 4. С. 80–99.

15. Попов А. А. Последовательные схемы построения оптимальных планов эксперимента // Сб. науч. тр. НГТУ (Новосибирск). 1995. Вып. 1. С. 39–44.

УДК 691.11: 51-74

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛИТ ПОКРЫТИЙ ИЗ ДРЕВЕСИНЫ И КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ ТЕОРИИ

Г.Л. Горынин, Ю.И. Григорьев

Сургутский государственный университет, grigoriev-1991@mail.ru

Представлена математическая модель плиты покрытия из разномодульного композитного материала, получены аналитические формулы для напряжений и перемещений для случая изгиба плиты для разномодульного материала. Рассмотрен пример расчета плиты покрытия.

Ключевые слова: деревянные композитные конструкции, моделирование изгиба разномодульных материалов, клеенные плиты покрытия, разномодульная теория, модуль упругости древесины и однонаправленного клеенного шпона.

MODELING OF ROOF SLABS FROM WOOD AND COMPOSITE MATERIALS ON THE BASIS OF THE DIFFERENT-MODULUS THEORY

G.L. Gorynin, Y.I. Grigoryev

Surgut State University, grigoriev-1991@mail.ru

A mathematical model of a roof slab of made of a different-modulus composite material is presented, analytical formulas for stresses and displacements are obtained for the case of bending a slab for a different-modulus material. An example of calculating a roof slab is considered.

Keywords: wooden composite structures, modeling of bending of different-modulus materials, glued roof slabs, a different-modulus theory, modulus of elasticity of wood and Laminated Veneer Lumber.

Введение

Клеенные панели покрытия из древесины и композитных материалов на основе древесины относятся к облегченным конструкциям индустриального изготовления. Их используют в зданиях с наружным отводом воды с кровли, в отапливаемых зданиях при относительной влажности воздуха в помещениях до 75% и в неотапливаемых при расчетной температуре наружного воздуха не ниже $t = -5^{\circ}\text{C}$. Целесообразность применения клефанерных плит определяется малым весом при высокой несущей способности, т.к. выполняет одновременно функции прогонов и настила, а также обеспечивает теплозащиту сооружения.

Одним из типовых решений плит является клефанерная плита покрытия, которая состоит из продольных ребер из древесины и фанерных обшивок (см. рис.1).

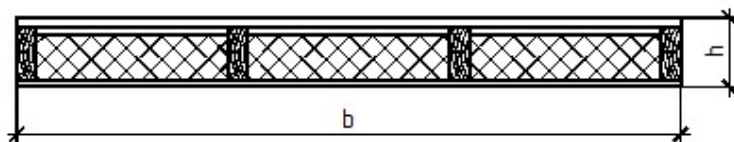


Рис. 1. Поперечное сечение клефанерной плиты покрытия

Для увеличения прочностных и жесткостных характеристик возможно применение в качестве обшивок плит покрытия листов из однонаправленного клеенного шпона (LVL-

бруса).

Моделирование клеёных плит покрытий на основе композитных материалов

Представленные в работах [1] и [2] экспериментальные результаты по определению механических свойств древесины и однонаправленного клеенного шпона позволяют сделать вывод, что указанные материалы являются разносопротивляемыми, т.е. модули упругости на растяжение и сжатие различны (см. рис.2).

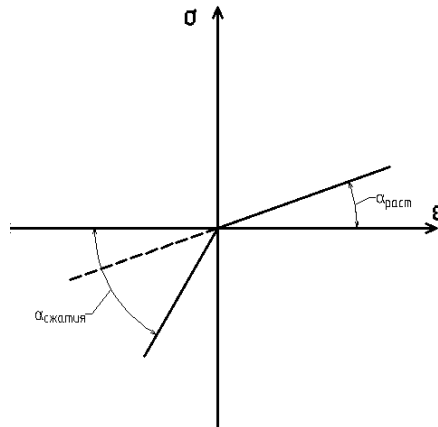


Рис. 2. Схематичный вид диаграммы напряжение-деформация для древесины при растяжении-сжатии

Напряжения в таком случае определяются следующим образом:

$$\sigma_p = \varepsilon * E_p, \quad \sigma_c = \varepsilon * E_c, \quad (1)$$

где: σ_p, σ_c - нормальные напряжения растяжения, сжатия в поперечном сечении балки соответственно; ε - продольная деформация; E_p, E_c - модули упругости на растяжение, сжатие соответственно.

В работе [3] и [4] показано, что при изгибе упругих многослойных анизотропных балок выполняется гипотеза плоского сечения. Предположим, что данная гипотеза также выполняется для балок из разносопротивляемого материала. Таким образом деформации вычисляются:

$$\varepsilon = -(\gamma - \gamma_0)\chi, \quad (2)$$

где χ - это кривизна, γ_0 - координата нейтрального слоя.

Подставив формулу (2) в формулу (1) получим напряжения в сжатых и растянутых слоях сечения:

$$\sigma_p = -\chi * E_p * (\gamma - \gamma_0) \quad (3)$$

$$\sigma_c = -\chi * E_c * (\gamma - \gamma_0) \quad (4)$$

Рассмотрим клеенную плиту покрытия, в которой: верхний и нижний слой - лист LVL, продольные ребра из древесины. При чем, продольные ребра можно разделить на две области. Верхняя часть ребра будет работать на сжатие, нижняя - на растяжение (см. рис.3). Используя разномодульную теорию, изложенную в [5] и [6], определим в общем случае величину изгибающего момента и положение нейтральной линии.

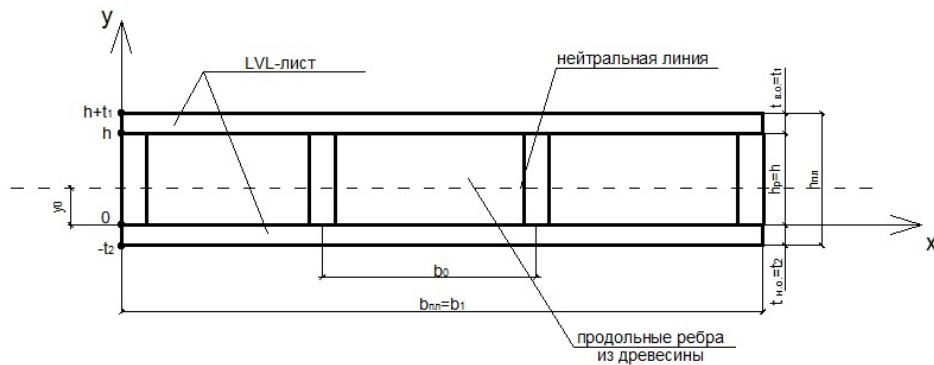


Рис. 3. расчетное сечение клеенной плиты покрытия

Изгибающий момент определяется:

$$M = \int_{F_c^L} \sigma_c^L * (y - y_0) dF + \int_{F_p^L} \sigma_p^L * (y - y_0) dF + \int_{F_c^D} \sigma_c^D * (y - y_0) dF + \int_{F_p^D} \sigma_p^D * (y - y_0) dF, \quad (5)$$

где $F_c^L, F_p^L, F_c^D, F_p^D$ - площади поперечных сечений сжатой и растянутой зоны LVL-бруса и древесины соответственно; $\sigma_p^L, \sigma_c^L, \sigma_p^D, \sigma_c^D$ - нормальные напряжения на растяжение и сжатие в поперечном сечении плиты для LVL-бруса и древесины соответственно.

Подставив формулы (3), (4) в формулу (5), и выполнив интегрирование, определим величину изгибающего момента для случая разномодульного материала:

$$M = \chi * \left[b_1 * E_c^L * \left(\frac{(h + t_1 - y_0)^3 - (h - y_0)^3}{3} \right) + b_2 * E_c^D * \frac{(h - y_0)^3}{3} + b_2 * E_p^D * \frac{(y_0)^3}{3} - b_1 * E_p^L * \left(\frac{(y_0)^3}{3} - \frac{(t_2 + y_0)^3}{3} \right) \right], \quad (6)$$

где $E_c^L, E_p^L, E_c^D, E_p^D$ - модули упругости LVL-бруса и древесины соответственно; h -высота поперечного сечения ребра (см. рис.2), t_1, t_2 - толщины верхней и нижней обшивок соответственно, b_1 - ширина плиты, b_2 - ширина поперечных продольных ребер в сумме. Для однородных упругих балок из курса сопротивления материалов известно уравнение для определения изгибающего момента:

$$M = \chi * EI, \quad (7)$$

где EI - изгибная жесткость однородной балки.

Введем обозначение для величины изгибной жесткости слоистой балки по аналогии с изгибной жесткостью однородной балки, используя для этого квадратные скобки. Из выражений (6) и (7) для этой величины следует равенство:

$$[EI] = \left[b_1 * E_c^L * \left(\frac{(h + t_1 - y_0)^3 - (h - y_0)^3}{3} \right) + b_2 * E_c^D * \frac{(h - y_0)^3}{3} + b_2 * E_p^D * \frac{(y_0)^3}{3} - b_1 * E_p^L * \left(\frac{(y_0)^3}{3} - \frac{(t_2 + y_0)^3}{3} \right) \right] \quad (8)$$

При этом равенство (6) может быть записано в виде аналогично равенству (7):

$$M = \chi * [EI] \quad (9)$$

Принимая во внимание, что рассматривается изгиб балки и продольная нагрузка отсутствует (продольные усилия $N=0$), получим:

$$\int_{F_c^l} \sigma_c^l dF + \int_{F_c^d} \sigma_c^d dF + \int_{F_p^l} \sigma_p^l dF + \int_{F_p^d} \sigma_p^d dF = 0 \quad (10)$$

Подставив формулы (3) и (4) в равенство (10), собрав подобные и сократив на величину χ , получим квадратное уравнение на величину y_0 , которая является координатой нейтральной линии:

$$E_c^l * b_1 * ((h + t_1 - y_0)^2 - (h - y_0)^2) + E_c^d * b_2 * (h - y_0)^2 - E_p^d * b_2 * (y_0)^2 - E_p^l * b_1 * (t_2^2 + 2t_2 y_0) = 0 \quad (11)$$

Равенство (11) является уравнением для нахождения y_0 . Положение нейтральной линии определяется численно, исходя из заданных параметров, таких как толщина верхней обшивки, количество и размеры поперечных ребер.

Выразив из (9) кривизну χ , и приведя подобные, из равенств (3), (4) получим:

$$\sigma_p^i = \frac{-M * E_p^i * (y - y_0)}{[EI]}, \sigma_c^i = \frac{-M * E_c^i * (y - y_0)}{[EI]}, \text{ где } i \in [л, д]. \quad (12)$$

Алгоритм проектирования.

1. Задание исходных параметров - габаритные размеры плиты, нагрузка на плиту, материал.
2. Определение количества продольных ребер. Минимальное количество продольных ребер - 2. Максимальное - ограничено шириной плиты покрытия. Оптимальное количество принимается после проведения и анализа расчетов (из практики проектирования принимают от 3 до 5).
3. Размеры поперечного сечения продольных ребер - подбираются из условия пожаробезопасности и сортамента на пиломатериалы.
4. Определение толщины верхней фанерной обшивки - толщина верхней обшивки определяется из расчета на действие монтажной нагрузки и из расчета на прочность по нормальным напряжениям.
5. Определение толщины нижней фанерной обшивки - толщина нижней обшивки определяется из расчета прочности по нормальным напряжениям и расчета на жесткость.
6. Выбор оптимальных параметров плиты покрытия.

В дальнейшем, при рассмотрении клеенной плиты покрытия, анализируются несколько параметров, таких как толщины верхней и нижней обшивок, высота и ширина ребра, количество

продольных ребер. Для сравнения результатов разномодульной теории и теории, изложенной в [6], определим параметры, которые меняются в ограниченном диапазоне.

Пример расчета клеенной плиты покрытия.

Рассмотрим пример расчета клеенной плиты покрытия на прочность и жесткость по разномодульной теории и теории, изложенной в [7] в соответствии с Алгоритмом проектирования.

1. Для расчета приняты следующие исходные данные:

Рассматривается плита длиной (l) 6 м, шириной (b) 1,5 м. Материал: древесина - сосна 2 сорт (класс прочности C22), LVL-брус - сорт К40 (класс прочности C45). Режим нагружения, согласно [7] - В, условие эксплуатации - 2.

Верхний слой - лист LVL, нижний слой - лист LVL. Продольные ребра приняты из цельной древесины. Модули упругости материалов для расчета по разномодульной теории приняты в соответствии с полученными экспериментальными данными, изложенными в [1] и [2]: $E_c^L=18180$ МПа, $E_p^L=13650$ МПа, $E_c^D=16670$ МПа, $E_p^D=10100$ МПа.

Модули упругости материалов для расчета в соответствии с [7] (формулы 8,9, приложение В). $E_{сп}^L=13500$ МПа, $E_{сп}^D=9000$ МПа.

Расчетные сопротивления материалов приняты в соответствии с [6]: $R_c^L=17,82$ МПа, $R_p^L=16,04$ МПа, $R_c^D=11,58$ МПа, $R_p^D=6,24$ МПа.

Нагрузка принята равной:

Расчетная нагрузка $q_p=450$ кг/м², нормативная нагрузка $q_n=330,8$ кг/м².

Погонная нагрузка принята равной:

Расчетная нагрузка $q_p=675$ кг/м, нормативная нагрузка $q_n=496,32$ кг/м².

2. Определение количества продольных ребер. Минимальное количество продольных ребер - 2. Максимальное - ограничено шириной плиты покрытия. Оптимальное количество принимается после проведения и анализа расчетов (из практики проектирования принимают от 3 до 5). Для данного примера приведем расчет принимая количество ребер: 3, 4 и 5 шт.

3. Ширина ребра принимается из условия пожаробезопасности. Минимально допустимая ширина - 54 мм (60 мм с учетом острожки по 3 мм с каждой стороны в соответствии с сортаментом на пиломатериалы). Высота продольных ребер задается в соответствии с сортаментом на пиломатериалы и принимается равной 69, 94, 119 и 144 мм с учетом острожки соответственно. При рассмотрении задачи принимаются поочередно все указанные размеры высоты поперечного сечения продольного ребра.

4. Толщина верхней обшивки предварительно определяется из расчета на действие монтажной нагрузки. Полку из LVL-листа рассчитываем как пластинку, заделанную в местах приклейки к ребрам. Груз P считать распределенным на ширину 100 см (см. рис.4).

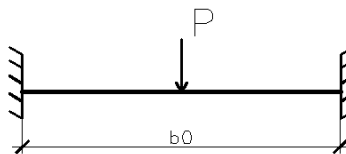


Рис.4. Расчетная схема для расчета на монтажную нагрузку

Расчет проводится как изгибаемого элемента по нормальным напряжениям.

$$\frac{M_m}{W} \leq R_{c,90}^L * 1,2, \quad (13)$$

где: M_m - величина изгибающего момента от действия монтажной нагрузки; W - момент сопротивления на ширину 100 см в плоскости листа поперек волокон, $R_{c,90}^l$ - расчетное сопротивление сжатию LVL-бруса поперек волокон в плоскости листа, определяемого по [7]. Изгибающий момент равен:

$$M = \frac{P \cdot b_0}{8}, \quad (14)$$

где P - монтажная нагрузка, равная 120 кг, b_0 - расстояние между ребрами в свету. Момент сопротивления определяется по следующей формуле:

$$W = \frac{100 \cdot t_1}{6} \quad (15)$$

Тогда толщину верхней обшивки определим из условия (13):

$$t_1 \geq \sqrt{\frac{P \cdot b_0 \cdot 6}{R_{c,90}^l \cdot 1,2 \cdot 8 \cdot 100}}, \quad (16)$$

Для четырех продольных ребер толщину верхней обшивки определим из условия (16):

$$t_1 \geq \sqrt{\frac{P \cdot b_0 \cdot 6}{R_{c,90}^l \cdot 1,2 \cdot 8 \cdot 100}} \geq 0,91 \text{ см},$$

Таким образом толщина верхней обшивки предварительно принимается 10 мм. В дальнейшем при подборе толщины нижней обшивки из условия прочности, учитывается выполнение условия прочности плиты как в зоне сжатия, так и в зоне растяжения.

5. Толщина нижней обшивки определяется из расчета прочности по нормальным напряжениям и расчета на жесткость.

Для определения толщины нижней обшивки используем графический метод. Для этого необходимо построить графики зависимости напряжений при растяжении и сжатии от толщины нижней обшивки при заданной толщине верхней обшивки, размеров и количестве продольных ребер. Из построенного графика определяем толщину нижней обшивки при достижении величины нормальных напряжений на растяжение и сжатие величины расчетных сопротивлений, исходя из условия 17:

$$-R_c^i \leq \sigma \leq R_p^i, \quad (17)$$

где: R_c^i - расчетное сопротивление материала на сжатие, R_p^i - расчетное сопротивление материала на растяжение.

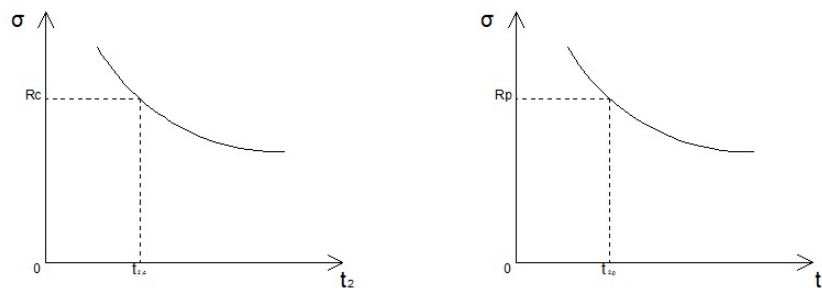


Рис.5 Графики зависимости нормальных напряжений при растяжении и сжатии от толщины нижней

обшивке

Нормальные напряжения на растяжение и сжатие определяются по формулам(12).

Анализируемом параметром в представленной задаче является толщины нижней обшивки, для определения которой необходимо:

- произвести расчет на прочность и определить толщину нижней обшивки при достижении величин напряжений на растяжение и сжатие расчетных сопротивлений при заданных размерах и количестве продольных ребер.

- произвести расчет по деформациям и определить толщину нижней обшивки при достижении величины относительного прогиба предельному прогибу, нормируемому[8] при заданных размерах и количестве продольных ребер:

$$\frac{f}{l} \leq \left[\frac{f}{l}\right]_u, \quad (18)$$

$$\frac{f}{l} = \frac{5 \cdot q_n \cdot l^3}{384 \cdot EI} \leq \left[\frac{f}{l}\right]_u = \frac{1}{200}$$

- определить необходимую толщину обшивки с учетом сортамента и типовых размеров. Результаты расчета на прочность приведены при условии достижения нормальных напряжений величин расчетного сопротивления в таблицах 1, 2, 3.

Таблица 1

Количество продольных ребер - 4

Высота ребра, мм	Толщина нижней обшивки по расчету в соответствии с [6], мм			Толщина нижней обшивки по расчету по разномодульной теории, мм		
	при $\sigma=R_p$	при $\sigma=-R_c$	Требуемая толщина нижней обшивки	при $\sigma=R_p$	при $\sigma=-R_c$	Требуемая толщина нижней обшивки
69	44.8	22.1	46	37.6	18.7	38
94	16.2	13.1	18	11.9	11.4	12
119	10.1	3.1	12	7.8	3.8	8
144	5.4	Не достигает R_c	6	5.2	Не достигает R_c	6

Таблица 2

Количество продольных ребер - 3

Высота ребра, мм	Толщина нижней обшивки по расчету в соответствии с [6], мм			Толщина нижней обшивки по расчету по разномодульной теории, мм		
	при $\sigma=R_p$	при $\sigma=-R_c$	Требуемая толщина нижней обшивки	при $\sigma=R_p$	при $\sigma=-R_c$	Требуемая толщина нижней обшивки
69	23.5	47.2	48	42.5	18.9	44
94	13.8	16.2	18	15.8	12.4	16
119	8.8	2.1	10	8.7	4.1	10
144	6.2	Не достигает R_c	8	5.8	1.2	6

Таблица 3

Количество продольных ребер - 5

Высота ребра, мм	Толщина нижней обшивки по расчету в соответствии с [6], мм			Толщина нижней обшивки по расчету по разномодульной теории, мм		
	при $\sigma=R_p$	при $\sigma=-R_c$	Требуемая толщина нижней обшивки	при $\sigma=R_p$	при $\sigma=-R_c$	Требуемая толщина нижней обшивки
69	23.3	45.3	46	18.6	34.8	36
94	13.4	15.6	16	11.8	11.4	12
119	9.1	2.1	10	7.3	2.4	8
144	5.8	Не достигает R_c	6	3.9	Не достигает R_c	4

Сравнивая результаты, видно, что экономия материала (рассматривая нижнюю обшивку) при разномодульной теории достигает до 33,3%, в зависимости от высоты продольных ребер плиты.

Расчет на жесткость проведен в соответствии с [7] и [8], согласно которым относительный прогиб плиты от нормативной нагрузки не должен превышать предельно допустимого прогиба ($[f/l]_u$), нормируемого [8].

Таблица 4

Результаты расчета по деформациям приведены в таблице 4

Высота ребра, мм	Толщина нижней обшивки по расчету в соответствии с [6], мм	Требуемая толщина нижней обшивки, мм	Толщина нижней обшивки по расчету по разномодульной теории, мм	Требуемая толщина нижней обшивки, мм
	$pruf/l=[f/l]_u$		$pruf/l=[f/l]_u$	
4 продольных ребра				
69	90.9	92	49.9	50
94	66.8	68	28	28
119	41.8	42	13.8	14
144	22.1	24	6.3	8
3 продольных ребра				
69	90.9	92	52.7	54
94	67.9	68	29.1	30
119	41.9	42	14.8	16
144	22.4	24	7.2	8

Таблица 4 (продолжение)

5 продольных ребер				
69	90.3	92	51.9	52
94	66.5	68	27.3	28
119	41.6	42	13.1	14
144	21.7	22	5.8	6

При расчете на жесткость, экономия материала (рассматривая нижнюю обшивку) при разномодульной теории достигает до 72,7%, в зависимости от высоты продольных ребер плиты.

Из анализа расчетов на прочность и жесткость можно сделать вывод, что при расчете на жесткость к плите предъявляются более высокие требования.

Экономическое сравнение вариантов

Для экономического сравнения рассмотрим плиту покрытия для производственного здания с площадью кровли 2592 кв.м. (144х18м).

Проведем стоимостное сравнение по материалу, рассматривая стоимость материала для всей плиты покрытия. Результаты сравнения представлены в таблице 5.

Таблица 5

Показатель		По расчету в соответствии с [6] при высоте ребра, мм				По расчету по разномодульной теории при высоте ребра, мм			
		69	94	119	144	69	94	119	144
Усредненная рыночная стоимость LVL-листа за 1 м ³		36 000 руб.							
Усредненная рыночная стоимость древесины за 1 м ³		11 500 руб.							
Площадь кровли, кв.м.		2592 кв.м.							
Объем LVL-листа, необходимого для нижней обшивки на все здание, м ³	3 р.	264,38	202,18	134,78	88,13	165,89	103,68	67,39	46,66
	4 р.	264,38	202,18	134,78	88,13	155,52	98,50	62,21	46,66
	5 р.	264,38	202,18	134,78	82,94	160,70	98,50	62,21	41,47

Таблица 5 (продолжение)

Стоимость LVL-листа на весь объем, руб	3 р.	9517824	7278336	4852224	3172608	5971968	3732480	2426112	1679616
	4 р.	9517824	7278336	4852224	3172608	5598720	3545856	2239488	1679616
	5 р.	9517824	7278336	4852224	2985984	5785344	3545856	2239488	1492992
Объем древесины на все здание, м3	3 р.	4,8289	6,5785	8,3281	10,0777	4,8289	6,5785	8,3281	10,0777
	4 р.	6,4385	8,7713	11,1041	13,4369	6,4385	8,7713	11,1041	13,4369
	5 р.	8,0482	10,9642	13,8802	16,7962	8,0482	10,9642	13,8802	16,7962
Стоимость древесины на весь объем, руб	3 р.	55532	75653	95773	115894	55532	75653	95773	115894
	4 р.	74043	100870	127697	154525	74043	100870	127697	154525
	5 р.	92554	126088	159622	193156	92554	126088	159622	193156
ИТОГО стоимость плиты, руб.	3 р.	9573356	7353989	4947997	3288502	6027500	3808133	2521885	1795510
	4 р.	9591867	7379206	4979921	3327133	5672763	3646726	2367185	1834141
	5 р.	9610378	7404424	5011846	3179140	5877898	3671944	2399110	1686148

Очевидно, что при использовании в расчетах разномодульной теории, экономия обшивки плиты существенна и достигает до 72,7%, что позволяет экономить на материальных ресурсах в процессе строительства. В целом проанализировав стоимость всей плиты, можно сделать вывод, что минимальная стоимость определилась для плиты с количеством продольных ребер - 5 штук и высотой поперечного сечения продольного ребра - 144 мм. Из таблицы (5) видно, что данный тип плиты наиболее экономичный при применении обоих методов расчета. Экономия при расчете по разномодульной теории составила 47%.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-07-01326.

Литература

1. Горынин Г. Л., Григорьев Ю.И. Сравнительный анализ экспериментальных данных модулей упругости древесины и однонаправленного клеенного шпона // Материалы IX Всероссийской научно-технической конференции «Актуальные вопросы строительства». – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2016. – С. 41-45.
2. Горынин Г. Л., Григорьев Ю.И. Сравнительный анализ экспериментальных данных модулей упругости древесины // Север России: стратегии и перспективы развития: материалы II Всероссийской научно-практической конференции (г. Сургут, 27 мая 2016 г.): в 4 т. – Сургутский государственный университет. – Сургут: ИЦ СурГУ, 2016. – Т. II. – 335 с. – С. 58-62.

3. Горынин Г. Л. Пространственные задачи слоистых анизотропных конструкций: монография. – Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008. – 262 с.
4. Горынин Г. Л., Немировский Ю.В. Продольно-поперечный изгиб слоистых балок в трехмерной постановке// Прикладная механика и техническая физика. - 2004. -Т. 45, №6. - С. 133-143.
5. Горынин Г. Л., Григорьев Ю.И. Сравнительный анализ законов деформирования древесины согласно Свода правил и разномодульного закона деформирования при изгибе //Проблемы оптимального проектирования сооружений: доклады 4-й Всероссийской конференции (Новосибирск, 11 – 13 апреля 2017 г.) – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2017. – С. 79-87.
6. Горынин Г. Л., Григорьев Ю.И. Моделирование изгиба оконной перемычки из композитных материалов// Север России: стратегии и перспективы развития: материалы III Всероссийской научно-практической конференции (г.Сургут, 26 мая 2017 г.): в 4 т. – Сургутский государственный университет. – Сургут: ИЦ СурГУ, 2017. – Т. II. – С. 197-203.
7. Свод правил: СП 64.13330.2017 Деревянные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-25-80. – Москва: 2017. – 3-16 с., 64-71 с.
8. Свод правил: СП 20.13330.2016 Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85* – Москва: 2011. – 32-33 с., 72-80 с.

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 004.946

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАЗБИЕНИЯ ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СИСТЕМ ЧАСТИЦ С ВИРТУАЛЬНОЙ СРЕДОЙ НА GPU

А. В. Мальцев, Д. В. Омельченко

*Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт
системных исследований Российской академии наук, avmaltcev@mail.ru*

Одним из наиболее распространенных типов взаимодействия объектов друг с другом являются столкновения, или коллизии. В работе предложены распределенные методы и алгоритмы вычисления точек коллизий при моделировании взаимодействия систем частиц с объектами виртуальной среды. Рассматриваемые решения основаны на пространственном разбиении трехмерной сцены с помощью регулярной сетки, построение которой выполняется в масштабе реального времени на современном многоядерном графическом процессоре с поддержкой архитектуры параллельных вычислений CUDA. Поиск точки столкновения для каждой частицы также производится на GPU. Для этого анализируются возможные пересечения траектории движения частицы с полигонами, принадлежащими ячейкам сетки, пройденным частицей за промежуток времени между рендерингом текущего и предыдущего кадров изображения виртуальной сцены. На основе предложенных методов и алгоритмов созданы программные модули для систем визуализации трехмерных виртуальных сцен, обеспечивающие распределенное моделирование и визуализацию коллизий систем частиц с объектами виртуальной среды на CUDA-совместимом графическом процессоре в масштабе реального времени. Данные модули прошли успешную апробацию и показали свою применимость в имитационно-тренажерных комплексах и системах виртуального окружения.

Ключевые слова: визуализация, система частиц, регулярная сетка, коллизии, CUDA.

USING SPATIAL SUBDIVISION IN IMPLEMENTING THE INTERACTION OF PARTICLE SYSTEMS WITH VIRTUAL ENVIRONMENT ON GPU

A. V. Maltsev, D. V. Omelchenko

System Research Institute, Russian Academy of Sciences, avmaltcev@mail.ru

Collisions are one of the most common types of object interaction with each other. This paper proposes distributed methods and algorithms for collision point calculation under simulation of particle system interaction with objects of virtual environment. Considered solutions are based on spatial subdivision of three-dimensional scene by means of regular grid, which is built in real time on a modern multicore graphics processor supporting the parallel computing architecture CUDA. Collision point search for each particle is performed on GPU as well. In this regard, possible intersections of particle's movement trajectory with polygons in grid cells are analyzed. Moreover this particle passed the grid at the time interval between rendering of the last and current frames of a virtual scene image. Based on proposed methods and algorithms, software modules for visualization systems of three-dimensional virtual scenes are created. They provide distributed simulation and visualization of particle system collisions with virtual environment objects on the CUDA-supported graphics processor in real time. The modules have been successfully tested and demonstrated their applicability in simulation-training complexes and virtual environment systems.

Keywords: visualization, particle system, regular grid, collisions, CUDA.

Реалистичность моделируемой и визуализируемой на компьютере виртуальной среды достигается целым рядом факторов, таких как детальность виртуальных моделей, точность расчета освещения сцены, динамика объектов и т. д. Существенным фактором обеспечения

правильного восприятия такой среды служит взаимодействие ее объектов друг с другом. Распространенным типом взаимодействия являются столкновения, или коллизии [1]. Моделирование коллизий включает в себя два этапа: определение точек коллизии объектов и расчет поведения этих объектов в результате произошедшего столкновения. Методы и алгоритмы реализации данных этапов напрямую зависят от типов и сложности геометрии взаимодействующих объектов. С этой точки зрения одной из трудоемких и ресурсозатратных задач является расчет коллизий систем частиц [2] с другими объектами виртуальной среды, поскольку каждая такая система может содержать огромное количество элементов (до нескольких миллионов и более).

Одним из известных решений описанной задачи нахождения коллизий между виртуальными объектами является применение методов, базирующихся на анализе изображений в виде 2D-проекций трехмерной сцены на заданные плоскости (image-based методы). Тип проецирования и плоскости выбираются исходя из используемых подходов. Так, в статье [3] предлагаются методы поиска столкновений объектов на основе совместного применения буфера трафарета (stencil buffer) и карт глубины (depth map). В статье [4] рассматриваются методы и алгоритмы, ориентированные на нахождение коллизий систем частиц с другими объектами на графическом процессоре (GPU) с использованием шейдеров и z-буфера видеокарты. Однако использование шейдеров для решения вычислительных задач, не связанных напрямую с визуализацией, влечет за собой необходимость дополнительных структур данных в виде некоторого массива текстур, каждую из которых надо обновлять в отдельном проходе рендеринга. Работа [5] предлагает распределенные методы реализации систем частиц и расчета точек их столкновения с объектами виртуальной среды на основе карт глубины на GPU с поддержкой архитектуры параллельных вычислений CUDA. Использование CUDA позволяет повысить эффективность вычислительных алгоритмов, поскольку в таком случае отсутствует необходимость привязывать расчеты к структуре графического конвейера, а также появляется возможность хранить параметры частиц в виде классических массивов в видеопамяти. Несмотря на достаточную простоту image-based методов при решении задач поиска коллизий объектов, они обладают рядом недостатков, что ограничивает область их применения. Среди основных минусов можно отметить необходимость создания одного или нескольких изображений-проекций виртуальной сцены для каждой системы частиц в отдельности, зависимость точности определения коллизий от разрешения этих изображений, а также невозможность установления факта наличия или отсутствия коллизии при проникновении частиц в области сцены, закрытые на проекции изображениями каких-либо объектов.

Для решения описанных проблем в данной работе предлагаются новые распределенные методы и алгоритмы нахождения коллизий систем частиц с объектами виртуальной среды на основе пространственного разбиения трехмерной сцены с помощью регулярной сетки. Построение сетки и использование ее при поиске столкновений частиц с объектами выполняется полностью на CUDA-совместимых GPU, что обеспечивает поддержку визуализации даже сложных виртуальных сцен в масштабе реального времени. Далее рассмотрим предлагаемые решения подробно.

Регулярная сетка

Разбиение трехмерной сцены на совокупность объемных областей применяется при решении различных задач компьютерного моделирования и визуализации. В том числе такой подход активно используется для реализации ускоряющих структур данных в методах трассировки лучей [6–8]. Решаемая нами задача поиска коллизий множества частиц с поверхностями объектов виртуальной среды имеет схожую природу, что обосновывает возможность эффективного применения в ней данного подхода. Разбиение виртуального пространства в этой работе предлагается осуществлять с помощью регулярной сетки – деления сцены плоскостями, параллельными плоскостям мировой системы координат (СК) WCS, на трехмерные

ячейки одинакового размера, называемые вокселями. В нашем случае используются кубические воксели.

Процесс построения регулярной сетки включает в себя несколько шагов, которые в зависимости от активности объектов сцены выполняются единожды или многократно:

- расчет ограничивающего параллелепипеда $AABB$ сцены со сторонами, параллельными координатным плоскостям $СК\ WCS$;
- разделение полученного $AABB$ на воксели;
- составление таблицы индексов полигонов, пересекающих каждый воксел.

Если объекты сцены, кроме систем частиц, в течение всего времени моделирования и визуализации не изменяют своего положения и ориентации, не добавляются и не исчезают, то такая сцена является статической, а разбиение пространства достаточно выполнить один раз при ее загрузке в память. Время построения сетки при этом не служит определяющим фактором, следовательно, выполнить описанные операции можно с использованием CPU. В противном случае, когда объекты перемещаются от кадра к кадру, создаются и удаляются, границы $AABB$ и таблица пересечений вокселей полигонами могут значительно меняться. Это приводит к необходимости перестраивать регулярную сетку перед визуализацией каждого кадра. Реализация перестроения сетки в масштабе реального времени, необходимом для правильной работы систем виртуального окружения и имитационно-тренажерных комплексов, требует специальных распределенных методов и алгоритмов. Ранее нами были предложены эффективные решения для построения регулярной сетки виртуальной сцены с использованием CUDA-совместимого GPU в рамках задачи реализации трассировки лучей. С их подробным описанием можно ознакомиться в [8]. Результатами применения данных методов и алгоритмов являются:

- $AABB$ сцены в виде двух его крайних точек – минимальной $B_{\min}$ и максимальной $B_{\max}$, разделенный на кубические воксели с ребром некоторой длины a ;
- массив A_{vp} пар «номер вокселя / номер пересекающего воксел полигона», отсортированный относительно номеров вокселей;
- массив A_n количеств полигонов, пересекающих каждый воксел;
- массив A_i индексов первого вхождения пары с номером каждого вокселя в массиве A_{vp} .

Номер каждого полигона является уникальным и кодирует индексы виртуального объекта и соответствующего треугольника этого объекта. Номер вокселя вычисляется по формуле:

$$C = k_z \times d_x \times d_y + k_y \times d_x + k_x, \quad (1)$$

где k_x, k_y, k_z – индексы вокселя по координатным осям X, Y, Z системы WCS, начиная с нуля от точки $B_{\min}$;

d_x, d_y – размерности сетки в ячейках по осям X, Y той же СК.

Поиск коллизий частиц с объектами

Далее будем рассматривать случай с динамической виртуальной средой, где перестроение сетки осуществляется при синтезе каждого кадра изображения сцены. После того, как регулярная сетка сформирована по технологии, изложенной в [8], указатели на ее данные передаются в CUDA-ядро, отвечающее за определение текущего состояния системы частиц. Каждый вычислительный поток отвечает за обработку одной частицы в виде точки пространства, соответствующей центру ее трехмерной модели. Поток рассчитывает новое положение, скорость, время жизни и другие параметры своей частицы. Также он выполняет поиск возможной коллизии частицы с каким-либо объектом сцены и ее обработку. Для этого вначале необходимо понять, какие ячейки сетки пересекла частица, преодолев путь от своего предыдущего положения P_0 до текущего положения P_1 . Поскольку вычисление параметров и отображение

системы частиц происходит в момент формирования очередного кадра изображения, а визуализация сцены должна выполняться в масштабе реального времени (т. е. временной интервал между кадрами составляет не более 40 мс), то этот путь аппроксимируется отрезком P_0P_1 (рис. 1). Номера C_0 и C_1 вокселей сетки, содержащих точки P_0 и P_1 соответственно, вычисляются с помощью формулы (1). При этом индексы k_x , k_y , k_z вокселей определяются как:

$$k_x = \left\lfloor \frac{1}{a} (P_x - B_{\min, x}) \right\rfloor, \quad k_y = \left\lfloor \frac{1}{a} (P_y - B_{\min, y}) \right\rfloor, \quad k_z = \left\lfloor \frac{1}{a} (P_z - B_{\min, z}) \right\rfloor,$$

где a – длина ребра вокселя;

$B_{\min}$ – минимальная точка $AABB$ сцены;

P_x, P_y, P_z – координаты положения частицы в мировой системе WCS;

скобки обозначают округление до ближайшего целого снизу.

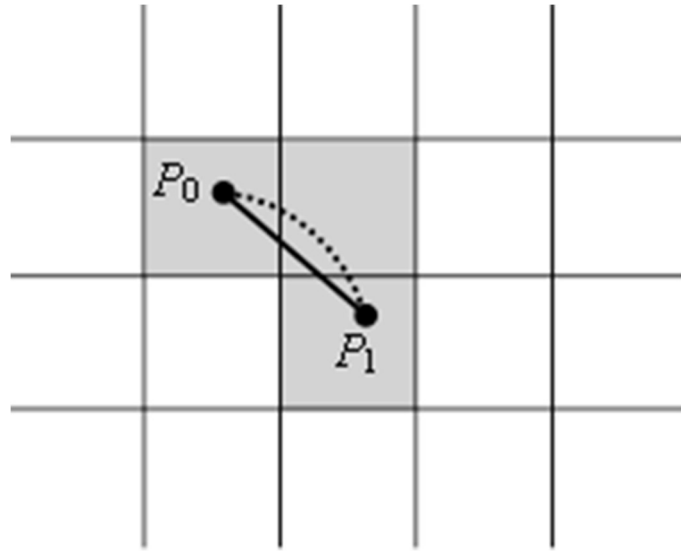


Рис. 1. Аппроксимация пути частицы

Если воксели C_0 и C_1 не совпадают или не являются смежными, то промежуточные ячейки, пересекаемые рассматриваемым отрезком, можно найти, исходя из направления нормализованного вектора $\overline{P_0P_1}$. Для простоты рассмотрим решение задачи на примере двумерной регулярной сетки, а потом проведем аналогии для трехмерного случая. Пусть точка P_0 находится внутри ячейки, имеющей индексы k_x, k_y , а для координат x, y вектора $\overline{P_0P_1}$ соблюдаются неравенства $x > 0, y \geq 0$ (рис. 2). В зависимости от соотношения углов α и β отрезок P_0P_1 перейдет из текущей ячейки либо в $(k_x + 1, k_y)$ – соседнюю справа (при $\alpha < \beta$), либо в $(k_x, k_y + 1)$ – соседнюю сверху (при $\alpha > \beta$), либо по диагонали в ячейку $(k_x + 1, k_y + 1)$, если $\alpha = \beta$. Заменим углы α и β их тангенсами:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{1-t}{1-s},$$

где (s, t) – относительные координаты точки P_0 , отсчитываемые в долях ячейки от ее левого нижнего угла и вычисляемые как:

$$s = \frac{P_{0,x} - B_{\min, x}}{a} - k_x, \quad t = \frac{P_{0,y} - B_{\min, y}}{a} - k_y.$$

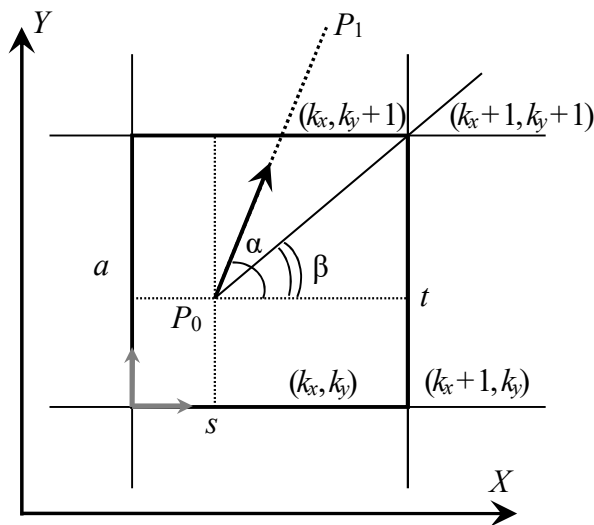


Рис. 2. Двумерная регулярная сетка

Тогда индексы следующей ячейки, в которую перейдет отрезок, равны:

$$\begin{aligned}
 k_x' &= k_x + 1 - F(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) = k_x + 1 - F\left(\frac{x(1-t) - y(1-s)}{x(1-s)}\right), \\
 k_y' &= k_y + 1 - F(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) = k_y + 1 - F\left(\frac{y(1-s) - x(1-t)}{x(1-s)}\right).
 \end{aligned} \quad (2)$$

Значение функции $F(w)$ определяется знаком аргумента w :

$$F(w) = \begin{cases} 1, & w < 0 \\ 0, & w \geq 0 \end{cases}.$$

Так как ранее было определено, что значение $x > 0$, а $s \in [0, 1]$, то значение функции F не зависит от знаменателей ее аргументов. Поэтому данные знаменатели в формулах (2) можно отбросить:

$$\begin{aligned}
 k_x' &= k_x + 1 - F(x(1-t) - y(1-s)), \\
 k_y' &= k_y + 1 - F(y(1-s) - x(1-t)).
 \end{aligned} \quad (3)$$

Заметим, что при переходе от формул (2) к формулам (3) для координаты x вектора $\overline{P_0P_1}$ становится допустимым значение 0. Аналогично рассмотренному случаю выписываются формулы для векторов $\overline{P_0P_1}$, находящихся во втором, третьем и четвертом квадрантах. Объединив их с (3), получим решение для произвольного вектора $\overline{P_0P_1}$:

$$\begin{aligned}
 k_x' &= k_x + i(1 - F(|x|f_y - |y|f_x)), \\
 k_y' &= k_y + j(1 - F(|y|f_x - |x|f_y)), \\
 i &= 1 - 2F(x), \quad j = 1 - 2F(y), \quad f_x = 1 - F(x) - i \times s, \quad f_y = 1 - F(y) - j \times t.
 \end{aligned} \quad (4)$$

Чтобы решить задачу поиска следующего вокселя для трехмерной сетки, необходимо рассмотреть проекции текущего вокселя и отрезка P_0P_1 на плоскости XY , ZY и XZ мировой СК

WCS. Каждая из проекций с точностью до обозначения осей соответствует разобранному ранее двумерному случаю. Каждый из индексов k_x, k_y, k_z будет изменяться при переходе отрезка из одной ячейки в другую, когда он изменяется в двух из трех проекций: XY и XZ для k_x , XY и ZY для k_y , ZY и XZ для k_z . Изменение индекса в проекциях определяется по формулам, аналогичным (4). Объединяя попарно формулы для соответствующих проекций, следующий воксел можно вычислить как:

$$k'_x = k_x + i ((1 - F(|x|f_y - |y|f_x)) \&\& (1 - F(|x|f_z - |z|f_x))),$$

$$k'_y = k_y + j ((1 - F(|y|f_x - |x|f_y)) \&\& (1 - F(|y|f_z - |z|f_y))),$$

$$k'_z = k_z + k ((1 - F(|z|f_y - |y|f_z)) \&\& (1 - F(|z|f_x - |x|f_z))),$$

$$i = 1 - 2F(x), \quad j = 1 - 2F(y), \quad k = 1 - 2F(z),$$

$$f_x = 1 - F(x) - i \times s, \quad f_y = 1 - F(y) - j \times t, \quad f_z = 1 - F(z) - k \times r,$$

где $\&\&$ – означает логическую операцию «И», (s, t, r) – относительные координаты точки P_0 , отсчитываемые в долях воксела от его угла с наименьшими координатами в СК WCS и вычисляемые как:

$$s = \frac{P_{0,x} - B_{\min,x}}{a} - k_x, \quad t = \frac{P_{0,y} - B_{\min,y}}{a} - k_y, \quad r = \frac{P_{0,z} - B_{\min,z}}{a} - k_z.$$

Обрабатывающий частицу CUDA-поток на GPU последовательно проходит воксели, пересекаемые отрезком P_0P_1 , начиная с воксела C_0 . В каждом из них происходит анализ наличия пересечения отрезка с входящими в ячейку полигонами. Как было описано выше, данные о количестве и номерах таких полигонов хранятся в массивах, в виде которых без учета коллизий представлена регулярная сетка. Так, число полигонов, содержащихся в вокселе, считывается потоком из массива A_n по номеру C этого воксела, который определяется по формуле (1). Номера полигонов хранятся последовательно в массиве A_{vp} , начиная с элемента с индексом $A_i[C]$. При нахождении хотя бы одного пересечения отрезка P_0P_1 с полигоном, лежащего внутри рассматриваемого воксела, проход по вокселям останавливается, а точка этого пересечения является точкой коллизии частицы с объектом. Если пересечений несколько, то выбирается ближайшее из них к началу P_0 отрезка.

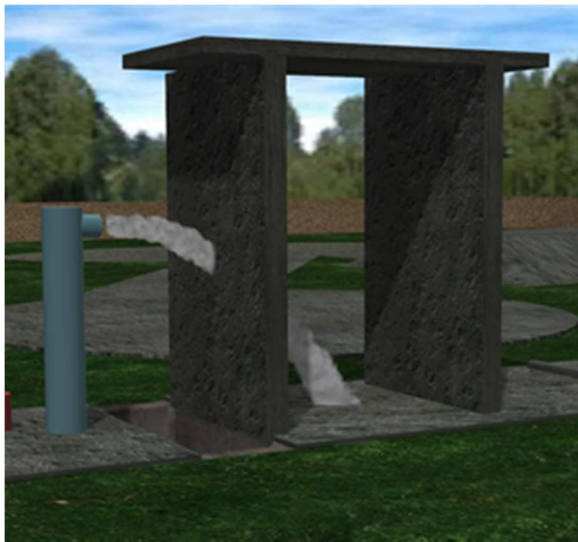


Рис. 3. Моделирование струи пены

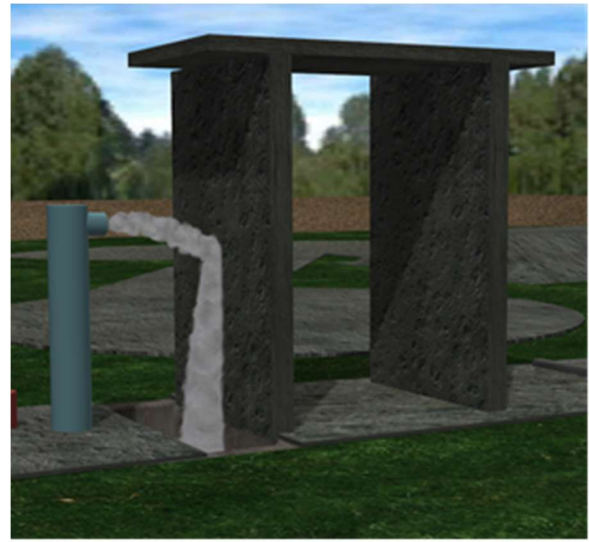


Рис. 4. Моделирование струи пены
с учетом коллизий

На рис. 3 и 4 продемонстрирована виртуальная сцена с моделированием струи пены без учета столкновений ее частиц с объектами (рис. 3), а также с поиском и обработкой их коллизий на основе предложенных методов и алгоритмов, использующих регулярную сетку (рис. 4).

Заключение. В результате проведенных исследований были разработаны оригинальные методы и подходы для распределенного моделирования коллизий систем частиц с другими объектами трехмерных виртуальных сцен. Особенностью предлагаемых решений является использование пространственного разбиения сцены с помощью регулярной сетки, построение и применение которой для поиска столкновений частиц с поверхностями объектов выполняется на многоядерном графическом процессоре, поддерживающем архитектуру параллельных вычислений CUDA. Широкое применение распределенных вычислений на GPU обеспечивает работу предлагаемых методов и алгоритмов в масштабе реального времени для высокополигональных сцен, включающих несколько миллионов частиц. Предложенные решения реализованы в виде программных модулей и прошли успешную апробацию в составе системы визуализации, разработанной в ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-07-00796.

Литература

9. Ming C. Lin, Gottschalk S. Collision detection between geometric models: a survey // Proc. of IMA conference on mathematics of surfaces. 1998. V. 1. P. 602–608.
10. Reeves W. T. Particle systems – a technique for modeling a class of fuzzy objects // Computer Graphics. SIGGRAPH. 1983. P. 359–376.
11. Baciу G., Wong S.-K. Image-based techniques in a hybrid collision detector // IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics. 2003. V. 9. P. 254–271.
12. Kolb A., Latta L., Rezk-Salama C. Hardware-based Simulation and Collision Detection for Large Particle Systems // Proc. of the ACM SIGGRAPH/EUROGRAPHICS conference on Graphics hardware. 2004. P. 123–131.
13. Мальцев А. В., Страшнов Е. В. Использование z-буфера для поиска столкновений частиц с объектами 3D сцены // Тр. НИИСИ РАН. 2018. Т. 8. № 1. С. 52–55.
14. Havran V., Herzog R., Seidel H.-P. On the fast construction of spatial hierarchies for ray tracing // Proceedings of the 2006 IEEE Symposium on Interactive Ray Tracing. 2006. P. 71–80.
15. Torres R., Martin P. J., Gavilanes A. Ray casting using a roped BVH with CUDA // 25th Spring Conference on Computer Graphics (SCCG 2009). P. 107–114.
16. Мальцев А. В. Построение адаптивной регулярной сетки трехмерной сцены в реальном режиме времени // Программные продукты и системы. 2010. № 4. С. 41–45.

ОПТИМИЗАЦИЯ ВРЕМЕНИ РАБОТЫ АЛГОРИТМА ДЛЯ МНОГОЯДЕРНЫХ ПРОЦЕССОРОВ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ ТЕПЛОВОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ МОДУЛЕЙ

Е. К. Гребенникова, П. И. Кандалов

*Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт
системных исследований Российской академии наук
ekaterina.grebennikova@inbox.ru, petrki87@gmail.com*

Статья посвящена оптимизации времени работы алгоритма программного комплекса STF-ElectronMod, предназначенного для теплового проектирования и моделирования температурных полей электронных модулей как в детерминированных, так и в условиях неопределенности входных данных. Неопределенность входных данных моделируется интервально стохастической моделью, а оптимизация достигается методом распараллеливания матричных вычислений на стационарных компьютерах с многоядерными процессорами. Приведены обоснование выбора способа оптимизации, результаты тестовых вычислений и их анализ. Приведено сравнение скорости работы библиотеки, написанной на языке программирования C++, и скорости работы функции программного комплекса STF-ElectronMod, написанной на языке Pascal. Показано, что выигрыш во времени исполнения библиотечной функции, написанной на C++ при одном задействованном потоке, составляет не менее 30 % по отношению к времени счета, осуществляемого по изначальному неоптимизированному алгоритму программного комплекса STF-ElectronMod. Данное ускорение связано в первую очередь с возможностью компилятора, поддерживающего язык программирования C++, разворачивать циклы для выполнения задач в конвейере команд, что практически не используется в компиляторе Pascal. Результаты тестов показали, что производительность реализованного алгоритма на 4-ядерном процессоре приблизительно в 6 раз выше. Алгоритм оптимизации реализован в виде отдельной библиотеки и включен в программный комплекс.

Ключевые слова: распараллеливание, оптимизация, многоядерные процессоры, компьютерное моделирование.

OPTIMIZATION OF ALGORITHM EXECUTION TIME FOR MULTICORE PROCESSORS IN THERMAL DESIGNING SOFTWARE OF ELECTRONIC MODULES

E. K. Grebennikova, P. I. Kandalov

*System Research Institute, Russian Academy of Sciences
ekaterina.grebennikova@inbox.ru, petrki87@gmail.com*

The article is devoted to the optimization of the algorithm execution time in the STF-ElectronMod software. The software is intended to design and model the temperature fields of electronic modules in both deterministic conditions and under uncertainty. The uncertainty of the input data is modeled by the stochastic interval model, and optimization is achieved by parallelizing matrix calculations on PC with multi-core processors. Optimization method is provided and results are presented. A comparison between the speed of the library written in C++ and the speed of the function of the STF-ElectronMod software package written in Pascal is made. It is shown that the function performance of C++ library compared to Pascal function is not less than 30 % using the original non-optimized algorithm of the STF-ElectronMod software package. This performance is primarily due to the ability of the C++ compiler to use loops unrolling, which is practically not used in the Pascal compiler. The test results showed that performance of the new algorithm may be 6 times higher on

the quad-core processor. The algorithm has been developed as a library and included in STF-ElectronMod software package.

Keywords: parallelization, optimization, multi-core processors, computer simulation.

Создание современных конкурентоспособных электронных систем (ЭС) невозможно без теплового проектирования и обеспечения тепловых режимов ЭС и элементов [1–2]. Одной из структурных единиц ЭС является электронный модуль (ЭМ), состоящий из многослойной печатной платы (МПП) с разнородными слоями и установленными на ней элементами – микросхемами (МС) и электро-радиоэлементами (ЭРЭ) – дискретными диодами, транзисторами, резисторами, конденсаторами, катушками индуктивности, электрическими разъемами и пр. Математическое и компьютерное моделирование температурных полей ЭМ является одной из главных проблем при тепловом проектировании. Такое положение во многом обусловлено сложным характером конструкции ЭМ, обладающей такими конструктивными характеристиками, как большое число (до нескольких десятков) разнородных в теплофизическом отношении слоев в МПП, ни одним из которых практически нельзя пренебречь; трехмерный характер и сложная пространственная конфигурация конструкции ЭМ, МС и ЭРЭ; неоднородные включения и полости; сложная динамика рассеиваемой мощности при работе ЭМ; взаимодействие элементов между собой в системе. Необходимо отметить, что на рынке программных комплексов (ПК) имеется довольно много как зарубежных, так и отечественных ПК, предназначенных для моделирования тепловых режимов различных ЭС и ЭМ, обладающих вместе с тем серьезными недостатками, которые не позволяют использовать их в профессиональной практике проектирования электронных систем [1–2]. Наиболее адекватным по точности моделирования является ПК STF-ElectronMod [3–4], созданный для теплового проектирования ЭМ, расчета трехмерных температурных полей в сложных конструкциях ЭМ, не имеющего ограничений на количество слоев в МПП, сложность конструкции, реальных условий монтажа и охлаждения. Кроме того, ПК STF-ElectronMod позволяет осуществлять анализ и моделирование температурных распределений в ЭМ в условиях неопределенности входных данных (мощностей МС, тепловых сопротивлений корпусов МС, условий монтажа, контактных тепловых сопротивлений, температуры окружающей среды и т. д.), не имеющих аналогов в зарубежных и российских ПК.

В основу системы математического и компьютерного моделирования температурных полей ЭМ в ПК STF-ElectronMod был положен новый матрично-топологический метод, разработанный в [3]. В процессе работы алгоритма метода производится многократное формирование матриц большой размерности многократное обращение к различным матричным операциям. Ввиду большой размерности матриц – до сотен элементов, в зависимости от требуемой точности моделирования, количества МС и сложности конструкции – операции формирования матриц и действий над ними занимают значительную часть времени работы ПК. В этой связи возникает необходимость в оптимизации времени вычислений при работе алгоритма ПК STF-ElectronMod. Учитывая, что современные персональные компьютеры являются многоядерными, наиболее эффективным методом оптимизации (минимизации) времени счета является распараллеливание алгоритма.

В статье рассматривается метод оптимизации времени работы алгоритма ПК STF-ElectronMod путем распараллеливания вычислений на персональных компьютерах с многоядерными процессорами.

Основная задача, решаемая при оптимизации времени работы алгоритма, состояла в оптимизации того участка вычислительного ядра ПК, отвечающего за вычисления матриц теплового влияния – R [3–5], на которые приходится основное время, занимаемое вычислениями.

Каждый элемент матрицы R является независимым от других элементов, поэтому необходимости в распараллеливании на уровне передачи сообщений или по данным нет, достаточно использовать модель параллелизма с общей памятью [6]. Для решения данной задачи

была использована технология OpenMP [7], так как данная технология является кроссплатформенной, позволяет использовать каждое ядро процессора персонального компьютера как отдельный вычислительный элемент, а также поддерживает технологию multi-threading [8]. Для нахождения матрицы R в ПК STF-ElectronMod используется подпрограмма, которая использует в своей реализации набор функций ядра. Для использования технологии OpenMP данная функция была переписана в качестве библиотеки на язык C++, позволяющий поддерживать данную технологию и, кроме того, является довольно распространенным и наиболее часто используемым высокоуровневым кроссплатформенным языком программирования. Поэтому в тестовых данных будет сравниваться скорость работы алгоритма на языке Pascal со скоростью работы алгоритма при разном числе потоков на языке C++.



Рис. 1. Структура алгоритма компьютерного моделирования

Структура библиотечной функции на языке C++ приведена в виде блок-схемы на рис. 1. В ПК STF-ElectronMod полное описание параметров ЭМ задается на этапе ввода исходных данных. В библиотечную функцию передается часть необходимых параметров, таких как размер МПП, толщина и коэффициенты теплопроводности слоев, для каждого элемента описываются величины потребляемой мощности, геометрические размеры, координаты центра и положение относительно МПП.

На первом этапе на основе переданных параметров для каждой комбинации количества

членов m и n двойного ряда, получаемого косинус-преобразованием Фурье, производится расчет двумерной матрицы G [3–4]. На втором этапе на основе полученной матрицы G для каждого сочетания m и n рассчитываются постоянные коэффициенты, зависящие от положения элементов и параметров слоев МПП, но не зависящие от мощности потребления элементов [3–4]. На следующем этапе рассчитывается образ температуры, для определения которого используются найденные постоянные коэффициенты матрицы G и мощности на элементах, вычисленные с помощью подпрограммы [3–4]. Последний этап отвечает за вычисления элементов матрицы R , осуществляемых на основе вычисленного ранее температурного образа.

Время вычислений 1-го и 2-го этапов является незначительным и потому не нуждается в оптимизации. Основные вычислительные затраты приходятся на 3-й и 4-й этапы, которые и следует распределить между потоками. Отметим, что матрица R является симметричной, поэтому достаточно вычислить верхнюю или нижнюю треугольную матрицу, и затем отразить ее элементы относительно диагонали. В рассматриваемом случае вычисляется верхняя треугольная матрица.

Разработанная библиотека задействует максимальное число потоков, поддерживаемых системой, на которой в данный момент выполняется работа приложения с учетом возможности использования технологии multi-threading посредством функции OpenMP [8]. Нахождение верхней треугольной матрицы R распределяется по потокам построчно, начиная от верхней строки матрицы (с наибольшим числом элементов) и заканчивая нижней строкой, состоящей из одного элемента. Посредством такого распределения строк матрицы R по потокам обеспечивается равномерная балансировка загрузки многоядерного процессора. С помощью динамического планирования (dynamic scheduling) [8] каждый поток, завершивший подсчет строки матрицы R , приступает к вычислению не рассчитанной строки матрицы, не дожидаясь завершения подсчета других строк. Данная функция позволяет эффективно осуществлять распределение вычислений, так как разные потоки могут выполнять примерно равноценные вычислительные задачи за разное время, что связано в первую очередь с неравномерной загруженностью ядер процессора другими приложениями и их различной тактовой частотой. Последним этапом алгоритма является отражение треугольной матрицы R и передача ее из библиотеки в вызывающее приложение.

Приведем основные результаты тестового моделирования. Количество вычислительных операций не зависит от реального положения элементов на МПП, поэтому для сбора данных о скорости вычисления матрицы R достаточно задать количество элементов сверху и снизу МПП и количество слоев в ней. Остальные параметры задаются в тестовом варианте автоматически, а именно: элементы располагаются на МПП последовательно, а слои МПП имитируют слои в реальных системах с помощью чередования диэлектрических слоев из полиимида и тонких медных энергетических слоев. Таким образом, размеры МПП, элементов и центров элементов по оси координат X являются постоянными, а по оси Y вычисляются согласно количеству элементов ЭМ. Данные исследований показали также, что двойные ряды, получаемые в результате преобразования Фурье [3], являются быстросходящимися, поэтому для моделирования температуры с приемлемой для практики теплового проектирования точностью достаточно учитывать первые сто членов ряда.

Тестирование показало, что время, затрачиваемое на вычисления матрицы R , в малой степени зависит от числа слоев МПП, но довольно сильно зависит от количества элементов в математической модели ЭМ, поэтому основное тестирование проводилось при различном количестве элементов в системе. В качестве тестовой машины использовался компьютер под управлением ОС Windows 8.1 с 4-ядерным процессором Intel Pentium CPUN3540 с частотой 2,16 ГГц без поддержки технологии multi-threading. Для проверки правильности определения времени для каждого набора числа потоков и элементов при фиксированном количестве слоев МПП, равном 30, как наиболее часто используемом на сегодняшний день, было проведено

несколько замеров времени работы алгоритма и получено среднее значение. Результаты тестирования времени (с) работы библиотечной функции, вычисляющей матрицу R, приведены в табл. 1 и на рис. 2.

Таблица 1

Время работы библиотечной функции для вычисления коэффициентов матрицы R

Число потоков	Количество элементов матрицы R			
	50	100	150	200
1	5,2	19,7	45,1	75,8
2	2,6	9,8	21,8	38,2
3	1,8	6,6	14,7	26,1
4	1,4	5,3	11,6	21,0

Данные о времени работы функции, вычисляющей матрицу R на языке Pascal, представлены в табл. 2. Так как данная версия функции не учитывала симметричность матрицы R, то для чистоты сравнения было использовано среднее значение между испытаниями, деленное на два, поскольку вычисление полной матрицы производится практически в два раза медленнее, чем треугольной, включая ее отражение относительно диагонали матрицы.

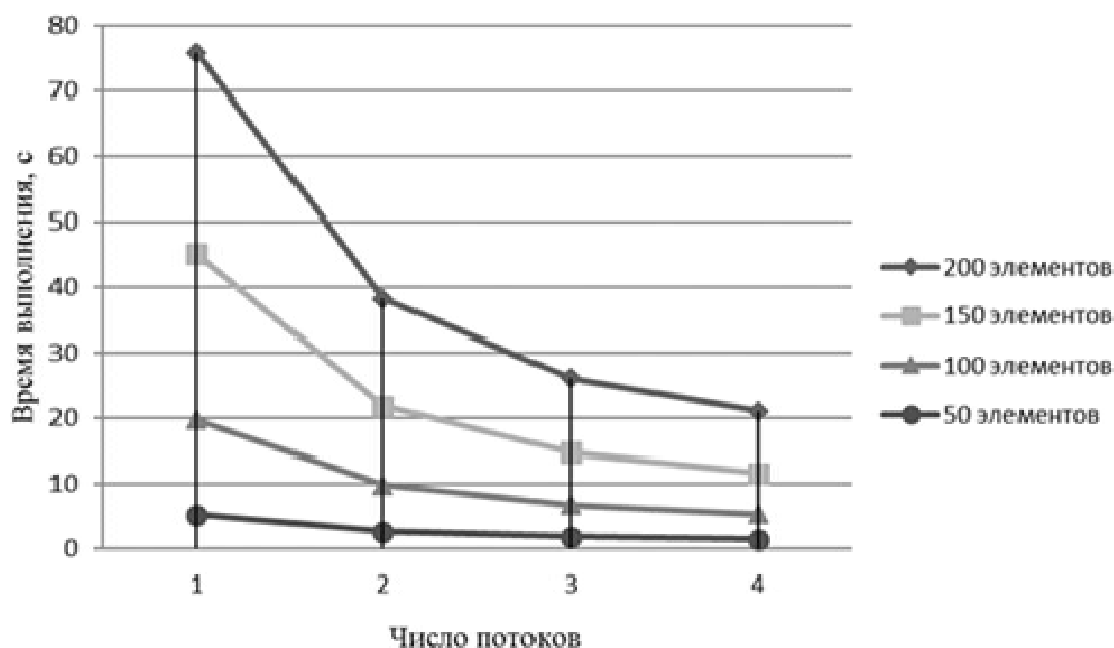


Рис. 2. Время вычисления матрицы R при разном числе потоков

Таблица 2

**Время работы функции для вычисления
коэффициентов матрицы R на языке Pascal**

Количество элементов матрицы R	50	100	150	200
Среднее время вычисления диагональной матрицы, с	8,3	31,6	70,6	128,9

Матрица R квадратично зависит от количества элементов, причем данная зависимость наблюдается и в скорости ее вычисления с помощью библиотеки, приведенной в табл. 1 и на рис. 2. С увеличением числа элементов время выполнения увеличивается более чем в 2 раза,

что связано с увеличением не только самой матрицы, но и с увеличением количества вычислений при нахождении ее элементов. Анализируя график, можно заметить, что при малом количестве элементов время вычисления в меньшей степени зависит от числа задействованных потоков. При 100–150 элементах в ЭМ наибольший прирост времени вычислений наблюдается при 2–3 потоках. Использование четырех и более потоков наиболее выгодно при количестве элементов, большем 150. Отметим также, что выигрыш в ускорении времени вычислений при использовании большего числа потоков постепенно сокращается, что обусловливается дополнительными задержками при получении и записи данных для каждого нового потока данных.

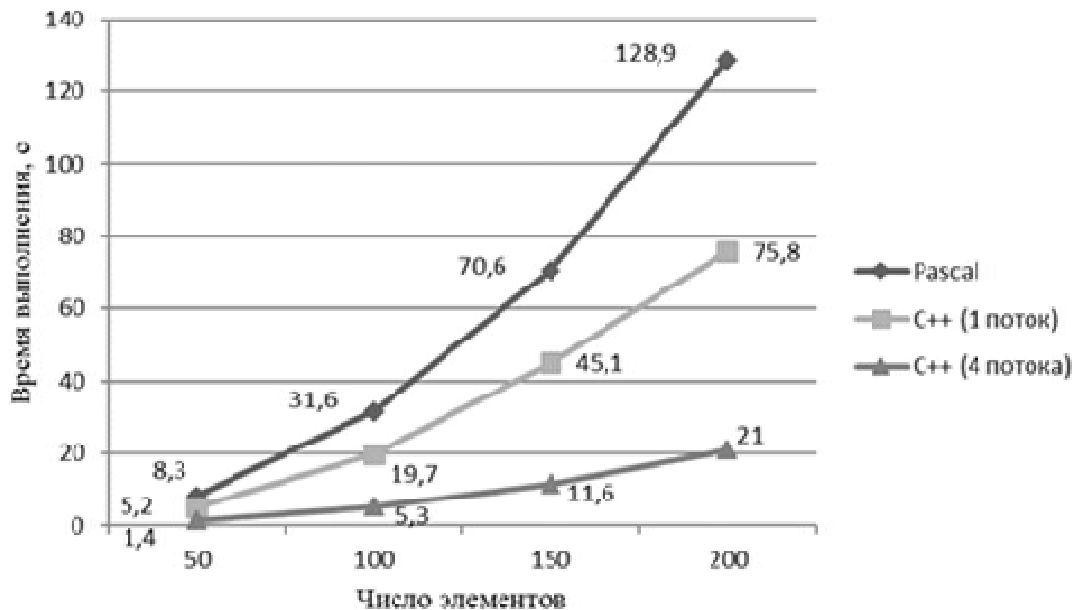


Рис. 3. Сравнение производительности алгоритма на языках C++ и Pascal

На рис. 3 отображена скорость работы библиотеки, написанной на языке C++, и скорость работы функции ПК STF-ElectronMod, написанной на языке Pascal. Согласно данным табл. 1 и 2 и рис. 3 выигрыш во времени исполнения библиотечной функции, написанной на C++, при одном задействованном потоке составляет не менее 30 % по отношению ко времени счета, осуществляемого по первоначально заложенной в ПК функции. Данное ускорение связано в первую очередь с возможностью компилятора, поддерживающего язык программирования C++, разворачивать циклы для выполнения задач в конвейере команд, что практически не используется в компиляторе Pascal. А при использовании всех четырех потоков скорость будет приблизительно в 6 раз выше для C++, чем для Pascal.

Литература

1. Мадера А. Г. Концепция математического и компьютерного моделирования тепловых процессов в электронных системах // Программные продукты и системы. 2015. № 4 (112). С. 79–86.
2. Мадера А. Г., Решетников В. Н. Многофункциональный программный комплекс теплового проектирования электронных систем: требования к архитектуре и функциональным возможностям моделирования // Программные продукты и системы. 2017. № 3 (30). С. 367–372.
3. Мадера А. Г., Кандалов П. И. Матрично-топологический метод математического и компьютерного моделирования температурных полей в электронных модулях: программный комплекс STF-ElectronMod // Программные продукты и системы. 2012. № 4. С. 160–164.

4. Мадера А. Г., Кандалов П. И. Моделирование трехмерных температурных полей в электронных модулях // Программные продукты и системы. 2010. № 2. С. 29–33.
5. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2015619835. Заявка № 2015613488. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 15.09.2015.
6. Уильямс Э. Параллельное программирование на C++ в действии: практика разработки многопоточных программ. М. : ДМК Пресс, 2016. 672 с.
7. Левин М. П. Параллельное программирование с использованием OpenMP : учеб. пособие / М. : ИНТУИТ ; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 188 с.
8. Хьюз К, Хьюз. Т. Параллельное и распределенное программирование с использованием C++. М. : Вильямс, 2004. 672 с.

УДК 612.746.4

РАСЧЕТ КВАЗИАТТРАКТОРОВ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЙ ЧЕЛОВЕКА

Т. В. Гавриленко, Д. В. Горбунов, Д. В. Белощенко, Ю. В. Башкатова
Сургутский государственный университет, gorbunov.dv@mail.ru

В оценке объективных различий произвольных и непроизвольных движений человека необходимы новые методы обработки данных. В этой связи предлагается метод расчета параметров квазиаттракторов в оценке нервно-мышечной системы человека. В ходе исследования были получены по 15 выборок треморограмм и теппинграмм от одного и того же испытуемого, находящегося в спокойном состоянии (релаксация). Для этих выборок строили матрицы парных сравнений и рассчитывали параметры квазиаттракторов. Как оказалось, число пар «совпадений» k крайне мало, но наблюдается устойчивая закономерность: для теппинга число одинаковых пар k в 2–3 раза больше в сравнении с матрицами полученных для треморограмм. В свою очередь, расчет параметров квазиаттракторов позволил точно установить различия между произвольными и непроизвольными движениями (объем V_{G2} для теппинграмм всегда значительно больше объема V_{G1} для треморограмм).

Ключевые слова: тремор, теппинг, квазиаттрактор.

CALCULATION OF QUASI-ATTRACTORS FOR PARAMETERS OF HUMAN MOVEMENTS

T. V. Gavrilenko, D. V. Gorbunov, D. V. Beloshchenko, Yu. V. Bashkatova
Surgut State University, gorbunov.dv@mail.ru

New methods of data processing are needed to assess the objective differences between voluntary and involuntary human movements. In this regard, a method for calculating the parameters of quasi-attractors in the evaluation of the human neuromuscular system is proposed. As part of the study for 15 samples of tremorogram and tappinggrams are obtained from the same subject in a calm state (relaxation). For these samples, the matrices of paired comparisons are built and the parameters of quasi-attractors are calculated. As it turned out, the number of pairs of “matches” k is extremely low, but there is a stable pattern: for tappings the number of identical pairs of k is 2–3 times higher compared to the matrices obtained for tremorograms. In turn, the calculation of the parameters of quasi-attractors has allowed us to establish differences between voluntary and involuntary movements (the volume V_{G2} for tappinggrams is always much larger than V_{G1} for tremorograms).

Keywords: tremor, tapping, quasi-attractor.

До настоящего времени остается открытым вопрос по установлению различий параметров движений человека. В 1947 г. Н. А. Бернштейн выдвинул гипотезу о «повторении без повторений» в своей известной книге «О построении движений» [1]. Как оказалось, в действительности он был прав, но количественного доказательства так и не было представлено. Спустя 70 лет удалось на практике доказать его гипотезу и представить ее количественное подтверждение в виде эффекта Еськова – Зинченко [2–9]. Однако этого недостаточно для решения задачи объективной оценки произвольных и непроизвольных движений, необходимы новые методы и подходы, которые сейчас имеются в рамках новой теории хаоса-самоорганизации и в виде эффекта Еськова – Зинченко (количественное описание гипотезы Н. А. Бернштейна о «повторении без повторений») [1].

Алгоритм расчета параметров квазиаттракторов для треморограмм и теппинграмм представлен на рис. 1. Из-за самоорганизующейся динамики поведения систем третьего типа по

W. Weaver [18] $x(t)$ обычно движется внутри некоторого особого объема фазового пространства, т. е. в общем случае получается неравенство $V_G^{max} \geq V_G^{max} \geq \prod_i^m x_i \geq V_G^{min}$ [9–15]. Таким образом, для расчета объема квазиаттрактора в m -мерном фазовом пространстве необходимо рассчитать все координаты. В представленном исследовании x_1 – реальная координата перемещения пальца в пространстве, x_2 – скорость изменения, x_1, x_3 – ускорения перемещения x_1 . В итоге имеется частный случай представленного алгоритма $V_G = \Delta x_1 \times \Delta x_2 \times \Delta x_3$ [13–17].

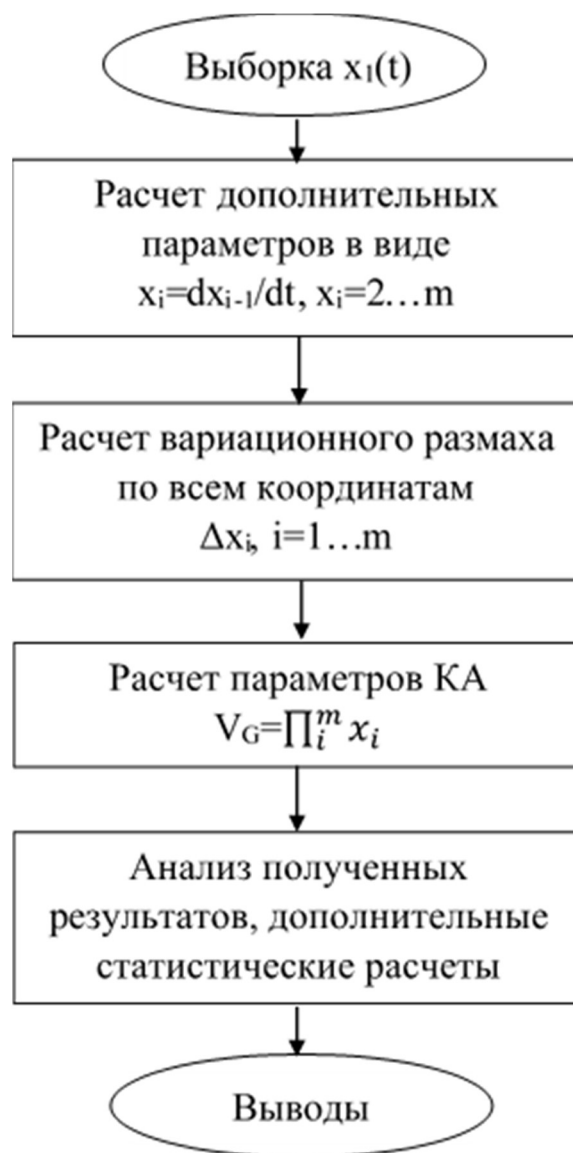


Рис. 1. Алгоритм расчета параметра квазиаттракторов

Сравнительная оценка произвольных и произвольных движений

В самом начале исследования, как было сказано ранее, строились матрицы парных сравнений для треморограмм и теппинграмм [11–15, 19]. Пример одной из таких матриц представлен в табл. 1. Очевидно, что здесь число пар «совпадений» (под словом «совпадения» понимается возможность отнесения двух выборок к одной генеральной совокупности) $k = 5$. Малое число «совпадений» пар свидетельствует о некой хаотической динамике изменения параметров движений человека. Из многократных повторов повторения таких матриц парных сравнений удалось установить закономерность, что число пар «совпадений» для треморограмм всегда $k_1 = 5-7\%$, а для теппинграмм $k_2 = 15-18\%$ [2–6].

Таблица 1

Матрица парных сравнений треморограмм испытуемого ГДВ, использовался непараметрический критерий Вилкоксона, число «совпадений» $k = 5$

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,43	0,26	0,00	0,00	0,00
4	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,13	0,00	0,00	0,00	0,00
7	0,00	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
8	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,16	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
9	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00
10	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,16	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
11	0,00	0,00	0,43	0,00	0,00	0,13	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00
12	0,00	0,00	0,26	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00
13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	0,00		0,00	0,22
14	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00
15	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,22	0,00	

Далее производились расчеты параметров квазиаттракторов в 3-мерном фазовом пространстве. Результаты расчетов представлены в табл. 2. Очевидно, что в представленной таблице можно легко установить различия между произвольными и непроизвольными движениями, здесь $\langle V_{G1} \rangle = 0,89 \times 10^{-8}$ у. е. для треморограмм против $\langle V_{G2} \rangle = 74,2 \times 10^{-8}$ у. е. для теппинграмм. Это демонстрирует объективное различие треморограмм от теппинграмм (по непараметрическому критерию Вилкоксона уровень значимости $p = 0,0006$, что свидетельствует о статистически значимой разнице между выборками объемов квазиаттракторов).

Таблица 2

Значения объема квазиаттракторов V_G для треморограмм и теппинграмм

№	$V_{G1} \times 10^{-8}$ для треморограмм	$V_{G2} 10^{-8}$ для теппинграмм
1	1,32	112
2	0,74	62,2
3	0,83	23,9
4	0,61	40,7
5	0,56	14,1
6	0,57	49,2
7	0,77	101
8	2,62	20,2
9	0,98	73,4
10	0,97	241
11	1,44	32,4
12	0,77	85,2
13	0,25	137
14	0,66	57,9
15	0,25	62,9
$\langle V_G \rangle$	0,89	74,2
Непараметрический критерий Вилкоксона $p = 0,0006$		

Выводы. В ходе проведенного исследования установлено, что эффект Еськова –Зинченко количественно описывает гипотезу Н. А. Бернштейна о «повторении без повторений». Установлено закономерное количество числа k пар «совпадений» при построении матриц парных сравнений для треморограмм и теппинграмм. В результате расчета параметра квазиаттракторов выявлено закономерное увеличение объема V_{G2} для теппинграмм в сравнении с V_{G1}

для теппинграмм. Таким образом, расчет матриц парных сравнений и расчет параметра квазиаттракторов V_G позволяет объективно установить различия произвольных и непроизвольных движений.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ мол_а 18-37-00113

Литература

1. Бернштейн Н. А. О построении движений. М. : Медгиз, 1947. 254 с.
2. Белощенко Д. В., Баженова А. Е., Щипицин К. П., Королев Ю. Ю. Эффект Еськова – Зинченко в организации непроизвольных движений человека в режиме повторения // Вестн. новых мед. технологий. 2017. Т. 24. № 1. С. 29–35.
3. Гавриленко Т. В., Якунин Е. В., Горбунов Д. В., Гимадиев Б. Р., Самсонов И. Н. Эффект Еськова – Зинченко в оценке параметров теппинга // Вестн. новых мед. технологий. 2017. Т. 24. № 1. С. 9–14.
4. Филатов М. А., Веракса А. Н., Филатова Д. Ю., Поскина Т. Ю. Понятие произвольных движений с позиций эффекта Еськова – Зинченко в психофизиологии движений // Сложность. Разум. Постнеклассика. 2016. № 1. С. 24–32.
5. Белощенко Д. В., Баженова А. Е., Щипицин К. П., Королев Ю. Ю. Эффект Еськова – Зинченко в организации непроизвольных движений человека в режиме повторения // Вестн. новых мед. технологий. 2017. Т. 24. № 1. С. 29–35.
6. Денисова Л. А., Прохоров С. А., Шакирова Л. С., Филатова Д. Ю. Хаос параметров сердечно-сосудистой системы школьников в условиях широтных перемещений // Вестн. новых мед. технологий. 2018. Т. 25. № 1. С. 133–142.
7. Есков В. В. Термодинамика неравновесных систем I. R. Prigogine и энтропийный подход в физике живых систем // Вестн. новых мед. технологий. 2017. Т. 24. № 2. С. 7–15.
8. Есков В. В., Пятин В. Ф., Ключ Л. Г., Миллер А. В. Гомеостатичность нейросетей мозга // Вестн. новых мед. технологий. 2018. Т. 25. № 1. С. 102–113.
9. Есков В. В., Пятин В. Ф., Есков В. М., Григорьева С. В. Особенности регуляции сердечно-сосудистой системы организма человека нейросетями мозга // Вестн. новых мед. технологий. 2018. Т. 25. № 1. С. 188–189.
10. Есков В. В. Проблема статистической неустойчивости в биомеханике и биофизики в целом // Вестн. новых мед. технологий. 2018. Т. 25. № 2. С. 166–176.
11. Есков В. М., Зинченко Ю. П., Филатов М. А., Есков В. В. Эффект Еськова – Зинченко опровергает представления I. R. Prigogine, J. A. Wheeler и M. Gellmann о детерминированном хаосе биосистем – complexity // Вестн. новых мед. технологий. 2016. Т. 23. № 2. С. 34–43.
12. Есков В. М., Зинченко Ю. П., Филатова О. Е., Веракса А. Н. Биофизические проблемы в организации движений с позиций теории хаоса-самоорганизации // Вестн. новых мед. технологий. 2016. Т. 23. № 2. С. 182–188.
13. Зинченко Ю. П., Филатова О. Е., Есков В. В., Стрельцова Т. В. Объективная оценка сознательного и бессознательного в организации движений // Вестн. новых мед. технологий. 2016. Т. 23. № 3. С. 31–38.
14. Прохоров С. В., Якунин Е. В., Белощенко Д. В., Башкатова Ю. В. Неопределенность параметров кардиоинтервалов испытуемого в условиях физической нагрузки // Вестн. новых мед. технологий. 2018. Т. 25. № 2. С. 176–188.
15. Eskov V. V., Gavrilenko T. V., Eskov V. M., Vochmina Yu. V. Static Instability Phenomenon in Type-Three Secretion Systems: Complexity // Technical Physics. 2017. V. 62. № 11. P. 1611–1616.
16. Eskov V. M., Bazhenova A. E., Vochmina Y. V., Filatov M. A., Ilyashenko L. K. Bernstein hypothesis in the description of chaotic dynamics of involuntary movements of person // Russian Journal of Biomechanics. 2017. V. 21. № 1. P. 14–23.

17. Prigogine I. R. The End of Certainty: Time, Chaos, and the New Laws of Nature. Free Press, 1997. 228 p.
18. Weaver W. Science and Complexity. Rokefeller Foundation. NY // American Scientist. 1948. № 36. P. 536–544.
19. Zilov V. G., Khadartsev A. A., Eskov V. V. and Eskov V. M. experimental study of statistical stability of cardiointerval samples // Bulletin of experimental biology and medicine. 2017. V. 164. № 2. P. 115–117.

УДК 004.8:004.6

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНАЯ ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ: АКСИОМАТИЧЕСКИЙ И МЕТРОЛОГИЧЕСКИЙ АСПЕКТЫ

Е. Е. Бизянов, А. А. Гутник

*Донбасский государственный технический университет, г. Алчевск, ЛНР
bpeeecs@gmail.com, hutnik.aa@gmail.com*

В статье проанализированы и уточнены определения для понятий «данные», «информация» и «интеллект» из зарубежных и отечественных источников. На сегодняшний день проблема обработки информации стала особенно актуальна в связи с повышением количества информации, которой оперируют экономические объекты и государственные организации. Были рассмотрены вопросы взаимосвязи понятий «данные», «информация» и «знания», проведен семантический анализ определений и выделены наиболее часто встречающиеся термины. Выявлено, что в понимании термина «данные» многими исследователями достигнут консенсус, в отличие от терминов «информация», «знание» и «интеллект». Проанализированы сложности, связанные с оцениванием интеллекта у компьютерных программ и систем, а также известные критерии оценивания уровня интеллекта. Рассмотрен метрологический аспект оценки интеллектуальности при обработке информации и выдвинуты критерии для такого оценивания. Проанализированы проблемы, возникающие при практической реализации средств для интеллектуальной обработки информации.

Ключевые слова: данные, информация, интеллектуальная обработка информации, критерии интеллектуальности.

INTELLIGENT INFORMATION PROCESSING: THE AXIOMATIC AND METROLOGICAL ASPECTS

E. E. Bizyanov, A. A. Hutnik

*Donbas State Technical University, Alchevsk, Luhansk People's Republic
bpeeecs@gmail.com, hutnik.aa@gmail.com*

The article analyzes and specifies existing definitions for the concepts “data”, “information” and “intelligence” using foreign and domestic sources. Currently the problem of information processing is especially relevant, resulting from the increase of amount of information that economic entities and state organizations are working with. The issues of the interrelationship of the concepts “data”, “information” and “knowledge” are considered. A semantic analysis of the definitions and the most frequently used terms is carried out. Many researchers have reached a consensus with the meaning of the term “data”, in contrast to the terms “information”, “knowledge” and “intelligence”. The complexities associated with the evaluation of intelligence in computer programs and systems are examined, and the criteria of intelligence are analyzed. The metrological aspect of evaluating intelligence during the information processing is considered and criteria for such an evaluation are established. The problems arising during the practical implementation of tools for the intelligent information processing are analyzed.

Keywords: data, information, intelligent information processing, criteria of intelligence.

На сегодняшний день объемы информации, хранящейся в базах данных информационных систем экономических объектов и поисковых систем, растут с огромной скоростью. Учитывая, что информацию нужно не только хранить, но и обрабатывать, используя только ту ее часть, которая необходима в конкретной ситуации, а также явную избыточность хранимой информации, особенно в Интернет [1–3], вопрос эффективной обработки информации становится все более острым.

В настоящее время понятие «обработка информации» закреплено в государственных и международных стандартах и включает ограниченный набор операций: хранение, поиск, анализ, оценка и воспроизведение [4]. К операциям поиска можно отнести фильтрацию, расчет характеристик информации, поиск зависимостей. К операциям обработки информации можно отнести преобразование (например, из одной формы представления в другую) и расчеты с ее использованием [4].

Однако просто выполнения перечисленных выше операций для обработки информации сегодня уже недостаточно. Ученые, инженеры, экономисты и менеджеры нуждаются в информации, которая, с одной стороны, представлена в максимально сжатой форме, а с другой – максимально детализирована. Именно поэтому внимание исследователей в настоящее время привлекает интеллектуальная обработка информации, которую также часто называют «интеллектуальным анализом данных» [4–5].

Целью статьи является анализ аксиоматической базы и формулирование критериев интеллектуальности для методов и моделей, используемых для обработки информации.

Аксиоматическая база

Понятие «интеллектуальная обработка информации» включает такие ключевые слова, как «интеллект» и «информация» («данные»). Дискуссии о том, что является первичным – данные или информация, информация или знания, начались достаточно давно и продолжаются до сих пор [6–7]. Для соединения этих понятий Р. Акофф в 1989 г. предложил модель, которая объединяет понятия «данные», «информация», «знания» и «мудрость» в виде иерархической пирамиды [6]. Она хотя и подверглась критике за то, что якобы упрощает переходы между уровнями пирамиды, не затрагивая при этом глубинных и сложных процессов преобразования и переходов между уровнями [7], однако в наглядной форме отражает концептуальные основы области обработки информации и преобразования ее в знания.

Данные рассматривают как сведения, обстоятельства, служащие для какого-нибудь вывода, решения [8]; факты и идеи, представленные в формализованном виде, позволяющем передавать или обрабатывать эти факты и идеи при помощи некоторого процесса [9]; необработанные зафиксированные результаты эксперимента [10]; представление информации в формализованном виде, за счет чего их можно передавать, обрабатывать и интерпретировать [11–12]; содержимое документов, закодированное для использования на компьютере [13]; наименьшую хранимую единицу информации, связанную определенным образом с каким-либо событием или явлением [13]; необработанные наблюдения о мире, собранные с минимальной контекстуальной интерпретацией [13]; результаты статистических наблюдений [13] и т. п.

Проведенный авторами анализ частоты встречаемости ключевых слов в работах [9, 14–19], а также аналогичный анализ статьи [13], приведенный в [20], показывают, что чаще всего данные связывают с «фактами», «накоплением», «использованием» и «наблюдением». Таким образом, несмотря на некоторые различия, существующие в определениях понятия «данные», сформулированных различными исследователями, есть много общих элементов, это говорит о том, что в понимании термина «данные» консенсус практически достигнут.

Переходя к понятию «информация», отметим, что для него существует более ста определений, используемых в различных отраслях науки и техники [9, 13–15, 20]. Целенаправленные исследования начались еще в XX в. в математике [16], связи [17], лингвистике и философии [21]. Рассмотрим только те определения, которые можно использовать в области обработки информации. Информация – это данные, которые были обработаны и представлены в форме, имеющей смысл для получателя [13]; сообщение, используемое отправителем для представления одной или нескольких концепций, предназначенных для увеличения знаний получателя [13]; упорядоченная коллекция разрозненных и/или несопоставимых данных [13]; любые данные, представленные в электронной форме, написанные на бумаге, высказанные на совещании или находящиеся на любом другом носителе, используемые для принятия решений

[12]; знание, которое уменьшает или устраняет неопределенность в отношении возникновения конкретного события из заданного набора возможных событий [11]. Общим в приведенных определениях является то, что информация – это обработанные данные, представленные в определенной форме (формате) и пригодные для обмена между создателями (генераторами) и потребителями (приемниками) информации, причем создателями и потребителями могут быть как люди, так и машины.

Частотный анализ слов в работах [4, 9, 14–20] показывает, что информацию чаще всего связывают с «данными», «процессами», «смыслом», «сообщением», «получателем», «отправителем» и «системой».

Как отмечалось выше, знание неразрывно связано с информацией и интеллектом. Считается, что знание – это информация, обрабатываемая за счет опыта получателя; совокупность фактов, событий, убеждений, а также правил, организованных для систематического применения [12]; обработанная информация, которая проверена практикой и используется для принятия решений [2]; структурированная и организованная информация, которая развивается внутри когнитивной системы или является частью познавательного наследия человека [13, 18]; средство для осмысленного выбора, которое находится внутри самой системы [13, 19].

Интеллект рассматривается и как средство для создания знаний на основе информации, и как потребитель знаний и информации [23]. Различные исследователи выделяют следующие аспекты интеллекта: способность применять знания и навыки [23]; способность правильно обрабатывать информацию в сложной среде [23]; генератор адаптивного поведения для достижения целей [23]; способность, позволяющая рассуждать, решать вербальные, математические и пространственные задачи, быстро обучаться и усваивать большое количество знаний [24]; способность выполнять анализ и синтез знаний, способность упорядочения данных и знаний с выделением существенных параметров, способность обучения на примерах, способность адаптироваться при изменении фактов и знаний [5].

Естественным желанием человека является желание оценить явления и объекты окружающего мира с использованием различных шкал, критериев, методов. И если данные и информацию можно оценить как количественно, так и качественно, то со знаниями и интеллектом дело обстоит гораздо сложнее. Так, в работах [25–26] предложены критерии для оценки уровня интеллекта: возможность приобретения знаний, способность получать и создавать новые знания, возможность хранения знаний; наличие интерфейса общения с человеком, наличие базы данных для хранения знаний, возможность обмена знаниями с другими интеллектуальными системами, возможность инициации новых знаний [26].

Отметим, что до сих пор в работах по искусственному интеллекту традиционно упоминается тест Тьюринга [27], который должен бы оценивать искусственный интеллект, хотя реально оценивает интеллект создателя компьютерной системы или программы. Кроме того, известны исследования по сравнению интеллекта компьютерных систем и человека, например, в работе [26] проведено оценивание интеллекта человека, суперкомпьютеров и поисковой системы Google на основе критериев приобретения, вывода, хранения и создания знаний. Однако еще И. Кант говорил о невозможности познать объективный мир полностью и непротиворечиво [28], следовательно, объективно оценить интеллект человека или компьютерной системы мы не сможем никогда. Но это не говорит о том, что такие оценки и критерии не нужны. Постоянное совершенствование теории интеллекта неизбежно вызовет появление новых критериев интеллектуальности, а развитие вычислительной техники будет способствовать внедрению в практическую деятельность методов и моделей интеллектуальной обработки данных и интеллектуального управления техническими и экономическими объектами.

Результаты. На основании определений из [9, 11–14] сформулируем определения для понятий «данные» и «информация».

Данные – факты и наблюдения, представленные в формализованном виде, пригодном для передачи, интерпретации и обработки.

Информация – структурированные и упорядоченные данные, представленные в форме, имеющей конкретный смысл для получателя в определенной среде или системе.

На основании определений из [12–13, 18–19] сформулируем определение для понятия «знание» в области обработки информации.

Знание – это совокупность информации и правил ее использования, на основе которых можно получить образ реального объекта, а также предсказать его возможные реакции на возмущения и входную информацию.

На основании определений из [5, 23, 24] сформулируем определение «интеллект».

Интеллект – способность на определенном уровне абстрагирования на основании полученной информации и имеющихся знаний проводить анализ, делать выводы, решать формализованные и неформализованные задачи, ставить задачи, обучаясь при этом на позитивных и негативных примерах из прошлого опыта, адаптируясь к изменениям во внешней среде.

Проведенные исследования терминологии позволяют сформулировать понятие «интеллектуальная обработка информации» с учетом ее реализации в компьютерных программах. Таким образом, интеллектуальная обработка информации – это применение группы методов и моделей, реализованных в виде компьютерных программ для поиска, анализа и оценки информации с использованием предметно-ориентированной базы знаний, включая операции по наполнению и упорядочиванию базы знаний, модификации в зависимости от исходной информации и изменения условий, самообучения и самооценки, сопровождающихся созданием и накоплением новых знаний, а также выделения наиболее существенных свойств объекта.

Метрологический аспект. Исходя из последнего определения, сформулируем критерии для оценки интеллектуальности методов, моделей и программ для обработки информации:

К1. Наличие предметно-ориентированной базы знаний.

К2. Идентификация входной информации (способность определять формат(ы) входной информации).

К3. Самообучаемость и самооценка (способность оценивать положительные и отрицательные результаты, полученные при обработке информации, и запоминать их в базе знаний (при необходимости)).

К4. Декомпозиция (способность выделять подзадачи для достижения цели обработки информации, выбирая при этом метод и модель, наилучшим образом подходящую для решения каждой из подзадач).

К5. Интерпретируемость (необходимость наличия человека как источника знаний в исследуемой предметной области для полной или частичной интерпретации результатов обработки информации).

К6. Модифицируемость используемых методов и моделей обработки (методы и модели обработки информации должны подвергаться постоянному улучшению по мере накопления фактов и знаний).

Проблемы практической реализации. В завершение рассмотрим ряд проблем, с которыми сталкиваются на практике разработчики программного обеспечения для интеллектуальной обработки информации.

Знания, как известно, со временем могут устаревать, аннулироваться, модифицироваться. По мере наполнения базы знаний время, затрачиваемое на поиск, изменение, удаление и упорядочение знаний будет постоянно возрастать. Для решения определенной проблемы человеческий мозг «забывает» ненужные в данный момент факты и знания, а в компьютерных системах управления базами данных используются механизмы индексации и кеширования. Однако компьютер хранит информацию до тех пор, пока мы ее не удалим принудительно. Следовательно, для систем интеллектуальной обработки информации необходимы механизмы, выявляющие устаревшие, давно не использующиеся знания и обеспечивающие их удаление (или архивацию). Конечно, наилучшим способом такой «чистки» было бы автоматическое удаление и обновление, однако на практике это реализовать достаточно сложно, так как требуется разработка новых методов и моделей для оценки знаний и управления ими. Поэтому одним из возможных путей решений могло бы стать наличие человека, по крайней мере, на первых этапах обучения системы интеллектуальной обработки информации.

Другой проблемой является разработка эффективного программного обеспечения для реализации интеллектуальной обработки информации. Увеличение тактовой частоты современных микропроцессоров и увеличение объемов оперативной и дисковой памяти часто создает у разработчиков иллюзию бесконечных и неограниченных возможностей. Однако то, что выглядит в математической записи, как простая формула, например, $\sigma_{Z>1000}(R_1 \cup R_2) \otimes R_3$, а в программе на языке высокого уровня может быть записано в виде оператора SQL, окончательно преобразуется в десятки, сотни байт машинного кода на уровне исполнимого файла. Следовательно, необходимо оптимизировать не только базы знаний, но и механизмы реализации хранящихся в них правил.

Заключение. Проведенный анализ существующей аксиоматической базы в области интеллектуальной обработки информации показал, что на сегодняшний день существует множество определений для понятий «данные», «информация», «знание» и «интеллект», что позволило уточнить указанные определения, а также сформулировать определение для понятия «интеллектуальная обработка информации». Для оценки интеллектуальности методов и моделей обработки информации предложены критерии, которые учитывают основные признаки интеллектуальности. Анализ проблем, которые возникают при практической реализации систем интеллектуальной обработки информации, показал необходимость уделять особое внимание постоянной актуализации знаний и механизмов их обработки.

Литература

1. Никошин Л. А. Избыточность информации в системах электронного документооборота // Электрон. средства и системы управления. 2005. № 2. С. 199–200.
2. Полудина В. П. Информационный шум в интернете как проблема потребления коммуникации // Журн. социологии и социал. антропологии. 2011. Т. 14. № 5. С. 386–394.
3. Смирнов Ю. В. Поисковые системы интернета и методы повышения качества обработки запросов при поиске научной информации в сети // Науч. и технич. б-ки. 2016. № 9. С. 79–87.
4. Кислова О. Интеллектуальный анализ данных: история становления термина // Украин. социолог. журн. 2011. № 1–2. С. 83–94.
5. Финн В. К. Об интеллектуальном анализе данных // Новости искусствен. интеллекта. 2004. № 3. С. 3–17.
6. Ackoff R. L. From data to wisdom // Journal of Applied Systems Analysis. 1989. V.16. P. 3–9.
7. Bernstein J. H. The Data-Information-Knowledge-Wisdom Hierarchy and its Antithesis // Proceedings North American Symposium on Knowledge Organization. 2009. V. 2. P. 68–75.
8. Ушаков Д. Н. Толковый словарь современного русского языка. М. : Аделант, 2014. 800 с.
9. Энциклопедия кибернетики : в 2 т. / отв. ред. В. М. Глушков [и др.]. К. : Гл. ред. УСЭ, 1974. Т. 1. 606 с.
10. Готтсданкер Р. Основы психологического эксперимента. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1982. 464 с.
11. ISO/IEC 2382:2015 Information technology. Vocabulary. Geneva : ISO Central Secretariat, 2015.
12. ГОСТ 33707-2016. Информационные технологии. Словарь. М. : Стандартинформ, 2016. 206 с.
13. Zins Ch. Conceptual approaches for defining data, information, and knowledge: Research Articles // Journal of the American Society for Information Science and Technology. 2007. V. 58. I. 4. P. 479–493.
14. Чернавский Д. С. Синергетика и информация. Динамическая теория информации. 3-е изд., доп. М. : Либроком, 2009. 304 с.
15. Аверкин А. Н., Гаазе-Рапопорт М. Г., Поспелов Д. А. Толковый словарь по искусственному интеллекту. М. : Радио и связь, 1992. 256 с.
16. Фишер Р. А. Статистические методы для исследователей. М. : Госстатиздат, 1958. 267 с.

17. Шеннон К. Работы по теории информации в кибернетике. М. : Изд-во иностр. лит., 1963. 830 с.
18. Peirce C. S. Collected papers of Charles Sanders Peirce [Электронный ресурс] C. Harts-horne & P. Weiss (Eds.), V. I–VI. 1931. URL: <https://colorysemiotica.files.wordpress.com/2014/08/peirce-collectedpapers.pdf> (дата обращения: 25.05.2018).
19. Capurro R., Hjørland B. The concept of information // *Annual Review of Information Science and Technology*. 2003. V. 37 (8). P. 343–411.
20. Badia A. Data, information, knowledge: An information science analysis // *Journal of the Association for Information Science and Technology*. 2014. V. 65. I. 6. P. 1279–1287.
21. Шалютин С. М. Искусственный интеллект: гносеологический аспект. М. : Мысль, 1985. 198 с.
22. Калягина Л. В., Разумов П. Е. Категория «данные»: понятие, сущность, подходы к анализу // *Вестн. КрасГАУ*. 2014. № 4. С. 3–8.
23. Legg Sh., Hutter M. A Collection of Definitions of Intelligence // *Frontiers in Artificial Intelligence and Applications*. 2007. V. 157. P. 17–24.
24. Carroll, J. B. Human cognitive abilities: a survey of factor-analytic studies. NY : Academic Press, 1993. 819 p.
25. Лябах Н. Н., Умрихин Н. Г. Методы оценки интеллектуальности компьютерных систем // *Вестн. ун-та. Гос. ун-т управления*. 2013. № 6. С. 54–58.
26. Liu F., Shi Y., Liu Y. Intelligence Quotient and Intelligence Grade of AI // *Annals of Data Science*. 2017. V. 4. I. 2. P. 179–191.
27. Тьюринг А. Может ли машина мыслить? М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960. 67 с.
28. Кант И. Критика чистого разума / пер. с нем. Н. О. Лосского с вариантами пер. на рус. и европ. языки. М. : Наука, 1999. 655 с.

УДК 004.946:620.22

РАСПРЕДЕЛЕННАЯ РЕАЛИСТИЧНАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ВИРТУАЛЬНЫХ СЦЕН С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕКСТУР ФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ МАТЕРИАЛОВ

А. В. Мальцев, М. В. Михайлюк

*Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт
системных исследований Российской академии наук
avmaltcev@mail.ru, mix@niisi.ras.ru*

Предложены распределенные методы для реалистичной визуализации (рендеринга) трехмерных виртуальных объектов с использованием вычислительных возможностей современных графических процессоров (GPU). Идея рассматриваемых решений заключается в моделировании отражения света от поверхностей объектов виртуальной среды с приближенной имитацией физических свойств их материалов. Задание таких свойств осуществляется с помощью нескольких текстур специального формата. Данные из этих текстур используются в пиксельном шейдере на GPU при расчете отраженного света, который выполняется по оригинальной вычислительной модели. Последняя представляет модифицированную BRDF модель Кука – Торренса и позволяет моделировать в виртуальной среде несколько различных типов источников освещения, а также тени от объектов. Созданные методы и алгоритмы основаны на использовании распределенных вычислений на современных многоядерных графических процессорах и поддерживают визуализацию сложных высокополигональных виртуальных сцен в масштабе реального времени, что обеспечивает их применимость в системах виртуального окружения и имитационно-тренажерных комплексах. На основе предложенных в работе решений реализованы программные модули для систем визуализации трехмерных сцен, позволяющие выполнять реалистичный рендеринг объектов виртуальных пространств.

Ключевые слова: визуализация, распределенные вычисления, шейдеры, виртуальный объект, текстура, материал.

DISTRIBUTED REALISTIC VISUALIZATION OF VIRTUAL SCENES USING TEXTURES OF MATERIALS' PHYSICAL PARAMETERS

A. V. Maltsev, M. V. Mikhaylyuk

*System Research Institute, Russian Academy of Sciences,
avmaltcev@mail.ru, mix@niisi.ras.ru*

The paper proposes distributed methods for realistic rendering of three-dimensional virtual objects using computing abilities of modern graphics processors (GPU). The idea of the considered solutions is to simulate a light reflected from surfaces of virtual environment objects with approximate imitation of their materials' physical properties. Specifying of such properties is done by means of several textures with special format. Data from these textures are used in pixel shader when reflected light is calculated on GPU by own illumination model. The proposed model is the modification of the Cook-Torrance BRDF model and allows simulating in virtual environment both different light source types and shadows cast by objects. Created methods and algorithms are based on using of distributed computing on modern multi-core GPUs and support real-time visualization of complicated high polygonal virtual scenes. This provides their applicability in virtual environment systems and simulation-training complexes. Based on proposed solutions, software modules for 3D scene visualization systems are created. The modules allow performing realistic rendering of virtual environment objects.

Keywords: visualization, distributed computing, shaders, virtual object, texture, material.

Темпы развития цифровых технологий в современном мире способствуют широкому распространению компьютерного моделирования во многих научных и технических областях. Моделирование и рендеринг трехмерных виртуальных сцен применяются, также в тренажерных комплексах управления сложными техническими устройствами и системах виртуального окружения. Данные технологии активно используются для обучения управлению автомобилями, самолетами, кораблями и т. д. Предъявляемые к таким комплексам и системам требования к качеству и реалистичности визуализируемых изображений постоянно возрастают. Развитие вычислительных устройств, позволяющих быстро и эффективно решать задачи с высокой степенью распараллеливания, также не стоит на месте. Так, число ядер в современных графических процессорах (GPU) уже насчитывает несколько тысяч. Это открывает новые возможности для распределенного моделирования и реалистичной визуализации виртуальной среды в масштабе реального времени и делает создание новых методов и алгоритмов реалистичной визуализации трехмерных виртуальных сцен на GPU актуальным направлением научных исследований.

Одной из ключевых задач в визуализации виртуальных объектов является моделирование отражения света от их поверхностей. Большую роль в данном вопросе играет используемая вычислительная модель расчета освещенности. Как правило, если требуется быстрый рендеринг с синтезом кадров изображения трехмерной сцены в реальном времени, используются упрощенные модели такие, как модель Фонга [1] или Блинна [2]. Для достижения фотореалистичного качества служат различные типы глобальных моделей освещения [3–5]. Применение последних в тренажерных комплексах и системах виртуального окружения на данном этапе развития техники весьма затруднительно ввиду их очень высокой вычислительной сложности, препятствующей обеспечению режима реального времени. Упрощенные же модели не позволяют достичь желаемого уровня реалистичности синтезируемого изображения. Поэтому перспективным направлением развития систем визуализации в настоящее время является разработка и реализация новых методов и технологий PBR (physically based rendering), достаточно хорошо имитирующих физически корректное освещение, но соблюдающих при этом баланс между качеством картинки и скоростью синтеза кадра. Подобные решения применяются, например, в графических движках Unity и Unreal Engine 4 [6]. Однако эти и большинство других зарубежных разработок являются платными коммерческими продуктами и требуют приобретения специальных лицензий, что затрудняет их широкое использование при создании отечественных имитационно-тренажерных комплексов и систем виртуального окружения.

В данной работе предлагаются новые методы и подходы к реалистичной визуализации трехмерных виртуальных сцен в масштабе реального времени. В их основе лежит приближенная имитация физических свойств отражения света материалами объектов с использованием распределенных вычислений на многоядерных GPU по собственной модели расчета освещенности, за основу которой была взята BRDF модель Кука – Торренса. Далее рассмотрим предлагаемые решения более подробно.

Текстуры физических параметров материала

Для моделирования реалистичного отражения света от поверхностей виртуальных объектов в данной работе используется набор текстур, описывающих физические свойства материалов, из которых сделаны эти объекты. Общее количество текстурных карт в таком наборе может варьироваться для разных материалов, но четыре из них являются базовыми и должны присутствовать в каждом материале. К ним относятся текстуры T_{base} основного цвета (или альбедо), T_{met} металлических свойств материала, T_{rg} шероховатости поверхности и карта нормалей T_n .

Основываясь на зависимости свойств отражения света материалами от их способности проводить электрический ток, предлагаемый подход разделяет визуализируемые поверхности виртуальных объектов на металлические и неметаллические (диэлектрики). Особенности

чистых металлов является высокая отражательная способность падающих на их поверхность световых лучей и полное поглощение преломленного света. Последнее приводит к отсутствию диффузной компоненты в отраженном световом потоке. У диэлектриков же преобладающей составляющей отраженного света является именно диффузная, а сама отражательная способность довольно низкая. Отметим, что в природе существует также особый класс полуметаллов, но моделирование таких объектов в трехмерных виртуальных сценах выполняется очень редко, поэтому полуметаллы в этом исследовании не рассматриваются.

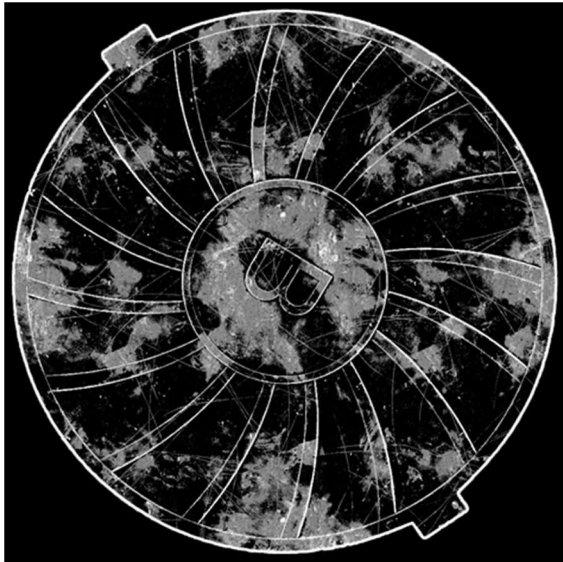


Рис. 1. Карта T_{met} металлических свойств материала

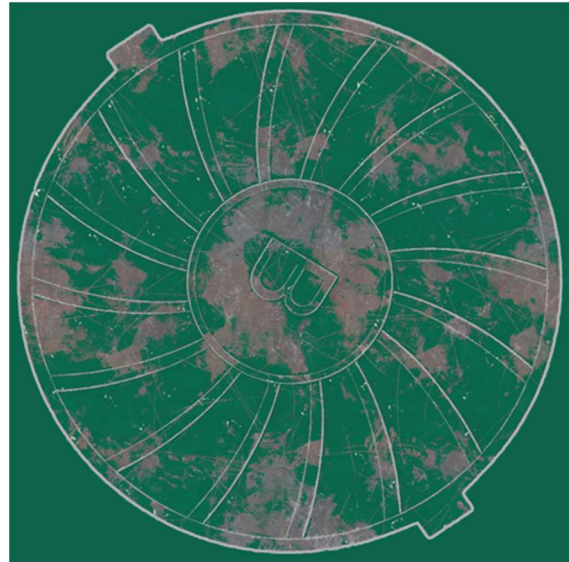


Рис. 2. Карта T_{base} основного цвета

Чтобы определить какие участки поверхности объекта являются металлом, а какие – диэлектриком, используется карта T_{met} металлических свойств материала (metallic map) (рис. 1). Она представляет собой текстуру в оттенках серого цвета, где белый цвет (значение 1.0) соответствует чистому металлу, черный (значение 0.0) – диэлектрику. Зачастую возникает необходимость моделирования металла, подвергшегося загрязнению или окислению. При высокой степени коррозии или загрязнения, как и в случае нанесенной на поверхность металла краски, по свойствам отражения он перестает быть металлом и отмечается в текстуре T_{met} значением 0.0. Легкие загрязнения снижают отражательную способность металла и задаются в T_{met} серым цветом со значением из диапазона (0.0, 1.0).

Карта T_{base} основного цвета (albedo map) (рис. 2) задается в виде трехканальной цветной текстуры и содержит информацию, различающуюся для металлов и диэлектриков. Те ее пиксели, которые соответствуют областям карты T_{met} , заданным как диэлектрик, хранят значения коэффициентов отражения света для R , G и B компонент диффузной составляющей отражения, т. е. определяют диффузный цвет материала. Пиксели, относящиеся к металлическим областям, определяют силу отражающей способности моделируемого металла в виде значений F_0 коэффициента Френеля для R , G и B компонент светового луча при нулевом угле его падения на поверхность. Для корректного визуального восприятия текстуры альбеда при ее отображении на устройствах вывода ее данные закодированы в цветовом пространстве sRGB. Поэтому перед их использованием с целью вычисления отраженного от поверхности объекта света важно осуществить преобразование данных из пространства sRGB в линейное пространство с помощью гамма-коррекции.

Карта T_{rg} шероховатости (roughness map) (рис. 3) является текстурой в оттенках серого цвета, задающей распределение микрограней на поверхности с рассматриваемым материалом.

Белый цвет (значение 1.0) при этом соответствует наибольшей степени шероховатости, а черный (значение 0.0) задает идеально гладкую поверхность.

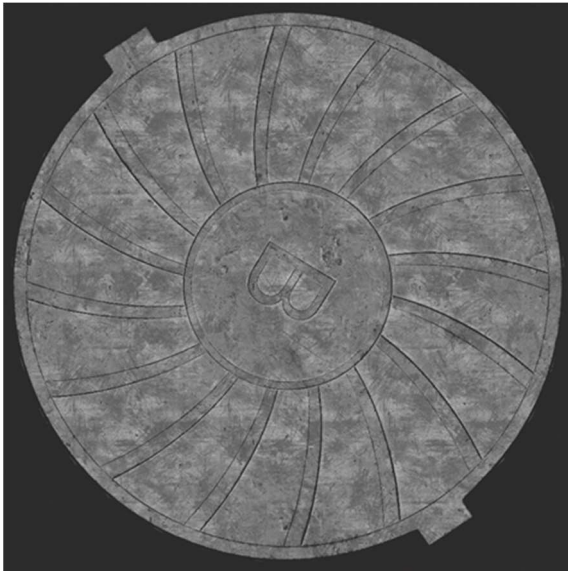


Рис. 3. Карта T_{rg} шероховатости

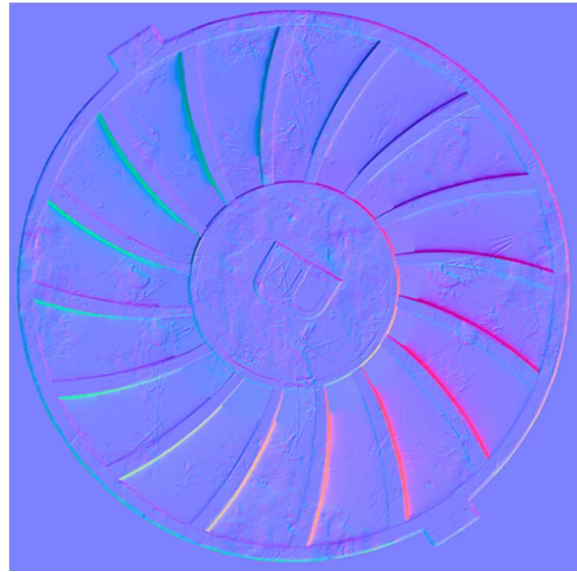


Рис. 4. Карта T_n нормалей

Карта T_n нормалей (normal map) (рис. 4) представляет собой текстуру, в каждом пикселе которой в цветовом формате закодирован вектор нормали, соответствующий точке поверхности, к которой применяется материал. 8-битные каналы R , G и B кодируют соответственно x , y и z компоненты вектора нормали. Значение каждого канала перед использованием конвертируется из целочисленного дискретного диапазона (0, 255) в непрерывный диапазон чисел с плавающей точкой (-1.0, 1.0).

Расчет отраженного света

Распределенный расчет интенсивности света, отраженного от поверхностей виртуальных объектов, на основе описанного набора текстурных карт выполняется с использованием шейдерной обработки на современных многоядерных графических процессорах. Для этого была разработана собственная математическая модель (подробно описана нами в работе [7]) для попиксельного расчета отраженного освещения, представляющая модификацию BRDF модели Кука – Торренса [8]. Она позволяет реализовывать различные типы источников освещения, а также тени с регулируемой плотностью, мягкостью и цветом. Согласно предлагаемой модели значения интенсивности отраженного освещения в точках объектов, соответствующих пикселям синтезируемого изображения виртуальной среды, вычисляются во фрагментном шейдере по формулам:

$$I_r = R_a I_a + \sum_{j=0}^m \left(F_{\lambda} I_j \max(0, L_j \times N) \left((1 - k_{sh,j})(1 - k_{met}) R_d + k_{sh,j} c_{sh} + f_{sh,j} k_{met} R_s \right) \right), \quad (1)$$

$$k_{sh} = d_{sh} \times f_{sh},$$

где I_r – искомая интенсивность в некоторой точке P поверхности объекта;

R_a – коэффициент отражения материалом рассеянного света;

I_a – интенсивность рассеянного света в виртуальной сцене;

m – общее число активных источников освещения;

I_j – интенсивность света от j -го источника освещения;

L_j – единичный вектор из точки P на j -й источник света;

N – единичный вектор нормали в точке P ;

k_{met} – доля зеркальной составляющей отражения;

R_d и R_s – отражаемые материалом в точке P диффузная и зеркальная составляющие света;

c_{sh} – цвет тени;

d_{sh} – коэффициент плотности тени;

f_{sh} – параметр, определяющий наличие или отсутствие тени в точке P ;

F_λ – функция, учитывающая различные типы и параметры источника света [7].

Вектор N в рассматриваемой точке P считается из карты T_n нормалей по текстурным координатам s и t , вычисляемым путем интерполяции известных текстурных координат в вершинах треугольного полигона, которому принадлежит точка P . Коэффициент k_{met} определяется по карте T_{met} металлических свойств материала с помощью тех же текстурных координат. R_d представляет собой цвет материала для диэлектриков и хранится в карте T_{base} основного цвета. Свет, зеркально отражаемый от поверхности, определяется по формуле:

$$R_s = \frac{D \times G \times F}{\pi(V, N) \times (L_j, N)},$$

где V – единичный вектор направления из P на наблюдателя;

D – функция для моделирования распределения микрограней на поверхности (при расчете используется значение параметра шероховатости, считываемое из карты T_{rg} шероховатости по текстурным координатам s и t);

G – функция для моделирования самозатенения микрограней;

F – функция расчета коэффициента Френеля, определяющего долю отраженной в точке поверхности энергии (при расчете используется коэффициент Френеля F_0 , который для металлов считывается из карты T_{base} основного цвета, а для диэлектриков приравнивается к усредненному значению 0,04). С подробным описанием используемых функций D , G и F можно ознакомиться в работе [7].

На рис. 5 продемонстрирован результат шейдерной визуализации виртуального объекта (крышки люка) с применением описанных подходов и набора текстур физических параметров материала, представленных на рис. 1–4.



Рис. 5. Результат шейдерной визуализации виртуального объекта

Заключение. В результате проведенных исследований были разработаны оригинальные методы и подходы для реалистичной визуализации трехмерной виртуальной среды с имитацией ряда физических свойств их материалов. Особенностью предлагаемых решений является широкое использование распределенных вычислений на современных многоядерных графических процессорах и проведение вычислений с помощью шейдерной модели последнего поколения, что обеспечивает рендеринг высокополигональных виртуальных сцен в масштабе реального времени. Предложенные решения реализованы в виде программных модулей и прошли успешную апробацию в составе системы визуализации, разработанной в ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-07-00950.

Литература

1. Phong B. T. Illumination for computer generated pictures // Communications of ACM. 1975. № 6. P. 311–317.
2. Blinn J. F. Models of light reflection for computer synthesized pictures // Proceedings of 4th annual conference on computer graphics and interactive techniques. 1977. P. 192–198.
3. Keller A. Instant radiosity // Proceedings of the 24th annual conference on Computer graphics and interactive techniques. 1997. P. 49–56.
4. Ritschel T., Dachsbacher C., Grosch T., Kautz J. The state of the art in interactive global illumination // Computer Graphics Forum. 2012. V. 31 (1). P. 160–188.
5. Jensen H. W. Global illumination using photon maps // Proceedings of the 7th Eurographics Workshop on Rendering. 1996. P. 21–30.
6. Karis B. Real Shading in Unreal Engine 4 [Электронный ресурс]. URL: <https://de45xmedrsdbp.cloudfront.net/> (дата обращения: 03.07.2018).
7. Мальцев А. В., Омельченко Д. В. Модель расчета отраженного света для имитации на GPU физически корректного освещения объектов виртуальной среды // Тр. НИИСИ РАН. 2018. Т. 8. № 4.
8. Cook R. L., Torrance K. E. A reflectance model for computer graphics // ACM Transactions on Graphics. 1982. № 1 (1). P. 7–24.

УДК 004.4

МОДЕЛЬ МУЛЬТИВЕРСИОННОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ИЗМЕНЕНИЯМИ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ В ИНФОРМАЦИОННЫХ ПРОЕКТАХ

Л. Р. Зарипова, К. И. Бушмелева

Сургутский государственный университет, bkiya@yandex.ru, zlr23.07@gmail.com

В работе представлена разработка модели мультиверсионной информационной системы управления изменениями программного обеспечения в информационных проектах (IT-проекты) с учетом рабочего времени посредством языка UML и сетей Петри. Данная модель взаимодействия пользователей и информационной системы управления изменениями IT-проекта была реализована с использованием UML-диаграмм. Также представлена интерпретация UML диаграмм в сети Петри, сделан анализ сетей Петри с помощью дерева достижимости.

Ключевые слова: мультиверсионная информационная система, информационные проекты, программное обеспечение, язык UML, сети Петри, UML диаграммы, дерево достижимости.

MULTIVERSION INFORMATION SYSTEM MODEL FOR MANAGING SOFTWARE CHANGES IN INFORMATION PROJECTS

L. R. Zaripova, K. I. Bushmeleva

Surgut State University, bkiya@yandex.ru, zlr23.07@gmail.com

The article considers the development of multiversion information system for managing software changes in information projects (IT-projects) and management of working time using the UML and Petri nets. This model of interaction between users and information system for managing software changes of an IT-project is implemented using UML diagrams. The interpretation of UML diagrams in Petri network is shown. Petri networks analysis using the reachability tree is made.

Keywords: multiversion information system, information projects, software, UML language, Petri nets, UML diagrams, reachability tree.

В настоящее время на рынке IT-технологий представлен огромный выбор информационных продуктов для быстрой и эффективной работы различных предприятий, которые необходимы для управленческой, экономической и технической деятельности.

IT-компании, используя в своей работе множество программных продуктов (ПП), разрабатывают различные подходы к интеграции нескольких программ для получения аналитической, управленческой отчетности по предприятию. В результате возникает проблема в управлении действиями, которые выполняются на этапах проектирования, разработки, тестирования и внедрения. В постоянных доработках программ теряется последовательность вносимых изменений, т. е. становится неясно, на основе какого технического задания произошли определенные изменения в ПП.

Целью данного исследования является разработка программного обеспечения (ПО) мультиверсионной информационной системы управления изменениями программного обеспечения в информационных проектах с использованием языка UML и сетей Петри.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

1. Проектирование программного обеспечения с использованием UML.
2. Анализ поведенческих UML-диаграмм с помощью сети Петри.

В работе получены следующие результаты, отличающиеся научной новизной: модель организации взаимодействия пользователей и мультиверсионной системы с использованием

языка UML и модель маркированной сети Петри для оценки вероятностных характеристик системы, которые позволят обеспечить выбор рационального варианта построения системы.

Создание информационной системы на основе совместного использования UML-диаграмм и сетей Петри проходило в несколько этапов:

- выбор и разработка требуемых UML-диаграмм;
- трансляция полученных UML-диаграмм в сети Петри;
- анализ дерева достижимости в сети Петри;
- корректировка UML диаграмм.

Для выбора и разработки UML диаграмм можно обратиться к работам [1–8], изучение которых позволило провести анализ диаграмм последовательности и активности с использованием сетей Петри [9] и выявить определенные правила преобразования, которые будем использовать в данной работе.

В состав организационной структуры реализуемого IT-проекта входят следующие группы: проектирование, разработка, тестирование и сопровождение. Рассмотрим сценарий работы мультиверсионной информационной системы в организации взаимодействий пользователей (рис. 1). На диаграмме последовательности показаны объекты и классы, используемые в сценарии, и последовательность сообщений, которыми обмениваются объекты для выполнения сценария. Сценарий – это единичный проход по потоку событий для прецедентов.

Далее необходимо наглядно отобразить методы классов с использованием диаграмм действий.

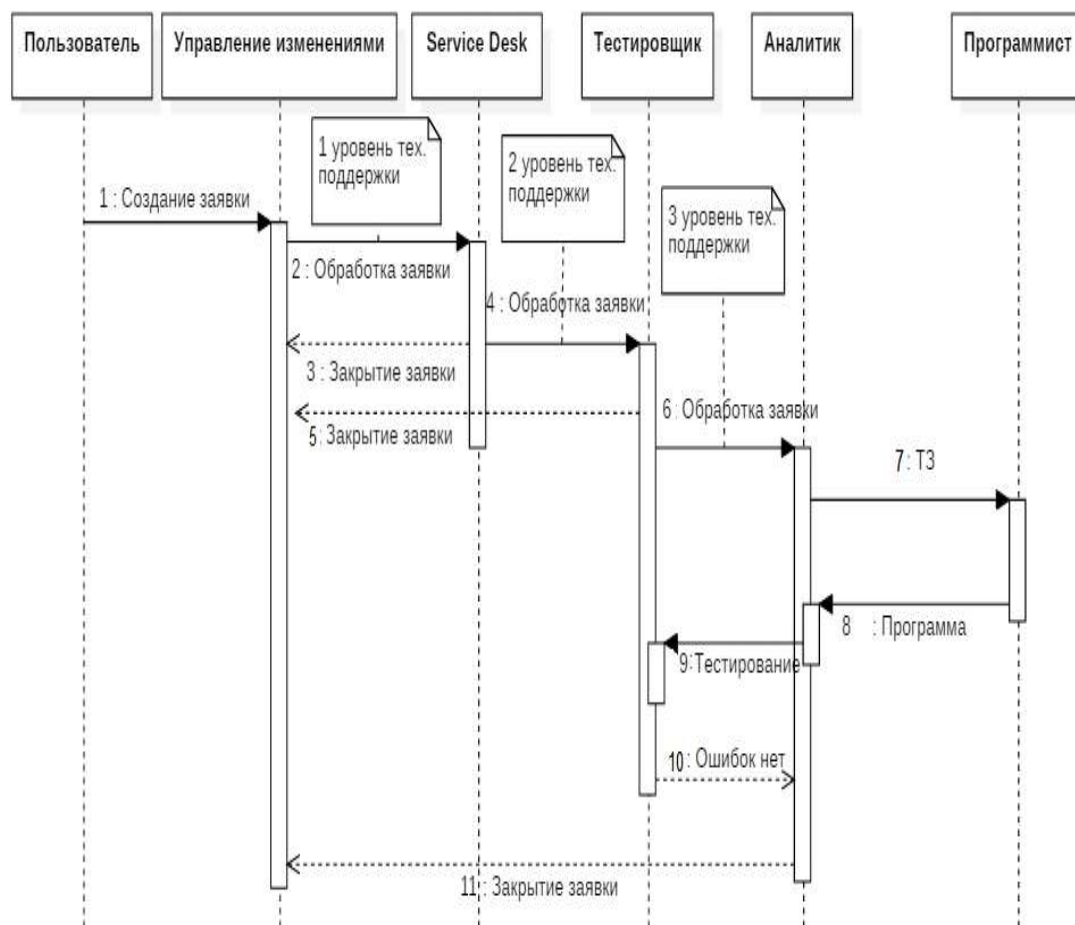


Рис. 1. Диаграмма последовательности

Рассмотрим диаграмму действий пользователей в реализуемой мультиверсионной информационной системе (рис. 2).

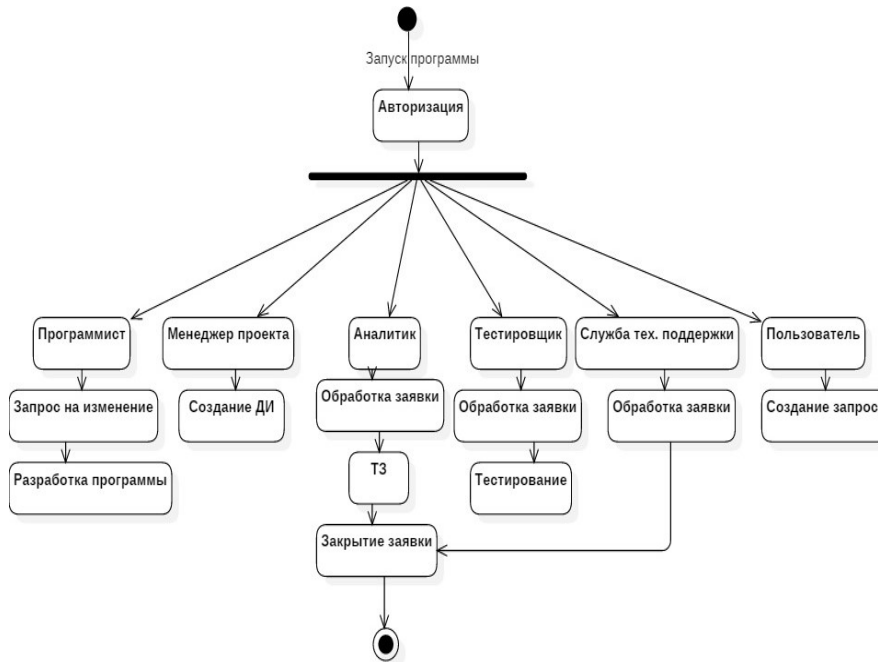


Рис. 2. Диаграмма действий пользователей в мультиверсионной информационной системе

Использование диаграммы действий применяется для линейного исполнения ПО и описания алгоритмической части информационной системы.

При разработке модели посредством сети Петри состояние действий диаграммы UML преобразуется в переход, отображающий начало действия, выполнение действия и завершающее действие.

В результате реализуемые модели организации взаимодействия пользователей и мультиверсионной системы с использованием языка UML и маркированной сети Петри для оценки вероятностных характеристик системы позволяют обеспечить выбор рационального варианта построения информационной системы.

На рис. 3 представлена маркированная модель сети Петри, позволяющая отобразить организацию взаимодействия пользователей и мультиверсионной системы.

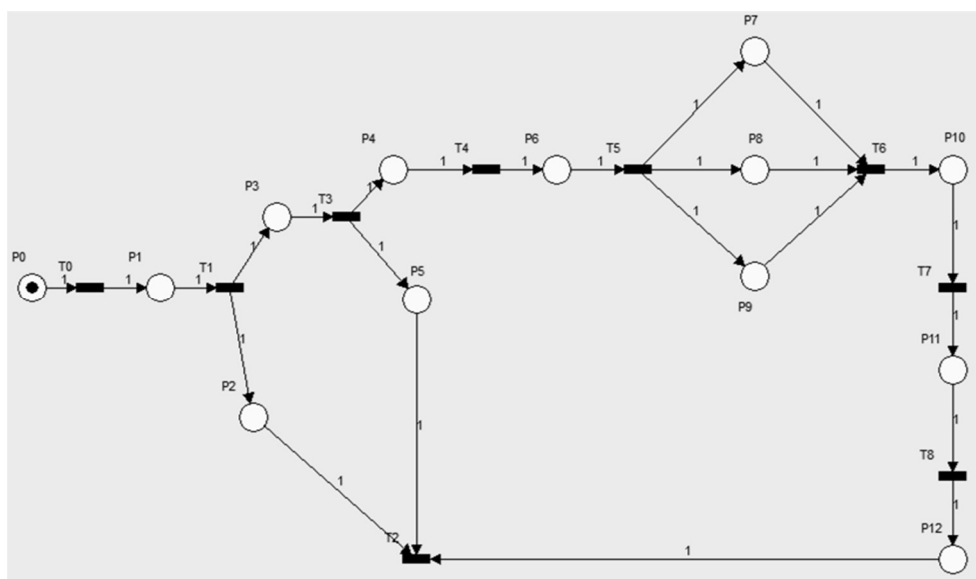


Рис. 3. Модель организации взаимодействия пользователей и мультиверсионной системы с использованием маркированной сети Петри

Анализ модели позволяет сделать вывод, что в начальный момент времени пользователь (заказчик) создает заявку, например, по ошибке в исходных данных в системе. Это показано наличием фишки в позиции P_0 и отсутствием других фишек в модели (табл. 1).

Таблица 1

**Интерпретация соответствия «позиция – событие – переход»
в мультиверсионной системе**

Позиция	Событие	Переход
P_0	Создание заявки	T_0
P_1, P_3	Обработка заявки	T_1, T_3
P_2, P_5, P_{12}	Закрытие заявки	T_2, T_9
P_4	Создание, редактирование ДИ (документа изменений)	T_4
P_6	Создание ТЗ	T_5
P_7, P_8, P_9	Доработка/разработка программы	T_6
P_{10}	Тестирование программы	T_7
P_{11}	Внедрение программы	T_8

При создании заявки срабатывает переход T_0 , и в позиции P_1 появляется новая фишка. Затем осуществляется переход T_1 , означающий обработку заявки. Далее фишка T_2 переходит в событие P_{12} , что приводит к закрытию заявки первым уровнем технической поддержки (в случае успешной обработки заявки). Если заявку не удалось решить, то происходит переход на 2 уровень технической поддержки, который обозначается переходом T_3 . В случае предложенного решения заявка переходит в событие P_5 , что соответствует закрытию заявки в системе. В событие P_4 создается или корректируется документ изменения проекта, к которому привязаны технические задания P_6 . В следующий момент времени осуществляется переход T_6 , в зависимости от требований ТЗ и как следствие программа разрабатывается или дорабатывается. Затем происходит тестирование программы (P_{10}), в случае успешного тестирования срабатывает переход T_8 . Закрытие заявки осуществляется в переходе P_{12} .

Следующей задачей исследования являлся анализ полученных результатов модели сети Петри с помощью построения дерева достижимости, который в свою очередь позволит наглядно показать эффективность работы мультиверсионной системы.

В общем виде дерево достижимости модели мультиверсионной системы, реализованной посредством сети Петри, представлено на рис. 4а, в результате добавления специализированной переменной x (рис. 4 б) происходит упрощение дерева достижимости.

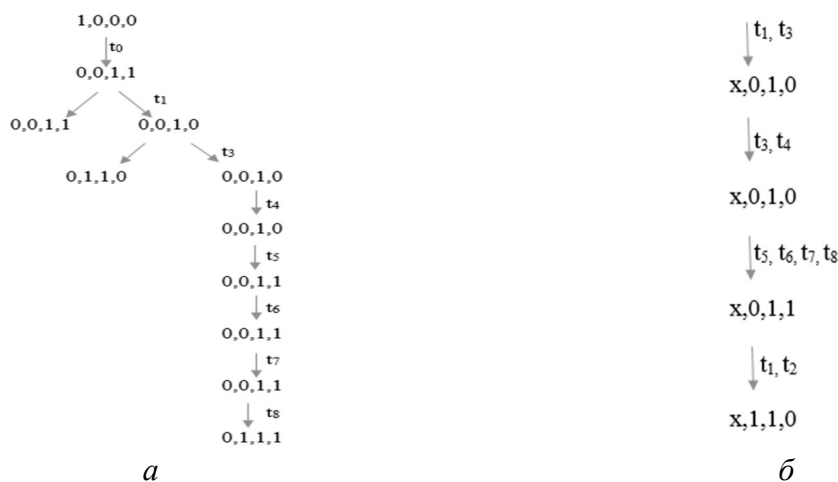


Рис. 4. Дерево достижимости модели

а – дерево достижимости модели на основе сети Петри;
б – представление дерева достижимости с использованием специальной переменной x

Необходимо отметить, что сети Петри также позволяют решать некоторые задачи анализа, такие как: безопасность, ограниченность, сохранение, покрываемость [1–2, 9].

Рассмотрим задачу покрываемости, которую решаем с помощью проверки дерева достижимости, для маркировки интенсивности обработки заявок μ' , в результате определяем маркировку достижимости $\mu'' \geq \mu'$, после чего находим такую вершину u , что выполняется условие $\mu[u] \geq \mu'$. Если бы результаты анализа показали, что такой вершины не существует, то маркировка μ' не являлась бы покрываемой. Однако в представленном дереве достижимости для данной системы такой вершиной u являются вершины t_1 и t_3 . Отсюда следует, что $\mu[u]$ дает достижимую маркировку, которая покрывает μ' . Путь от корня к покрывающей маркировке определяет последовательность переходов, которые приводят из начальной маркировки к покрывающей маркировке, а маркировка, связанная с этой вершиной, определяет покрывающую маркировку.

Заключение. Подводя итог можно отметить, что в результате проведенной работы была разработана модель программного обеспечения с использованием UML-диаграмм, проведен анализ поведенческих UML-диаграмм с помощью сети Петри, сделан анализ сети Петри с помощью дерева достижимости, которая в свою очередь позволяет решить задачу покрываемости мультиверсионной системы.

Литература

1. Пашковская Е. С. Математическое и программное обеспечение мультиверсионной информационной системы с универсальной структурой интерфейсов на основе маркированной сети Петри. URL: <http://www.dissercat.com/content/> (дата обращения: 09.07.2018).
2. Марков А. В. Автоматизация проектирования и анализа программного обеспечения с использованием языка UML и сетей Петри. URL: <http://www.dissercat.com/content/> (дата обращения: 04.07.2018).
3. Атисков А. Ю. Разработка технологии и программной системы автоматизированной трансформации диаграмм функционального проектирования в диаграммах UML. URL: <http://www.dissercat.com/content/> (дата обращения: 02.07.2018).
4. Новиков Ф. А., Иванов Д. Ю. Моделирование на UML. Теория, практика, видеокурс. СПб. : Профессионал. лит. ; Наука и Техника, 2010. 640 с.
5. Основы UML – диаграммы использования (use-case). URL: <https://pro-prof.com/archives/2594> (дата обращения: 13.07.2018).
6. Фаулер М., Скотт К. UML. Основы. СПб. : Символ, 2006. 184 с.
7. Буч Г., Максимчук Р. А., Энгл М. У., Янг Б. Дж., Коаллен Д., Хьюстон К. А. Объектно-ориентированный анализ и проектирование с примерами приложений / 3-е изд. ; пер с англ. М. : И. Д. Вильямс, 2010. 720 с.
8. Розенберг Д., Скотт К. Применение объектного моделирования с использованием UML и анализ прецедентов : пер. с англ. М. : ДМК Пресс, 2002.
9. Мараховский В. Б., Розенблюм Л. Я., Яковлев А. В. Моделирование параллельных процессов. Сети Петри: курс для системных архитекторов, программистов, системных аналитиков, проектировщиков сложных систем управления. СПб. : Профессионал. лит. ; АйТи-Подготовка, 2014. 400 с.

УДК 612.746.4:007

ТЕОРИЯ Н. А. БЕРНШТЕЙНА ОБ ОРГАНИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЙ И КИБЕРНЕТИЧЕСКИЕ МЕХАНИЗМЫ РЕГУЛЯЦИИ

В. А. Галкин, О. Е. Филатова, Т. В. Гавриленко, Д. В. Горбунов
Сургутский государственный университет, Gorbunov.dv@mail.ru

С позиций новой теории хаоса-самоорганизации доказана статистическая неустойчивость для подряд получаемых выборок любых биомеханических параметров. В первую очередь сюда относятся тремор, теппинг и выборки электромиограмм. Все это укладывается в новом эффекте Еськова – Зинченко, однако возникает вопрос о механиках такой устойчивости. Доказывается, что первичный статистический хаос возникает на уровне центральной нервной системы. Доказан хаос параметров электроэнцефалограмм. Тогда возникает закономерно двухкластерная кибернетическая схема регуляции движений: хаос в 1-м кластере управления порождает и суммирует хаос в эффекторном органе – нервно-мышечной системе. В итоге мы имеем в мышцах хаос более высокого порядка: если в электроэнцефалограммах число k пар совпадений выборок было большим ($k_1 \geq 25$), то в матрицах треморограмм и электромиограмм $k_2 \leq 10$, т. е. в 2–3 раза меньше. С позиций новой теории хаоса-самоорганизации доказано различие между верхним (ЭЭГ) и нижним (эффекторным) уровнями регуляции движений.

Ключевые слова: электроэнцефалограмма, эффект Еськова – Зинченко, организация движений.

BERNSTEIN'S THEORY ON REGULATION OF MOVEMENTS AND CYBERNETIC MECHANISMS OF REGULATION

V. A. Galkin, O. E. Filatova, T. V. Gavrilenko, D. V. Gorbunov
Surgut State University, Gorbunov.dv@mail.ru

The statistical instability for consecutive samples of any biomechanical parameters is proved from the perspective of the new theory of chaos-self-organization. First of all, these parameters include tremor, tapping and electromyogram samples which are within a new Eskov – Zinchenko effect. However, it raises the question about the mechanics of such stability. It is proved that the primary statistical chaos occurs at the level of the central nervous system. The chaos parameters of the electroencephalograms are proved. Then there is a natural two-cluster cybernetic scheme of regulation of movements: chaos in the 1st cluster management generates and summed the chaos in the end organ – the neuromuscular system. As a result, muscles have the chaos of a higher order: if in the electroencephalograms the number of k pairs of matching samples is large ($k_1 \geq 25$), then in matrices of tremorogram and electromyogram it is $k_2 \leq 10$, i.e. 2–3 times less. The difference between the upper (electroencephalogram) and lower (effector) levels of motion regulation is proved from the perspective of the new theory of chaos-self-organization.

Keywords: electroencephalogram, Eskov – Zinchenko effect, regulation of movements.

Введение. Прошло более 70 лет с момента выхода фундаментальной работы Н. А. Бернштейна «О построении движений» [1], но за этот период в биомеханике и науках о мозге в целом ничего существенного не произошло. Более 70 лет назад этот выдающийся физиолог и психолог предположил, что любое движение происходит без повторений, и предпринял попытку объяснения этой гипотезы – это была именно гипотеза, так как никаких доказательств отсутствия статистической устойчивости не было предоставлено ни выдающимся предшественником тогда, ни всей современной наукой сейчас. Он выдал только гениальную догадку о «повторении без повторений» в организации любого двигательного акта [2–7].

За этот большой период развития всей науки никто даже не попытался проверить гипотезу Н. А. Бернштейна о «повторении без повторений». Как оказалось [2–13], эта гипотеза была подтверждена эффектом Еськова – Зинченко (ЭЕЗ), а затем и эффектом Еськова – Филатовой (ЭЕФ). В этих эффектах доказано, что любая выборка треморограмм (ТМГ), теппинграмм (ТПГ) или электромиограмм (ЭМГ) одного испытуемого в неизменном гомеостазе является уникальной, ее невозможно статистически повторить [10–15].

Это означает, что вероятность совпадения любой j -й и $j+1$ -й выборки (соседних выборок) одного испытуемого в неизменном гомеостазе является крайне малой величиной ($p < 0,01$). В этом случае их статистические функции $f(x)$ не совпадают ($f_j(x_i) \neq f_{j+1}(x_i)$ с $p \geq 0,95$ или даже $p \geq 0,99$). С позиции теории вероятности это почти невозможное событие, и что же тогда все эти 150–200 лет изучали в биологии, медицине, психологии, экологии и других «нечетких» науках?

Если выборки уникальны, т. е. они хаотически формируются, тогда от опыта к опыту они другие, что и пытался сказать Н. А. Бернштейн в своей гипотезе о «повторении без повторений». Значит, для уникальных систем методы современной детерминистской и стохастической науки (ДСН) неприменимы. Предлагаем новые методы теории хаоса-самоорганизации (ТХС). Именно ТХС может описывать хаос ТМГ, ТПГ, ЭМГ и других параметров x_i гомеостаза [14–15].

Однако возникает вопрос: каковы механизмы этой стохастической неустойчивости, статистического хаоса получаемых подряд выборок от одного и того же испытуемого? Ответ на этот вопрос и представлен в рамках ТХС [8–12].

1. Хаос в нервно-мышечной системе вторичен. Прежде всего, напомним, как регистрируется хаос в нервно-мышечной системе (НМС) человека. Для этого необходимо многократно повторить измерения ТМГ, ТПГ или ЭМГ у одного и того же испытуемого в неизменном гомеостазе. После, например, 15 последовательных измерений мы получаем 15 таких выборок ТМГ или ЭМГ, и эти выборки входят в матрицу парных сравнений выборок. В таких матрицах парных сравнений выборок находим числа k совпадений пар этих выборок (например, табл. 1 для ТМГ и табл. 2 для ЭМГ). Обычно эти числа (k_2 для ТМГ и k_3 для ЭМГ в табл. 1, 2) существенно не отличаются и удовлетворяют неравенству k_2 (или k_3) ≤ 12 . Для ТПГ величина $k_4 \leq 18$, т. е. в 2–3 раза больше, чем для ТМГ, так как теппинг требует вмешательства сознания – это произвольное движение и доля стохастики выше.

Таблица 1

Матрица парного сравнения выборок треморограмм испытуемого ГДВ
(число повторов $N = 15$), использовался непараметрический критерий Вилкоксона
(критический уровень $p < 0,05$, число совпадений $k_2 = 5$)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.43	0.26	0.00	0.00	0.00
4	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
5	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00	0.13	0.00	0.00	0.00	0.00
7	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00
10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.16	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
11	0.00	0.00	0.43	0.00	0.00	0.13	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00
12	0.00	0.00	0.26	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00
13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00	0.00		0.00	0.22
14	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00
15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.22	0.00	

Таблица 2

**Матрица парного сравнения выборок ЭМГ одного испытуемого ГДВ
(число повторов N = 15) при слабой статической нагрузке разгибателя мизинца
правой руки (F₁ = 5 даН), использовался непараметрический критерий Вилкоксона
(критический уровень $p < 0.05$, число «совпадений» $k_3 = 12$)**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1		0.00	0.00	0.00	0.92	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.00		0.00	0.60	0.00	0.00	0.00	0.16	0.70	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.06	0.00	0.00	0.58	0.00	0.00	0.00	0.23	0.00
4	0.00	0.60	0.00		0.00	0.00	0.00	0.15	0.67	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
5	0.92	0.00	0.00	0.00		0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.00
6	0.02	0.00	0.00	0.00	0.03		0.00	0.47	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
7	0.00	0.00	0.06	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.20	0.00	0.00	0.00	0.04	0.00
8	0.00	0.16	0.00	0.15	0.00	0.47	0.00		0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
9	0.00	0.70	0.00	0.67	0.00	0.00	0.00	0.03		0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
10	0.00	0.00	0.58	0.00	0.00	0.00	0.20	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.04	0.00
11	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00
12	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00		0.00	0.00	0.63
13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00
14	0.00	0.00	0.23	0.00	0.03	0.00	0.04	0.00	0.00	0.04	0.00	0.00	0.00		0.00
15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.63	0.00	0.00	

Именно эти матрицы и доказывают статистическую неустойчивость выборок параметров НМС для одного испытуемого в неизменном гомеостазе. Эти матрицы показывают, что $f_j(x_i) \neq f_{j+1}(x_i)$ с вероятностью $p \geq 0,95$ (табл. 1, 2). Фактически мы имеем ограничение применения стохастики в физиологии НМС, впрочем, и в физиологии сердечно-сосудистой системы (ССС) тоже. Если стохастика не работает, как и вся современная детерминистская и стохастическая наука (ДСН), то возникает базовая проблема физиологии и всего естествознания в целом: каковы механизмы этого стохастического хаоса, и как описывать такие системы не в рамках ДСН?

Ответы на эти вопросы заключаются в изучении динамики поведения самих нейросетей мозга (НСМ), которые осуществляют управление любым двигательным актом, любым процессом в НМС, например, в виде выборок электроэнцефалограмм (ЭЭГ) [14–15].

2. Хаос в нейросетях мозга – первичный хаос в системах регуляции любых движений. Напомним, что Н. А. Бернштейн только подводил всю физиологию и кибернетику к пониманию реальности 5 систем регуляции движений [1] (системы А, В, С, D, E) и к невозможности их повторений в рамках ДСН. Это была гипотеза, а реальность заключена в табл. 1, 2, где нет произвольных статистических повторений любых движений (в виде тремора или ЭМГ). Оказалось, что аналогичные матрицы могут быть построены и для ЭЭГ, т. е. для НСМ.

В режиме 15 повторений регистрации ЭЭГ у одного и того же испытуемого в неизменном гомеостазе многократно получаем матрицы парных сравнений выборок ЭЭГ, подобных в табл. 1, 2. Для примера представляем матрицу в виде табл. 3, где число k_1 несколько больше, чем k_2 и k_3 . Однако эта величина в любом случае будет меньше 40 % от общего числа $N = 105$ независимых пар сравниваемых выборок. Хаос характерен и для НСМ в виде хаоса ЭЭГ. Подчеркнем, что этот хаос первичный, так как любой двигательный акт первоначально зарождается на уровне центральной нервной системы (НСМ находится в подчинении ЦНС и ВНД). Это второй важный кластер в организации любого движения, но это первый и главный кластер по значимости управления.

Таблица 3

Матрица парного сравнения ЭЭГ одного и того же здорового человека (число повторов N = 15) в период релаксации в отведении Fz-Ref, использовался непараметрический критерий Вилкоксона (значимость $p < 0.05$, число совпадений $k_1 = 25$)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1		0.00	0.03	0.29	0.65	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.71	0.19	0.64	0.00	0.00
2	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.03	0.00		0.15	0.19	0.11	0.00	0.00	0.00	0.02	0.79	0.00	0.88	0.00	0.00
4	0.29	0.00	0.15		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.40	0.07	0.48	0.00	0.00
5	0.65	0.00	0.19	0.00		0.65	0.00	0.00	0.00	0.10	0.31	0.00	0.38	0.00	0.00
6	0.00	0.00	0.11	0.00	0.65		0.00	0.02	0.00	0.22	0.34	0.00	0.68	0.00	0.00
7	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00	0.22	0.00	0.00	0.00
8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00		0.82	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
9	0.00	0.12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.82		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10	0.00	0.00	0.02	0.00	0.10	0.22	0.00	0.01	0.00		0.00	0.00	0.07	0.00	0.00
11	0.71	0.00	0.79	0.40	0.31	0.34	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.78	0.00	0.00
12	0.19	0.00	0.00	0.07	0.00	0.00	0.22	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00
13	0.64	0.00	0.88	0.48	0.38	0.68	0.00	0.00	0.00	0.07	0.78	0.00		0.00	0.00
14	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00
15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	

Таким образом, хаос в параметрах гомеостатических систем начинается с хаоса нейросетей мозга, с хаоса ЭЭГ, т. е. с 1-го кластера управления НМС. В неизменном гомеостазе уже НМС задают управляющие драйвы на НМС в виде хаотических сигналов, которые, однако, ограничены размерами площади квазиаттракторов S. В нашем случае при неизменном гомеостазе сохраняются статистически все 15 площадей КА для 15 ЭЭГ. Это считается закономерностью в ТХС, но для ДСН это невозможно. Напомним, что ТХС и ДСН находятся в антагонизме: если биосистема в ДСН находится в непрерывном изменении, то в ТХС она находится в покое – в неизменном гомеостазе, и наоборот. В ТХС мы изменяем понятия и законы поведения биосистем.

Заключение.

1. Хаос статистических функций в исполнительном органе – НМС, мышцах, является вторичным хаосом нижней второй кластерных систем. При этом произвольное движение (теппинг) имеет более высокие значения доли стохастики ($k_3 \geq 15$), чем хаос тремора или ЭМГ.

2. Центральная нервная система образует первый верхний кластер организации движения. Драйверы в виде ЭЭГ имеют большие значения k числа пар статистически совпадающих выборок ЭЭГ. Однако уже на втором уровне (кластере) мы имеем гораздо меньшие доли стохастики ($k < 10$ или даже $k < 5$), что можно трактовать как суперпозицию хаоса ЦНС (в виде ЭЭГ) и НМС, где хаос явно превалирует. Такая двухкластерная система сейчас апробируется как модель хаотического поведения НМС в виде сложной регуляции. Это реальная кибернетическая схема регуляции НМС.

3. Дальнейшее использование в теории НМС стохастики и всей ДСН неприменимо к живым системам. Особая динамика гомеостатических систем требует применения методов компартментно-кластерной теории биосистем, которая была разработана В. М. Еськовым в 80–90-х годах XX века. Эта пока единственная теория, позволяющая описывать хаос гомеостатических систем как статистическую неустойчивость.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ А 18-07-00162, мол_а 18-37-00113

Литература

1. Бернштейн Н. А. О построении движений. М. : Медгиз, 1947. 254 с.
2. Григоренко В. В., Еськов В. М., Лысенкова С. А., Микшина В. С. Алгоритм автоматизированной диагностики динамики возрастных изменений параметров сердечно-сосудистой системы при нормальном старении в оценке биологического возраста // Систем. анализ и управление в биомед. системах. 2017. Т. 16. № 2. С. 357–362.
3. Зилов В. Г., Хадартцев А. А., Иляшенко Л. К., Еськов В. В., Миненко И. А. Экспериментальные исследования хаотической динамики биопотенциалов мышц при различных статических нагрузках // Бюл. эксперимент. биологии и медицины. 2018. Т. 165. № 4. С. 400–403.
4. Зинченко Ю. П., Филатов М. А., Колосова А. И., Макеева С. В. Сравнительный стохастический и хаотический анализ параметров внимания учащихся в аспекте их работоспособности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 14. Психология. 2017. № 4. С. 21–33. DOI: 10.11621/vsp.2017.04.21.
5. Betelin V. B., Eskov V. M., Galkin V. A., Gavrilenko T. V. Stochastic volatility in the dynamics of complex homeostatic systems // Doklady Mathematics. 2017. Vol. 95. № 1. P. 92–94. DOI: 10.1134/S1064562417010240.
6. Eskov V. M., Eskov V. V., Vochmina J. V., Gavrilenko T. V. The evolution of the chaotic dynamics of collective modes as a method for the behavioral description of living systems // Moscow University Physics Bulletin. 2016. Vol. 71. № 2. P. 143–154. DOI: 10.3103/S0027134916020053.
7. Eskov V. M., Bazhenova A. E., Vochmina U. V., Filatov M. A., Ilyashenko L. K. N. A. Bernstein hypothesis in the Description of chaotic dynamics of involuntary movements of person // Russian Journal of Biomechanics. 2017. Vol. 21. № 1. P. 14–23.
8. Eskov V. M. Cyclic respiratory neuron network with subcycles // Neural Network World. 1994. Vol. 4. № 4. P. 403–416.
9. Eskov V. M. Hierarchical respiratory neuron networks // Modelling, Measurement and Control C. 1995. Vol. 48. № (1–2). P. 47–63.
10. Eskov V. M., Gudkov A. B., Bazhenova A. E., Kozupitsa G. S. The tremor parameters of female with different physical training in the Russian North // Human Ecology. 2017. № 3. P. 38–42.
11. Eskov V. V., Gavrilenko T. V., Eskov V. M., Vochmina Yu. V. Phenomenon of statistical instability of the third type systems – complexity // Technical Physics. 2017. Vol. 62. № 11. P. 1611–1616.
12. Eskov V. M., Eskov V. V., Vochmina Y. V., Gorbunov D. V., Ilyashenko L. K. Shannon entropy in the research on stationary regimes and the evolution of complexity // Moscow University Physics Bulletin. 2017. № 72 (3). P. 309–317. DOI: 10.3103/S0027134917030067.
13. Filatova D. U., Veraksa A. N., Berestin D. K., Streltsova T. V. Stochastic and chaotic assessment of human's neuromuscular system in conditions of cold exposure // Human Ecology. 2017. № 8. P. 15–20.
14. Khadartsev A. A., Nesmeyanov A. A., Eskov V. M., Filatov M. A., Pab W. Fundamentals of chaos and self-organization theory in sports // Integrative medicine international. 2017. Vol. 4. P. 57–65.
15. Zilov V. G., Eskov V. M., Khadartsev A. A., Eskov V. V. Experimental confirmation of the effect of "Repetition without repetition" N. A. Bernstein // Bulletin of experimental biology and medicine. 2017. Vol. 1. P. 4–8.

УДК 004.5

АСПЕКТЫ РАЗРАБОТКИ ЭРГОНОМИЧНОГО ИНТЕРФЕЙСА ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ

Е. А. Яценко

Сургутский государственный университет, elisia@yandex.ru

На современном этапе развития вычислительных систем пользователями программных продуктов являются представители практически всех возрастов и всех профессий, в отличие от середины прошлого столетия, когда общением с вычислительной техникой занимались исключительно специалисты, обладающие всеми знаниями, необходимыми для этого непростого в те времена процесса. Столь глобальная смена целевой аудитории обусловлена не в последнюю очередь развитием технологий взаимодействия с пользователем, появление графического интерфейса в свое время произвело революцию в области доступности работы с вычислительной системой широкому кругу потребителей. На сегодняшний день существует подход к разработке программных средств, где центральным объектом на всех этапах работ выступает не функционал и технические характеристики системы, а пользователь.

В работе представлен обзор основных понятий, связанных с разработкой эргономичного интерфейса пользователя прикладных программ; рассмотрены основные показатели пригодности использования программного продукта: результативность, эффективность и удовлетворенность. Перечислены возможные способы оценки указанных показателей, в том числе и метод семантического дифференциала, ранее не применявшийся для этих целей. Представлены основные виды проектировочной деятельности при человеко-ориентированном подходе разработки в соответствии с существующей стандартной документацией.

Ключевые слова: человеко-ориентированное проектирование, эргономика, пригодность использования программных средств.

DEVELOPMENT ASPECTS OF ERGONOMIC INTERFACE FOR USER OF APPLICATION PROGRAMS

E. A. Yatsenko

Surgut State University, elisia@yandex.ru

At the present stage of development of computer systems, users of software products are representatives of virtually all ages and all professions, unlike the middle of the last century, when communications with computers were exclusively handled by specialists who possessed all the necessary knowledge for this complicated process. Such a global change in the target audience is due not least to the development of user interaction technologies; the appearance of the graphic interface in its time revolutionized the availability of the computing system to a wide range of consumers. To date, there is an approach to the development of software, where the central object at all stages of work is not the functionality and technical characteristics of the system, but the user.

The paper provides an overview of the basic concepts associated with the development of an ergonomic user interface for application programs; considers the main indicators of the suitability of the use of the software product: effectiveness, efficiency and satisfaction. Possible ways of estimating these indicators, including the method of the semantic differential, which was not previously used for these purposes, are listed. The main types of design activities are presented in the human-oriented development approach in accordance with the existing standard documentation.

Keywords: human-centered design, ergonomics, usability of software tools.

На протяжении всей истории зарождения, становления и развития человечества в соот-

ветствии с многочисленными знаниями, полученными исследователями, мы и наши предки искали, придумывали и производили инструменты с целью упростить, облегчить, сделать лучше свое существование. На рис. 1. Представлены фотографии фрагментов одного из первых орудий труда – палки-копалки, фрагменты обнаружены в ходе археологических раскопок на территории современной Испании, место носит название Аранбальц (Aranbaltza). В ходе люминесцентного анализа был установлен возраст находки: 90 тыс. лет, что соответствует периоду обитания неандертальцев в соответствии с имеющейся на сегодняшний день периодизацией.



Рис. 1. Фрагменты палки-копалки

Микрокомпьютерная томография находки показала, что орудие труда было выполнено из тиса, его разломали продольно, обработали камнем и обожгли острие; применялась эта палка-копалка для рытья земли [1].

За сотни тысяч лет человек создал вокруг себя новый мир. Методы и средства адаптации элементов этого искусственного мира к особенностям человеческого рода в целом и индивидуальных особенностей его отдельных представителей стали значительно сложнее. Во второй половине XX столетия оформилась новая наука – эргономика, появилась Международная ассоциация эргономики (The International Ergonomics Association, IEA).

Международная ассоциация эргономики определяет эргономику как научную дисциплину, изучающую взаимодействие человека и других элементов системы, а также сферу деятельности по применению теории, принципов, данных и методов этой науки для обеспечения благополучия человека и оптимизации общей производительности системы [2].

Внедрение и эксплуатация новой техники и технологии породили ряд проблем, решить которые средствами технических и медицинских наук не удалось. Потребовались согласования рекомендаций психологии, физиологии, гигиены и организации труда, дизайна, что и послужило предпосылками возникновения и развития эргономики [3]. Современные орудия труда человека далеко ушли от рубил и палок-копалок, новые инструменты все чаще созда-

ются в рамках автоматизированных систем, при разработке которых одним из главенствующих принципов ставится технология взаимодействия с пользователем.

Для разработки методик создания эргономичных программных средств появился особый подход: человеко-ориентированное проектирование, его основные принципы изложены в стандарте, разработанном техническим комитетом ISO/TC 159 «Эргономика». Данный стандарт содержит руководство по человеко-ориентированному проектированию (human-centered design), основная цель подхода – повышение пригодности использования интерактивных систем. Под интерактивной системой понимается программно-аппаратный комплекс, обрабатывающий вводимые пользователем команды и/или данные, и формирует результат, способствующий решению стоящих перед потребителем задач [4].

Пригодность использования (usability) в соответствии со стандартом – свойство системы, продукции или услуги, при наличии которого установленный пользователь может применить продукцию в определенных условиях использования для достижения установленных целей с необходимой результативностью (effectiveness), эффективностью (efficiency) и удовлетворенностью (satisfaction). В свою очередь, результативность – степень реализации запланированной деятельности и достижения запланированных результатов, эффективность – связь между достигнутым результатом и использованными ресурсами, а удовлетворенность – отсутствие дискомфорта при использовании продукции и положительное отношение к ней [4].

Первые два показателя (результативность и эффективность) оценить значительно проще, нежели третий (удовлетворенность). Для оценки результативности применения системы существуют соответствующие методики [5–6]. Данную задачу можно решить, например, распределив веса между поставленными задачами, с последующим определением соотношения суммы весов реализованных задач к общей сумме весов поставленных задач.

Для оценки эффективности использования программного средства в практике существуют несколько подходов. В качестве критерия эффективности может быть выбрана скорость, с которой пользователь решает поставленную задачу, формулируется для каждого конкретного случая, например, следующим образом: за 3 часа работы оператор принимает 10 заявлений на выдачу паспортов, допуская с вероятностью 0,02 одну ошибку [7].

Для оценки эффективности интерфейса программного средства можно использовать критерий временных затрат, необходимых для изучения пользователем приложения с целью освоения технологии выполнения определенной задачи с помощью оцениваемого продукта. Например, оператор обучится оформлению заявления на выдачу паспорта с помощью данного программного средства в течении двух рабочих дней.

В литературе встречается также способ оценки эффективности интерфейса пользователя по критерию сохранения рабочих навыков после перерыва. Например, оператор после отпуска должен справиться с задачей оформления заявления на выдачу паспорта за 30 минут.

Для оценки удовлетворенности значительно сложнее сформулировать количественный показатель, применяются существующие методы для измерения качественных параметров, такой как введение шкалы. В данном случае мы можем предложить пользователю оценить общее впечатление о работе с приложением по шкале: 0 – дискомфортно, 1 – малоконфортно, 2 – приемлемо, 3 – комфортно, 4 – превосходно.

Возможно применение метода семантического дифференциала [8]. Данный метод был предложен Чарльзом Осгудом в 1952 г. и успешно применяется в исследованиях по психологии. Для оценки свойств интерфейса приложения пользователю может быть предложен для заполнения следующий бланк (рис. 2)

Удобно использовать	3	2	1	0	1	2	3	Неудобно использовать
Приложение легко в изучении	3	2	1	0	1	2	3	Приложение сложно в изучении
В приложении легко находить требуемые функции, элементы управления	3	2	1	0	1	2	3	В приложении сложно находить требуемые функции, элементы управления

Рис. 2. Пример бланка оценки интерфейса приложения пользователем

Подход человеко-ориентированного проектирования создан с целью увеличить результативность, эффективность, доступность и устойчивость систем, удовлетворенность пользователя и производительность его труда, а также предотвращения возможного неблагоприятного влияния использования систем на здоровье и безопасность человека.

Принципы человеко-ориентированного проектирования:

1. Проектирование должно быть основано на точном определении предполагаемых пользователей, задач и среды.
2. Пользователи должны быть вовлечены в проектирование и разработку.
3. Для улучшения проекта должна быть выполнена его человеко-ориентированная оценка.
4. Совершенствование проекта должно быть итеративным.
5. Проект должен учитывать опыт пользователя.
6. В группу проектирования должны быть включены специалисты с навыками и знаниями в различных областях.

Алгоритм построения работ проектирования при человеко-ориентированном подходе подразумевает отсутствие строгой последовательности между видами деятельности: понимание и определение условий использования, определение требований пользователей, разработка проектных решений, соответствующих требованиям пользователей, оценка соответствия проекта установленным требованиям (рис. 3). Каждый из перечисленных процессов подразумевает применение результатов остальных.

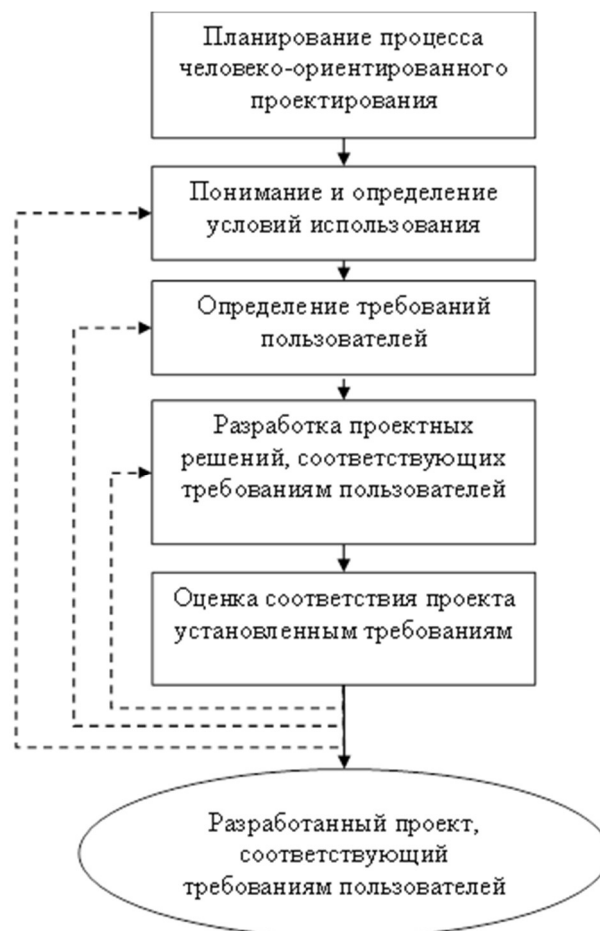


Рис. 3. Виды проектной деятельности при человеко-ориентированном подходе

В ходе определения условий использования прежде всего необходимо определить

пользователей и их основные характеристики, например, образование, знания, опыт, физические возможности; цели и задачи пользователей, а также среду системы. Описание задач пользователей должно включать и такие аспекты, как наиболее распространенный способ выполнения задач пользователями, взаимосвязь параллельно выполняемых действий, частота и продолжительность работ. Понятие среды системы включает аппаратное и программное обеспечение, особенности социального и физического окружения.

Планирование процесса человеко-ориентированного проектирования учитывает ряд обстоятельств, часто возникающих в практике разработки программных средств: неполноты требований, сформулированных в начале проектирования, некоторые требования возможно определить только при представлении готового решения.

Литература

1. Oldest Neanderthal wooden tools found in Spain. CENIEH // ScienceDaily. URL: www.sciencedaily.com/releases/2018/04/180403090050.htm (дата обращения: 20.08.2018).
2. Definition and Domains of Ergonomics // The International Ergonomics Association. 2018. URL: <http://www.iea.cc/whats/index.html> (дата обращения: 05.07.2018).
3. Адамчук В. В., Варна Т. П., Воротникова В. В. Эргономика // Адамчук В. В. Эргономика [Электронный ресурс] : учеб. пособие для вузов. М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2015. 254 с. URL: <http://www.iprbookshop.ru/52070.html>. ЭБС «IPRbooks» (дата обращения: 07.07.2018).
4. ГОСТ Р ИСО 9241-210-2012. Эргономика взаимодействия человек – система. Ч. 210. Человеко-ориентированное проектирование интерактивных систем (ISO 9241-210:2010 Ergonomics of human-system interaction. Part 210. Human-centered design for interactive systems (IDT)).
5. Радванская Л. Н., Удовиченко Л. В., Ходаков Д. В. Оценка эффективности интерфейса «пользователь – компьютеризированная система» // Радиоэлектроника и информатика. 1999. № 3 (8). С. 101–104.
6. Пригожев А. С. Особенности разработки и применения планирующей экспертной системы для обучения // Искусств. интеллект. 2005. № 3. С. 529–540.
7. Гульятеева А. К. Проектирование и дизайн пользовательского интерфейса. СПб. : Корона принт, 2007. 239 с.
8. Серкин В. П. Методы психологии субъективной семантики и психосемантики : учеб. пособие для вузов. М. : Пчела, 2008. 382 с.

ПОНЯТИЕ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ В СОВРЕМЕННОЙ НАУКЕ

В. М. Еськов¹, О. Е. Филатова¹, В. А. Галкин¹, Е. А. Манина²

¹ООО «Конструкторское бюро «Автоматизированные системы
и системный анализ», г. Сургут, firing.squad@mail.ru

²Сургутский государственный университет

Рассматриваются термины одинаковой и однородной группы в рамках трех подходов в науке: детерминистского, стохастического и с позиций теории хаоса-самоорганизации. Традиционный подход требует определенного равенства функций, траекторий и т. д., что для биосистем невозможно. Доказано, что в рамках детерминизма (точное совпадение траекторий движения вектора $x(t)$ в фазовом пространстве состояний), где аппаратом является функциональный анализ, и стохастики (две выборки параметров двух групп относятся к одной генеральной совокупности) модели неприменимы к медико-биологическим наукам. Точного равенства функций, включая статические, получить для биосистем невозможно из-за их гомеостатичности. С позиций новой теории гомеостаза вводятся особые критерии однородности группы. Для каждой выборки рассчитаны параметры *квазиаттракторов* (КА) и введены неравенства на вариации фазовых координат. Тогда КА параметров двух и более групп могут находиться в пределах одинаковых общих квазиаттракторов. Вводится критерий однородности по координатам центров этих КА. Аналогичны критерии и для термина «одинаковый», когда центры любого КА не показывают параметры (пределы) любого КА из однородной группы испытуемых. Представлен алгоритм для расчета однородности, основанный на расчетах центров и границ КА.

Ключевые слова: однородность физиологическая и математическая, квазиаттрактор, центр аттракторов.

CONCEPT OF HOMOGENEOUS SYSTEM IN MODERN SCIENCE

V. M. Eskov¹, O. E. Filatova¹, V. A. Galkin¹, E. A. Manina²

¹LLC "Design office "Automated Systems and Systems Analysis",
Surgut, firing.squad@mail.ru

²Surgut State University

The article considers the terms of the same and homogeneous group within the framework of three approaches in science: determinism, stochastics and the theory of chaos-self-organization. The traditional approach requires a certain equality (functions, trajectories, etc.), but this is impossible for biosystems. It is proved that determinism (exact coincidence of the trajectories of the motion of the vector $x(t)$ in the phase space of states), where the apparatus is a functional analysis, and stochastics (two samples of the parameters of the two groups belong to the same population) are not applicable to the medical and biological sciences. It is impossible to obtain exact equality of functions for biosystems (including static ones) because of their ultrastability. From the perspective of the new theory of homeostasis, special criteria for the homogeneity of the group are introduced. For each sample, the parameters of *quasi-attractors* are calculated and inequalities are introduced on the variation of the phase coordinates. Then the quasi-attractors of the parameters of two (or more) groups can be found in the same general quasi-attractors. A homogeneity criterion is introduced for the coordinates of the centers of these quasi-attractors. Similar criteria are used for the term "the same" when the centers of any quasi-attractor do not show the parameters (limits) of any quasi-attractors from a homogeneous group of subjects. The article presents an algorithm for calculating homogeneity, based on calculations of centers and boundaries of quasi-attractors.

Keywords: physiological and mathematical homogeneity, quasi-attractor, center of attractors.

Введение. Традиционно термин «одинаковый» в стохастике применяется для объектов и процессов, когда выборки параметров 1-го и 2-го гомеостаза сравниваемых объектов могут быть отнесены к одной генеральной совокупности. В этом случае с определенной вероятностью, например, $\beta \geq 0,95$, две такие выборки можно отнести к одной генеральной совокупности. При этом подразумевается, что такие объекты, например, два и более испытуемых, участвуют в некотором общем процессе. В медицине и биологии постулируется, что однородность группы базируется на гендерных признаках, возрасте, одинаковых эко-условиях. При этом четких математических критериев однородности экспериментальной группы в биомедицине нет [2–5].

Однако реальное понятие системы, состоящей из одинаковых однородных объектов, в современной медико-биологической науке требует уточнений и отдельного изучения. Морфо-функциональная и любая другая общность априори подразумевает однородность группы в биомедицине. До настоящего времени такие объекты – единицы сложной системы, считались однородными, если испытуемые были одинакового пола (однородность подразумевает и гендерную однородность), возраста или обладали сходными физиологическими (психическими) параметрами. При этом точных критериев включения в группу или исключения с позиций математики на сегодня нет. Сходные параметры организма являются ключевым термином во всей науке о живом, но само понятие «сходный» или «однородный» математически не определено.

Действительно, если объекты, которые объединяют в группы, не будут одинаковыми, группа будет неоднородной, состоящей из разных подсистем или объектов, то как такую неоднородную группу можно изучать? Это все равно, что в общую группу включать больных и здоровых людей при условии отсутствия гендерных различий. В настоящей работе первоначально показана существенная неоднородность любой группы испытуемых именно с позиций статистического подхода, который является базой всей современной биомедицины. Затем вводятся новые критерии однородности (одинаковости) элементов группы (системы), которые базируются на новых принципах стационарности биосистем и новой *теории хаоса-самоорганизации* (ТХС). Это раскрывает совершенно новые перспективы в изучении биосистем как *систем третьего типа* (СТТ) по классификации W. Weaver, 1947 г. [23]. Показано, что СТТ являются *гомеостатическими системами* (ГС) с особыми свойствами отсутствия статистической устойчивости, когда не совпадают подряд полученные выборки параметров x_i системы в неизменном гомеостазе [1–11].

1. Критерии одинаковости и однородности систем и процессов. В современной *детерминистской и стохастической науке* (ДСН) существует ряд функциональных понятий о неизменности и однородности систем. Подчеркнем, что в ДСН мы оперируем или с функциональным анализом, или с методами стохастики – статистическими функциями $f(x)$. В рамках детерминистского подхода – функционального анализа, однородность системы подразумевает одинаковость (сходство) элементов системы, которые ее образуют. Это традиционный подход, и он базируется на точных равенствах параметров $x_i(t)$. Общепринято в детерминизме простое равенство параметров, они образуют компоненты вектора состояния системы $x = x(t) = (x_1, x_2 \dots x_m)^T$ в *фазовом пространстве состояний* (ФПС) элементов биосистемы, т. е. $x_i = x_j$, где индексы i и j представляют номера элементов $i \neq j$ из общей (одной) полученной выборки параметров $x(t)$ в ФПС, так как $i = j$ – это тривиальное равенство, тождество.

Однако если мы говорим о динамике сложной гомеостатической системы, то это означает точное повторение траектории движения вектора состояния системы $x = x(t) = (x_1, x_2 \dots x_m)^T$ в ФПС. Иными словами, должна совпадать первая траектория (за Δt_1) и вторая траектория (за $\Delta t_2 = \Delta t_1$). Любое дифференциальное, разностное, интегральное и т. д. уравнение в рамках функционального анализа при неизменности самого этого уравнения и его начальных параметров $x(t_0)$ согласно задаче Коши должно точно повторять развитие процесса в ФПС неограниченное число раз. Траектории за Δt_1 и Δt_2 при $\Delta t_1 = \Delta t_2$ и неизменном $x(t_0)$ должны совпадать точно в ФПС, что выполнить для ГС невозможно в принципе, так как уже $x(t_0)$ невозможно

точно повторить – нет задачи Коши! [12–22]. Это составляет основу *эффекта Еськова – Зинченко* (ЭЕЗ) в биомеханике [2–9].

Единственное исключение было получено для дифференциальных уравнений во второй половине XX века в связи с открытием динамического хаоса Лоренца. Этот хаос может завершиться странным аттрактором, в котором конечное состояние $x(t_k)$ не совпадает. В этом хаосе задание уравнений $dx/dt = F(x, t)$ с повторяемыми начальными условиями $x(t_0)$ не определяет дальнейшую траекторию вектора $x(t)$ в ФПС и его конечное состояние $x(t_k)$. Получаемые при повторении решения дифференциальных уравнений $x(t_k)$ не совпадают. При этом и само уравнение, и $x(t_0)$ могут многократно повторяться, но $x(t_k)$ может определяться на равномерном распределении $f(x)$ в виде странного аттрактора со свойством перемешивания и положительными константами Ляпунова. Можно сказать, что хаос Лоренца является предельным значением статистического представления динамики процесса. В этом случае мы имеем сохранение статистической функции распределения $f(x)$, но она принимает равномерный характер.

В этой связи и в стохастике, а также в науке в целом возникает другое представление об одинаковости и однородности системы и процесса, происходящего с системой. В аттракторах Лоренца мы имеем равномерное распределение, и оно тоже, как в ДСН, повторяется. В любом случае для неизменности системы может быть $x_i \neq x_j$, но должны повторяться статистические функции распределения $f(x_i)$ для каждого компонента x_i вектора $x(t)$. Это общее требование неизменности системы в стохастике, означающее, что две сравниваемые выборки одной и той же координаты x_i можно отнести к одной генеральной совокупности. Но эти конечные статистические функции могут быть разными, включая и равномерное распределение Лоренца. Например, по критерию Вилкоксона, при $p \geq 0,05$ будем говорить о статистическом совпадении полученных выборок одного и того же компонента x_i вектора $x(t)$. Если для всех x_i , по всем выборкам x_i критерий Вилкоксона $p \geq 0,05$, то группа однородная. Группы, состоящие из таких элементов, с одинаковыми выборками x_i в разных испытаниях тоже будут однородными группами. Однако получить такую статистическую однородность в реальном биомедицинском исследовании оказалось очень сложно [12–22].

Легко увидеть, что критерии одинаковости (однородности) элементов системы в стохастике существенно отличаются от критериев в детерминизме. В стохастике мы имеем большие выборки и большие условности – совпадение идет по критерию $p \geq 0,05$. В детерминизме мы имеем строгое равенство, а в стохастике требуем, чтобы $p \geq 0,05$, и любое совпадение будет не точным, а с некоторой вероятностью $\beta \geq 0,95$. Однако здесь уже мы вступаем в область неравенств, а не равенств как в детерминизме. Правда, эти неравенства накладываются не на сами значения $x_i(t)$, а на их вероятности p (у нас требуется, чтобы $p \geq 0,05$). Переход от равенств к неравенствам впервые в физике совершил Гейзенберг в виде неравенства на сопряженные величины $x_1(t)$ и скорость $x_2 = dx_1/dt$ в виде $\Delta x_1 \times \Delta x_2 \geq k$, где k – некоторая константа для данной частицы с фиксированной массой m ($k = h/(4\pi m)$), где h – постоянная Планка. Подчеркнем, что переход от равенства к неравенству реально был осуществлен в ТХС в виде *эффекта Еськова – Зинченко* (ЭЕЗ).

2. Полная неопределенность координат x_i в ТХС. Действительно, в ТХС был введен второй принцип неопределенности для ГС в виде *квазиаттрактора* (КА). Такие КА задаются уже системой неравенств в виде $Z_{max} \geq \Delta x_1 \times \Delta x_2 \geq Z_{min}$, где Z_{min} и Z_{max} – некоторые константы, характеризующие состояние ГС в ФПС [9–14, 20–24]. Отметим, что эти неравенства являются сигналом соотношения Гейзенберга в квантовой механике, но они уже применены к ГС для любого начального диагностического признака x_i , входящего в $x(t)$ [1–12].

Появление такой неопределенности доказывается в биомеханике в виде эффекта Еськова – Зинченко, но сейчас в новой теории гомеостаза это распространяется на все регуляторные системы [8–14, 21–24]. В первую очередь речь идет о *нервно-мышечной системе* (НМС) и *кардио-респираторной системе* (КРС). Для примера представим доказательство ЭЕЗ для биопотенциалов мышц в виде *электромиограмм* (ЭМГ). ЭМГ генерируются мышцами, например, в неизменном статическом состоянии, в нашем примере сила сжатия мышцы *musculus adductor*

digiti mini (MADM) $F_1 = 50$ Н) для всех испытуемых из группы в 15 человек [1–11].

Полученные выборки ЭМГ (период квантования $\tau = 10$ мс, длительность регистрации $T = 5$ с, всего 500 точек ЭМГ в каждой выборке) от каждого из 15 испытуемых сравнивали по критерию Краскела – Уоллиса, и строили матрицу парных сравнений полученных выборок ЭМГ. В такой матрице 15×15 (табл.) обычно для ЭМГ число пар k бывает весьма невелико (эти две выборки относятся к одной генеральной совокупности по критерию Краскела – Уоллиса $p \geq 0,05$). Обычно $k < 10$, т. е. доля стохастики менее 10 % из всех 105 независимых пар сравнения.

Таблица

Непараметрический критерий Краскела – Уоллиса (p^*) для попарных сравнений выборок параметров ЭМГ для группы испытуемых из 15 ($k = 9$)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1		0,00	0,00	0,00	0,00	0,59	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00
2	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	0,00	0,00	0,00		0,00	0,11	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,06	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,59	0,00	0,00	0,11	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00
7	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
8	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,34	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
9	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,34		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
10	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,01	0,00	0,00
11	0,00	0,00	0,00	0,00	0,06	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00
12	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		1,00	0,00	0,00
13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	1,00		0,00	0,00
14	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00
15	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	

* Примечание: p – достигнутый уровень значимости (критическим уровнем принят $p < 0,05$).

Очевидно, что малые значения $k = 9$ в таких матрицах парных сравнений выборок доказывают высокую неоднородность всей группы из 15 человек (табл.). Получается, что их объединение в группу было фиктивным, так как число статистически сходных пар из всех 105 пар для ЭМГ крайне мало – менее 10 %. Очевидно, что правильный вывод для каждого примера с ЭМГ – группа неоднородна, выборки ЭМГ все различны, статистически не похожи между собой.

Возникает вполне законный вопрос: с чем связана такая неоднородность в динамике поведения ЭМГ? Одновременно возникает и второй вопрос: каковы должны быть критерии высокой однородности группы? Ответим на второй вопрос, так как первый связан с особыми физиологическими механизмами гомеостатического регулирования.

3. Новые методы формирования однородной группы в ТХС. Поскольку в ЭЕЗ доказано отсутствие статистической устойчивости выборок, в частности для одного испытуемого, находящегося в неизменном гомеостазе, вводим иные методы определения однородности группы. Эти методы базируются на расчетах параметров квазиаттракторов всех выборок ЭМГ для каждого испытуемого и сравнении координат центров КА с параметрами КА всей группы. Если любой из группы – в нашем случае 15 человек с ЭМГ – имеет свой центр КА так, что его координаты x_i^c не покидают пределы каждого из 15 КА, то группа считается однородной.

Кроме расчета координат центров КА необходимо также сравнивать и размеры КА. Критическими считаются пары КА, для которых объем V_G^1 для одного КА превышает V_G^2 для другого. Соотношение $\frac{1}{2} \geq V_G^1 / V_G^2 \geq 2$ должно нарушать признак однородности выбранной группы испытуемых. Отметим, что по этим критериям – выход центра любого КА из группы

за пределы V любого КА или нарушение неравенства $V_G^1 / V_G^2 \geq 2$, нужно автоматически освобождаться или от такой пары по объемам, или от одной выборки, если ее центр КА покидает любой КА из группы (см. табл.).

Выводы:

1. Поскольку любая группа испытуемых по параметрам статистики не является однородной, так как ее $k < 10$ – в нашем случае с ЭМГ, необходимы другие критерии оценки однородности экспериментальных групп в биомедицине. Эти критерии выходят за пределы традиционной статистики.

2. В рамках новой теории хаоса-самоорганизации предлагается рассчитывать параметры квазиаттракторов. По значениям объемов квазиаттракторов V_G и по координатам их центров можно определить однородность группы. Если объекты двукратно изменяются или центр любого из группы КА покидает объем любого КА, то эти изменения трактуют как нарушение однородности. В идеале такие выборки следует отбрасывать как не удовлетворяющие требованиям однородности группы. Методы ТХС выходят за пределы стохастики и всей ДСН.

Литература

1. Болтаев А. В., Газя Г. В., Хадарцев А. А., Синенко Д. В. Влияние промышленных электромагнитных полей на хаотическую динамику параметров сердечно-сосудистой системы работников нефтегазовой отрасли // Экология человека. 2017. № 8. С. 3–7.
2. Григоренко В. В., Еськов В. М., Лысенкова С. А., Микшина В. С. Алгоритм автоматизированной диагностики динамики возрастных изменений параметров сердечно-сосудистой системы при нормальном старении в оценке биологического возраста // Систем. анализ и управление в биомед. системах. 2017. Т. 16. № 2. С. 357–362.
3. Денисова Л. А., Прохоров С. А., Шакирова Л. С., Филатова Д. Ю. Хаос параметров сердечно-сосудистой системы школьников в условиях широтных перемещений // Вестник новых мед. технологий. 2018. Т. 25. № 1. С. 133–142. DOI: 10.24411/1609-2163-2018-15989.
4. Еськов В. В. Проблема статистической неустойчивости в биомеханике и в биофизике в целом // Вестник новых мед. технологий. 2018. Т. 25. № 2. С. 166–175. DOI: 10.24411/1609-2163-2018-16071.
5. Еськов В. В. Эволюция систем третьего типа в фазовом пространстве состояний // Вестник кибернетики. 2017. № 3 (27). С. 53–58.
6. Еськов В. В., Пятин В. Ф., Клюс Л. Г., Миллер А. В. Гомеостатичность нейросетей мозга // Вестник новых мед. технологий. 2018. Т. 25. № 1. С. 102–113. DOI: 10.24411/1609-2163-2018-15985.
7. Еськов В. В., Пятин В. Ф., Еськов В. М., Григорьева С. В. Особенности регуляции сердечно-сосудистой системы организма человека нейросетями мозга // Вестник новых мед. технологий. 2018. Т. 25. № 2. С. 188–199. DOI: 10.24411/1609-2163-2018-16073.
8. Козупица Г. С., Хадарцева К. А., Шелим Л. И. Теория хаоса-самоорганизации – фундамент развития общей теории систем // Сложность. Разум. Постнеклассика. 2018. № 1. С. 63–70. DOI: 10.12737/article_5aaa70db233d79.78842467.
9. Мирошниченко И. В., Прохоров С. В., Эльман К. А., Срыбник М. А. Сравнительный анализ хаотической динамики показателей сердечно-сосудистой системы пришлого детско-юношеского населения Югры // Вестник новых мед. технологий. 2018. Т. 25. № 1. С. 154–160. DOI: 10.24411/1609-2163-2018-15997.
10. Мирошниченко И. В., Башкатова Ю. В., Филатова Д. Ю., Ураева Я. И. Эффект Еськова – Филатовой в регуляции сердечно-сосудистой системы – переход к персонифицированной медицине // Вестник новых мед. технологий. 2018. Т. 25. № 2. С. 200–208. DOI: 10.24411/1609-2163-2018-16074.
11. Прохоров С. В., Якунин В. Е., Белощенко Д. В., Башкатова Ю. В. Неопределенность параметров кардиоинтервалов испытуемого в условиях физической нагрузки // Вестник новых мед. технологий. 2018. Т. 25. № 2. С. 176–187. DOI: 10.24411/1609-2163-2018-16072.

12. Пятин В. Ф., Еськов В. В., Алиев Н. Ш., Воробьева Л. А. Хаос параметров гомеостаза функциональных систем организма человека // Вестник новых мед. технологий. 2018. Т. 25. № 1. С. 143–153. DOI: 10.24411/1609-2163-2018-15990.
13. Зинченко Ю. П., Филатов М. А., Колосова А. И., Макеева С. В. Сравнительный стохастический и хаотический анализ параметров внимания учащихся в аспекте их работоспособности // Вестник Моск. ун-та. Сер. 14. Психология. 2017. № 4. С. 21–33.
14. Якунин В. Е., Белощенко Д. В., Афаневич К. А., Горбунов Д. В. Оценка параметров электромиограмм в рамках теории хаоса-самоорганизации // Сложность. Разум. Постнеклассика. 2017. № 1. С. 33–40. DOI: 10.12737/article_58ef6cb9774501.10816350.
15. Яхно В. Г., Горбунов Д. В., Булатов И. Б., Горбунов С. В. Термодинамика неравновесных систем И. Р. Пригожина в оценке параметров электромиограмм // Сложность. Разум. Постнеклассика. 2018. № 1. С. 71–79. DOI: 10.12737/article_5aaa71fb4ef8f9.94011446.
16. Eskov V. V., Filatova O. E., Gavrilenko T. V., Gorbunov D. V. Chaotic Dynamics of Neuromuscular System Parameters and the Problems of the Evolution of Complexity // Biophysics. 2017. Vol. 62. № 6. P. 961–966.
17. Eskov V. V., Gavrilenko T. V., Eskov V. M., Vochmina Yu. V. Static Instability Phenomenon in Type-Three Secretion Systems: Complexity // Technical Physics. 2017. Vol. 62. № 11. P. 1611–1616.
18. Eskov V. M., Filatova O. E., Eskov V. V., Gavrilenko T. V. The Evolution of the Idea of Homeostasis: Determinism, Stochastics and Chaos–Self-Organization // Biophysics. 2017. Vol. 62. № 5. P. 809–820.
19. Eskov V. M., Eskov V. V., Vochmina Y. V., Gorbunov D. V., Ilyashenko L. K. Shannon entropy in the research on stationary regimes and the evolution of complexity // Moscow University Physics Bulletin. 2017. Vol. 72. № 3. P. 309–317.
20. Eskov V. M., Zinchenko Y. P., Filatov M. A., Ilyashenko L. K. Glansdorff-prigogine theorem in the description of tremor chaotic dynamics in cold stress // Human Ecology. 2017. № 5. P. 27–32.
21. Filatova D. U., Veraksa A. N., Berestin D. K., Streltsova T. V. Stochastic and chaotic assessment of human's neuromuscular system in conditions of cold exposure // Human Ecology. 2017. № 8. P. 15–20.
22. Filatova O. E., Bazhenova A. E., Ilyashenko L. K., Grigorieva S. V. Estimation of the Parameters for Tremograms According to the Eskov – Zinchenko Effect Biophysics // Biophysics. 2018. Vol. 63. № 2. P. 125–130.
23. Weaver W. Science and Complexity // American Scientist. NY : Rokfeller Foundation, 1948. Vol. 36. P. 536–544.
24. Zilov V. G., Khadartsev A. A., Ilyashenko L. K., Eskov V. V., Minenko I. A. Experimental analysis of the chaotic dynamics of muscle biopotentials under various static loads // Bulletin of experimental biology and medicine. 2018. Vol. 165. № 4. P. 415–418. DOI: 10.1007/s10517-018-4183-x.

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ ПРИ ЭКСПЛУАТАЦИИ СКВАЖИН БАЖЕНОВСКОЙ СВИТЫ И ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТИ ПОДКЛЮЧЕНИЯ В РАЗРАБОТКУ РЕСУРСОВ НЕДРЕНИРУЕМЫХ ЗОН

Д. Т. Миронов, С. Г. Вольпин, В. А. Юдин

*Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт
системных исследований Российской академии наук, mdt1958@yandex.ru*

В статье рассматриваются применяемые и разрабатываемые отечественные технологические решения, такие как термогазовое воздействие (ТГВ), концепция внутрискважинного каталитического ретортинга (КВКР), которые позволят значительно увеличить эффективность выработки запасов баженовской свиты (БС). Приводится систематизация запасов и ресурсов углеводородного сырья в различных зонах пласта, что определяет необходимость индивидуального подхода к их изучению. Эффективная выработка запасов и ресурсов, включая добычу синтетических углеводородов, возможна при реализации методов увеличения нефтеотдачи (МУН). Для условий отложений БС показана необходимость осуществления непрерывного контроля за процессом при термогазовом воздействии (ТГВ) и других МУН.

Ключевые слова: термогазовое воздействие, МУН, баженовская свита, закачка кислородсодержащей смеси (воздуха, водовоздушной смеси), кероген – органическое вещество, дренируемые и недренируемые породы, концепция внутрискважинного каталитического ретортинга, КВКР.

TECHNOLOGICAL APPROACHES FOR BAZHENOV FORMATION WELLS OPERATION AND POSSIBILITY ASSESSMENT OF ADDITION OF RESOURCE RECOVERY FROM LOW-PERMEABLE ZONES

D. T. Mironov, S. G. Volpin, V. A. Yudin

System Research Institute, Russian Academy of Sciences, mdt1958@yandex.ru

The article considers existing and currently under development domestic technological solutions which allow enhancing oil recovery from the Bazhenov Formation. These solutions include thermal-gas treatment and intrastratal catalytical retorting concept. Brief characteristic of the Bazhenov Formation rock types and some parameters of oil and hydrocarbon saturated agents are discussed. Effective reserve recovery, including extraction of synthetic hydrocarbons, is possible with enhanced oil recovery methods (EOR). For conditions of deposits of the Bazhenov Formation, the need for implementation of process continuous control during thermal-gas treatment and other EOR methods is shown.

Keywords: thermal-gas treatment, EOR methods, the Bazhenov Formation, oxygen-containing mixture injection, kerogen, permeable and non-permeable formations, intrastratal catalytical retorting concept (ICRC).

Для освоения ресурсного потенциала нефтеносных отложений баженовской свиты (БС) требуется проведение значительного комплекса подготовительных и исследовательских работ как по выделению и структуризации ресурсов углеводородного сырья, так и по разработке основных подходов и методов воздействия на данные залежи для максимального вовлечения их в разработку.

Сегодня, когда роль и доля трудноизвлекаемых запасов значительно возросла, растет и необходимость работ по разработке и внедрению интегрированных технологических решений, направленных на комплексный подход при разработке данных запасов.

Сегодня уже проводятся испытания ряда технологий и пилотные проекты по разработке технологических решений для БС, из которых можно выделить три основных направления и их комбинации.

Первое направление включает проводимые с 2009 г. на опытных участках Средне-Назымского месторождения АО «РИТЭК» и ПАО «ЛУКОЙЛ» опытно-промышленные работы по испытанию термогазового воздействия, включающие закачку окислителя (кислорода воздуха) для инициирования внутрипластовых окислительных процессов, ведущих к формированию фронта вытеснения и теплового фронта (очагов горения) для воздействия, в том числе и на кероген-содержащие породы [1]. В данной технологии основная задача направлена на выбор и обоснование оптимальных комбинаций вытесняющих агентов и их сочетания, а также определение оптимальных подходов при формировании системы разработки (на первом этапе включает определение оптимальных режимов воздействия на пласт для различных зон). Подготовка и обоснование применения данного метода проводились ранее и для месторождений ПАО «Сургутнефтегаз» [2], однако дальнейшая информация о продолжении работ и возможных результатах испытаний отсутствует.

Второе направление – применение многостадийного гидроразрыва пласта (МГРП) в горизонтальных скважинах (ГС), по аналогии с активно применяемыми в США и Канаде МГРП для залежей сланцевого газа и нефти. Работы по данному направлению проводятся многими компаниями, включая ПАО «Сургутнефтегаз», ПАО «Газпром нефть», АО «РИТЭК» и другими, и направлены на использование естественного потенциала пласта с работой скважин на режиме истощения, что заведомо приводит к низкой нефтеотдаче.

Третье новое направление включает проведение определенной последовательности комбинаций термо-газо-химических методов и закачку различных агентов воздействия, в том числе находящихся в сверхкритическом состоянии. Комплексная технология планирует реализовываться в рамках проекта по КВКР и активно разрабатывается в подразделениях компании ПАО «Газпром нефть». Технология, пока определяемая авторами как концепция, направлена на проведение комплекса мероприятий с разрабатываемыми в настоящее время техническими средствами по проведению внутрипластового каталитического ретортинга (ВКР) и созданию внутрипластовой реторты в объеме, охваченном воздействием горизонтальной скважины [3].

Более детально особенности данной технологии, с точки зрения авторов данной статьи, будут приведены ниже. Пока, говоря о КВКР, надо отметить, что при условии безопасной реализации запланированных процессов и технических средств, возможно будет закачать в призабойную зону пласта (ПЗП) агенты с сохранением их в сверхкритическом состоянии. Это позволит значительно расширить объем воздействия на пласт (увеличить объем внутрипластовой реторты), реализовать ускоренный прогрев породы, формирование зон микротрещиноватости, доотмыв в этих зонах углеводородных компонентов. Но данное воздействие планируется реализовывать со стороны добывающих скважин и не направлено на формирование полноценной системы разработки с закачкой агентов и поддержанием пластового давления в пласте. В первом приближении КВКР близко к паротепловым обработкам скважин (ПТОС), применяемых на месторождениях высоковязкой нефти для интенсификации добычи.

Прежде чем перейти к анализу и более детальному рассмотрению технологических подходов и возможностей разработки данных отложений, кратко остановимся на описании свойств и основных характеристик пород БС.

Свойства и основные характеристики пород баженовской свиты

Оценка модели насыщения. В целом БС представляет собой нефтематеринскую породу, представленную осадочно-биогенными битуминозными отложениями, в которой продолжаются вторичные изменения, благодаря значительному содержанию керогенсодержащих пород.

В отложениях БС продолжается процесс пиролиза и преобразования керогена в более простые углеводородные компоненты, уже присутствует значительное количество легких газонасыщенных (в открытых порах) и более тяжелых углеводородных компонентов, в том числе битумоидов, малоподвижных и дегазированных, находящихся преимущественно в закрытых порах и состоящих из сложных смоло-асфальтен-содержащих углеводородных соединений. Порода также содержит значительное количество (до 20–30 % объема) твердого органического вещества (ОВ) керогена, нерастворимого в органических растворителях.

Как показали исследования кернового материала, в замкнутых порах породы БС, составляющих в исследованных образцах до 20 % от объема открытых пор, находится значительное количество углеводородов и углеводородных гетероатомных соединений [4]. Эти ресурсы (кроме твердого ОВ) можно условно отнести к остаточным (трудноизвлекаемым) запасам и разделить на нефти средней и высокой плотности [5].

Согласно пиролитическим исследованиям, проводимым на специальных установках (типа Rock-Eval), по мере нагревания определяются объемы и состав нефтей (углеводородных компонентов) данного типа, включающих тяжелые нефти и битумоиды.

Плотность «средних» нефтей изменяется в пределах 0,825–0,866 г/см³, с выходом легких фракций 19,0–30,0 %, содержание смол составляет 2,1–6,7 %, асфальтенов 0,1–1,7 %. Плотность тяжелых нефтей составляет 0,871–0,908 г/см³, они имеют высокие температуры кипения (более 100 °C). В них нет самых легких фракций и в большинстве содержится много асфальтенов.

Количество углеводородов (УВ), получаемых из закрытых пор при воздействии на пласт, можно оценить по результатам пиролитических исследований, которые характеризуются показателями S_1 и S_2 , причем показатель S_2 характеризует потенциальное количество дополнительной синтетической нефти, возможной к выходу из кероген-содержащей породы при нагреве в диапазоне температуры выше 320–350 °C. Исследования по определению S_1 и S_2 проводятся достаточно широко, отработаны и в основном позволяют оценить ресурсный нефтегенерационный потенциал данных пород. Принципиальный характер изменения объема углеводородных соединений, выделяющихся при пиролитическом (без доступа кислорода) нагреве показан на рис. 1 [6].

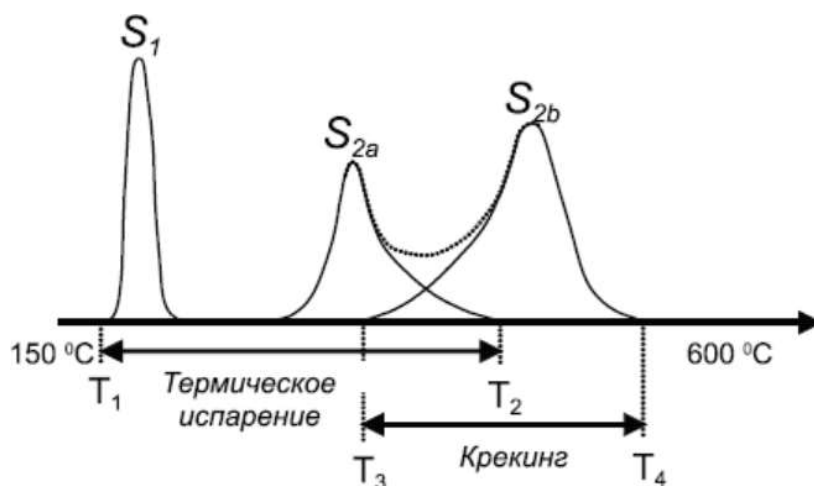


Рис. 1. Типовые диаграммы выхода УВ-соединений при пиролизе керогенсодержащих пород [6]

На рис. 1 приведены результаты исследований на установке Rock-Eval и показано, как тепловое воздействие на нефть и кероген-содержащую породу инициирует процессы, которые условно можно разделить на следующие:

- до 150 °C значительного тепловыделения и выхода УВ не происходит, но идут низкотемпературные окислительные процессы, изменение свойств и увеличение подвижности смеси;

- выше 150 °С начинается выход УВ (пики – S_1 и S_2) за счет извлечения компонентов из закрытых пор и структур керогена (включая газы), причем процесс можно разделить на две части – низкотемпературный процесс (пик S_1) – физический (освобождение УВ при формировании каналов выхода из закрытых пор) при T от 150 до 280 °С, и высокотемпературный процесс S_{2a} и S_{2b} при T от 320 °С, в котором при пиролизе происходит процесс генерации синтетических углеводородов (СУВ) из керогена.

Согласно результатам экспериментальных исследований кернов, отобранных из пород БС, при их нагреве до 250–350 °С из микротрещиноватой породы извлекаются УВ, объем которых сопоставим с количеством легкой нефти, содержащейся в дренируемой породе [7]. При тепловом воздействии на кероген наблюдается выход легкой нефти и газообразных углеводородов в результате пиролиза и крекинга. При этом суммарная объемная доля выхода углеводородов может достигать 50–60 % от объемного содержания керогена в породах [7].

Говоря о текущем распределении запасов и ресурсов углеводородного сырья, необходимо отметить, что часть УВ, содержащих преимущественно газовые и легкие компоненты, сгенерировались и фильтровались в зонах с развитой микротрещиноватостью и с повышенными фильтрационно-емкостными свойствами (ФЕС), где и сформировались зоны максимальной плотности запасов. Оставшаяся часть дегазированных тяжелых углеводородных компонентов с высоким содержанием смол и асфальтенов оказалась запечатанной в закрытых порах недренируемой части разреза. Также в закрытых порах (общая пустотность по ряду исследований может достигать 8–11 %) сформировались прочные битумоподобные пленки на границах зерен, которые позволили значительно увеличить прочить образованного межзернового каркаса данной системы, но при этом качество данных углеводородных ресурсов невысокое.

При повышенных температурах и давлении происходит преобразование твердого органического вещества (керогена) в жидкую нефть и газ. Одновременно при наличии тонкого смешения различных литотипов пород и наличии большого количества глинистых минералов сформировались условия, препятствующие дальнейшей фильтрации нефти и газа. В условиях быстрого накопления осадочного материала сформировались практически непроницаемые структуры в кровле БС, что позволило создать региональный флюидоупор. В результате возникли зоны аномально высокого пластового давления, превышающего гидростатическое в 1,5–1,8 раза.

Продолжающийся процесс катагенеза совместно с наличием непроницаемых и выдержанных покрышек привел к формированию выдержанных по площади зон аномально высокого пластового давления (АВПД), где пластовое давление достигает 45–50 МПа, а температура 140 °С.

Таким образом, сформировались не просто две различные зоны насыщения УВ по пластам БС, а две различные системы: первая сформирована легкими высокоподвижными соединениями, а вторая – более тяжелыми УВ-соединениями, находящимися преимущественно в закрытых порах. Соотношения объемов систем и разница их свойств определяют необходимость комплексного подхода к их изучению как для корректной оценки потенциала баженовской свиты, так и для проектирования эффективных систем выработки всех запасов и ресурсов.

В работе [8] предложена минимально необходимая программа исследований (при подготовке запасов и ресурсов БС) для получения исходных параметров нефтей и углеводородных компонентов из скважин БС.

Необходимость разработки нового единого подхода к исследованиям УВ обосновывается прежде всего тем, что анализы для получения исходных данных обычно проводятся с добытой нефтью, в которой содержится мало тяжелых высокомолекулярных битуминозных компонентов. Параметры полученной скважинной нефти и той смеси углеводородов, которая содержится в породе первоначально, могут заметно отличаться. Изучение физико-химических процессов, происходящих при воздействии на «остаточную нефть» и на органическое вещество в скелете пород баженовской свиты, является задачей, требующей создания специальных

методов исследования. Исследование химических реакций окисления и пиролиза необходимо проводить не на нефтях, полученных на устье скважины, а на кернах, содержащих все виды имеющихся в породе органических веществ, и, предпочтительнее, отобранных на забое герметизирующими керноотборниками [8].

Возможные модели формирования коллектора БС. При описании модели коллектора БС существуют различные подходы, которые сегодня хотя и отличаются по индивидуальным особенностям типизации залежей, составляющим литотипам пород и т. п., но в целом дополняют общую картину формирования данных залежей. Специалисты ЗАО «МиМГО» им. В. А. Двуреченского и ФГУП «ВНИГНИ», имеющие значительный опыт по изучению БС Фроловской нефтегазоносной области, выделяют в породе чередование кремнистых тонкослоистых пород, обогащенных ОВ в недренируемых интервалах (матрице породы), и интервалов, сложенных вторично преобразованными радиоляритами [9].

Выделение чередования непроницаемых пород и радиоляритов (включая вторичные известняки и доломиты, развитые по радиоляритам) имеет практическое значение, так как во вторично преобразованных радиоляритах могут формироваться коллекторы – дренируемые интервалы, что подтверждается результатами геофизических исследований при определении профиля притока в скважинах [10].

Как показали авторы, в пределах месторождения слои радиоляритов более 40 см хорошо прослеживаются в скважинах и коррелируются между собой, а центральная радиоляритовая пачка толщиной 2–8 м прослеживается на различных бортах Фроловской мегавпадины на расстоянии более 400 км [10]. Эта особенность позволяет использовать данные интервалы коллектора (вторичные радиоляриты) при создании подходов к формированию системы выработки различных зон пласта.

Проводя описание строения отложений БС академик А. Э. Конторович отмечает, что в целом БС сложена смешанными биогенными и химогенными микститами, причем содержание ни одного минерального компонента не превышает 50 % [11].

Недренируемая часть пласта – матрица или «баженит» (согласно А. Э. Конторовичу) представляет собой упруго-пластичную гетерогенную среду, в которой при термодинамических условиях зоны катагенеза в результате крекинга керогена происходит химическое превращение его значительной части в жидкие и газообразные флюиды. Каркас преобразованного баженита хрупкий и сохраняет вторично образованную пористость только если поровое пространство заполнено флюидами. При отборе флюида и снижении пластового давления часть порового пространства может разрушаться (схлопываться). Это определяет, по мнению автора, одну из главных задач для БС в данных зонах – определение флюидозамещающих составов и/или технологий для преимущественного сохранения образованной пустотности и зон фильтрации углеводородов.

Таким образом, в качестве модели продуктивного коллектора баженовской свиты можно принять систему переслаивания изначально недренируемых тонкослоистых прослоев, представленных смешанными биогенными и химогенными микститами, обогащенными ОВ, и дренируемых прослоев, сложенных вторично преобразованными радиоляритами и алевролитами. Основные (по толщинам) и выдержанные дренируемые интервалы преимущественно гидродинамически связаны между собой и формируют трещинно-поровый коллектор (с развитием зон микротрещиноватости).

Как показано выше, одной из важных задач при разработке залежей БС является выделение зон (как по площади, так и в разрезе пласта), имеющих высокие фильтрационно-емкостные свойства, расположение которых определяет дренируемые зоны с максимальной плотностью запасов.

При проектировании выработки запасов необходимо определять и использовать наличие зон разуплотнения (зон трещиноватости), сформировавшихся на текущий момент. Расположение таких зон связано с процессами формирования залежей и их последующими изменениями, как структурными, так и вторичными преобразованиями, такими, как доломитизация

и выщелачивание.

Также, по мнению ряда исследователей, формирование таких зон определяется гидро-термально-метасоматическими процессами, вызванными циркуляцией гидротерм (горячих растворов) в определенных зонах из нижележащего осадочного чехла по зонам нижележащих разломов в периоды тектонической активизации [12].

Влияние флюидодинамических процессов на формирование дезинтегрированных зон и блоковой раздробленности по части резервуара, приводящих к геомеханическим изменениям внутри БС, отмечается в ряде публикаций [13, 14].

Для корректного описания структуры запасов и их распределения по площади, а также для определения зон различной продуктивности необходимо применение мультидисциплинарного комплексного подхода, который включает в себя как применение традиционных, так и новых петрофизических и геофизических исследований, сейсмический анализ среды, включая картину изменения отраженных и рассеянных сигналов, учет деформационно-прочностных свойств, геомеханических напряжений в среде и другие параметры, определяющие характеристики микротрещиноватой среды. Такие подходы активно разрабатываются многими исследователями и, совместно с трехмерным геолого-гидродинамическим моделированием, позволяют уже сейчас получать корректное распределение свойств и характеристик среды в межскважинном пространстве БС, а также дать текущую динамическую картину, определяемую техногенным воздействием при разработке залежи [15–17].

Основные задачи при вовлечении в разработку запасов и ресурсов БС

Для месторождений, приуроченных к Фроловской мегавпадине Западно-Сибирского нефтегазоносного района, благодаря наличию обширных зон АВПД, высоких температур (до 140 °С), значительному содержанию органического вещества и возможности образования «дополнительной» синтетической нефти из керогена при нагреве породы, формируются определенные подходы, направленные на повышение эффективности выработки запасов. Описание таких подходов и технологических решений (предложений) применительно данной региональной зоны рассмотрено далее.

При разработке отложений БС возникает широкий спектр задач, связанных как с особенностями геологического строения и ультранизкими фильтрационными свойствами, значительной сложностью лито-фациальной структуры отложений, так и с необходимостью учета циклов формирования залежей углеводородов и продолжающемуся процессу катагенеза керогенсодержащих пород, приводящих к значительному росту давлений и температуры, последующей трансформации керогена и растрескиванию пород.

Каждая из рассмотренных выше зон пласта, включая дренируемые и недренируемые зоны, насыщена соответствующими УВ различного состава и характеризуется своим режимом выработки.

Исходя из рассмотренной выше структуры запасов и ресурсов УВ для различных зон пласта, задачи их выработки включают следующие основные направления:

1. Получение максимальной выработки (нефтеотдачи) подвижных углеводородов, уже сформировавшихся в дренируемых зонах БС, представленных вторично преобразованными радиоляритами и карбонатно-кремнистыми породами, имеющими преимущественно биогенное происхождение с коллектором трещинно-порового типа. Суммарная мощность данных дренируемых пород в разрезах может достигать 8–10 м, но при этом средняя суммарная мощность нефтесодержащих интервалов, имеющих пористость от 6–7 %, не превышает 4–5 м;

2. Подключение к выработке интервалов – зон закрытой пористости, преимущественно за счет тепловых и геомеханических методов воздействия, позволяющих сформировать зоны техногенной трещиноватости в результате ГРП и др. методов воздействия.

3. Ускорение преобразования керогена для получения синтетических углеводородов, происходящего в условиях неизотермического режима при тепловом, термогазовом и других

видах воздействия на пласт и позволяющего не только сгенерировать синтетические углеводороды, но и формировать зоны гидродинамической связанности с существующими дренируемыми интервалами пласта.

Одна из важных и, на наш взгляд, наиболее сложных задач при разработке рассматриваемых отложений заключается в максимальной синхронизации и оптимизации извлечения всего комплекса углеводородных соединений из дренируемых и недренируемых интервалов и зон пласта БС. Важно подобрать и реализовывать технологические решения таким образом, чтобы преимущественно отбирать УВ сырье в едином цикле (процессе) при одновременном подключении к выработке всех зон БС. Задача управления процессом состоит в том, чтобы максимально синхронизировать отборы как легкой нефти, так и нативной дегазированной нефти (имеющей более «тяжелый» и низко-подвижный состав, насыщенный тяжелыми компонентами) и новой, искусственно формирующейся, синтетической нефти из керогена.

Разработка отложений БС с отбором только легкой нефти из дренируемых интервалов на естественном режиме на сегодняшний день неоправдана. При отборе УВ только на данном режиме (режим истощения при отсутствии поддержания пластового давления) нефтеотдача может достигнуть лишь 5–7 % от геологических запасов [1].

Необходимость применения *комплексного подхода* при работе с БС заключается и в том, что ускоренный отбор только легких нефтей может привести к потере значительного ресурсного потенциала из недренируемых зон и дополнительной синтетической нефти. В этом случае можем прийти к нерентабельности вторичного применения тепловых (или других) методов воздействия на недренируемые зоны, при котором может происходить преимущественное сгорание углеводородов, вновь получаемых из недренируемых зон при их попадании в основные фильтрационные интервалы, по которым уже прошел фронт вытеснения. При закачке кислородсодержащих составов (применение которых необходимо для роста температуры) значительная часть вновь образованных углеводородов будет сгорать в потоке кислорода.

Другая причина заключается в том, что вновь сформировавшиеся углеводороды имеют значительно сниженный потенциал для своей последующей фильтрации по пласту как из-за своего низкого газосодержания, так и за счет резкого снижения естественной энергетики пласта, вызванного предыдущим этапом разработки на естественном режиме. Значительное снижение энергетики пласта (его упругого потенциала) определяется еще и сложным геологическим строением, изолированностью и невыдержанностью по площади зон преимущественной фильтрации (дренируемых зон).

В настоящий период при понимании необходимости и возможности комплексного применения тепловых, термогазовых и термохимических методов воздействия совместно с другими технологическими решениями (например, с применением горизонтальных скважин с многозонным ГРП) работать на отбор только небольших объемов подвижных запасов, возможных к добыче на естественном режиме, неэффективно, а часто и необоснованно с точки зрения выполнения лицензионных обязательств.

Важной особенностью, обосновывающей необходимость применения комплексного подхода для извлечения всех категорий УВ-ресурсов, является то, что данный подход позволяет недропользователю активно участвовать в разработке и применении новых инновационных подходов и технических средств; позволяет наращивать технологический потенциал, который может и должен выражаться в виде последующего роста стоимости акций компании за счет увеличения интеллектуальной собственности и, соответственно, нематериальных активов.

Именно такой комплексный подход наиболее обоснован и эффективен в среднесрочной и долгосрочной стратегии с учетом как интересов нефтяных компаний, так и с соблюдением необходимых государственных требований к рациональному недропользованию и достижению максимальной нефтеотдачи.

Особенности существующих технологических подходов при разработке отложений БС

Говоря о существующих подходах к разработке БС (в том числе с поддержанием пластового давления) надо заметить, что низкие фильтрационные параметры среды не позволяют проводить закачку агентов на водной основе, которые при значительных давлениях закачки приводят к формированию единичных трещин в части разреза, ускоренному прорыву воды и, как следствие, практически к прекращению извлечения углеводородного сырья. Причем с учетом того, что мы имеем преимущественно гидрофобную (часто гидрофобизированную) среду, фильтрация несмачивающей фазы будет происходить в узких интервалах, представленных в основном кремнистыми и карбонатно-кремнистыми породами с развитой микротрещиноватостью, по которым прорыв воды может проходить в короткие сроки.

Поэтому эффективная выработка запасов и ресурсов по всем трем вышеназванным направлениям, включая добычу синтетических углеводородов, возможна при реализации методов увеличения нефтеотдачи (МУН), например, таких, как тепловое воздействие, закачка термогазовых смесей с определенным водовоздушным отношением (ВВО) и ряда других.

Другое направление работ на рассматриваемых пластах – проведение многозонного ГРП в горизонтальных скважинах. Это более затратный и экстенсивный путь развития, который активно применяется в США и Канаде и определяется тем, что при интенсивном разбуривании данных зон протяженными стволами горизонтальных добывающих скважин с последующим проведением ГРП имеется возможность получить (увеличить) отбор из зон с закрытой пористостью. Но при этом не используется потенциал кероген-содержащих пород, который возможен к реализации при тепловом воздействии на пласт, и реализуется низкоэффективный режим истощения залежи.

Пример реализации второго подхода показан на рис. 2, на котором приведена схема размещения горизонтальных скважин на отложениях типа бакен (США), отражающая наличие чрезвычайно плотной сетки скважин (размещение части горизонтальных стволов между собой находится на расстоянии до 50 м) [18]. Возможность применения плотной сетки ГС имеет ограничения по экономическим критериям и может эффективно реализовываться только при наличии значительных выдержанных толщин, позволяющих получить рентабельную накопленную добычу со скважины, что и характерно для данных отложений типа бакен в США [19].

Термогазовое воздействие. Из уже эффективно применяемых сегодня МУН для отложений БС надо выделить термогазовый метод, предложенный группой российских ученых в СССР и имеющий отечественный приоритет [20]. Данный метод направлен не только на ускорение формирования синтетической нефти из керогенсодержащих пород за счет пиролиза, но также на формирование системы выработки с поддержанием пластового давления.

Опытные работы по термогазовому воздействию ведутся с 2009 г. и реализуются на Средне-Назымском месторождении компанией АО «РИТЭК», входящей в группу компаний ПАО «ЛУКОЙЛ» [1].

Особенностью ТГВ, по сравнению с обычными газовыми МУН, является тот факт, что генерация газообразного вытесняющего агента происходит непосредственно в нефтяной залежи за счет внутрипластового окисления кислородом воздуха остаточной нефти. Для легкой нефти закачку воздуха обычно организуют в случае, если извлечение нефти другими методами не обеспечивает рентабельную разработку месторождения. Это возможно для низкопроницаемых, преимущественно гидрофобных коллекторов, для которых воздух закачивается с целью повышения давления и создания фронта горения, для обогащения нефти легкими компонентами, при вытеснении в режиме частичной смесимости газообразными продуктами горения и легкокипящими фракциями нефти. При разогреве пластовых флюидов до температуры 250–300 °С легкие фракции жидких углеводородов испаряются из нефти и переходят в газовую фазу и в результате последующей конденсации под действием пластового давления образуют оторочку широкой фракции углеводородов.

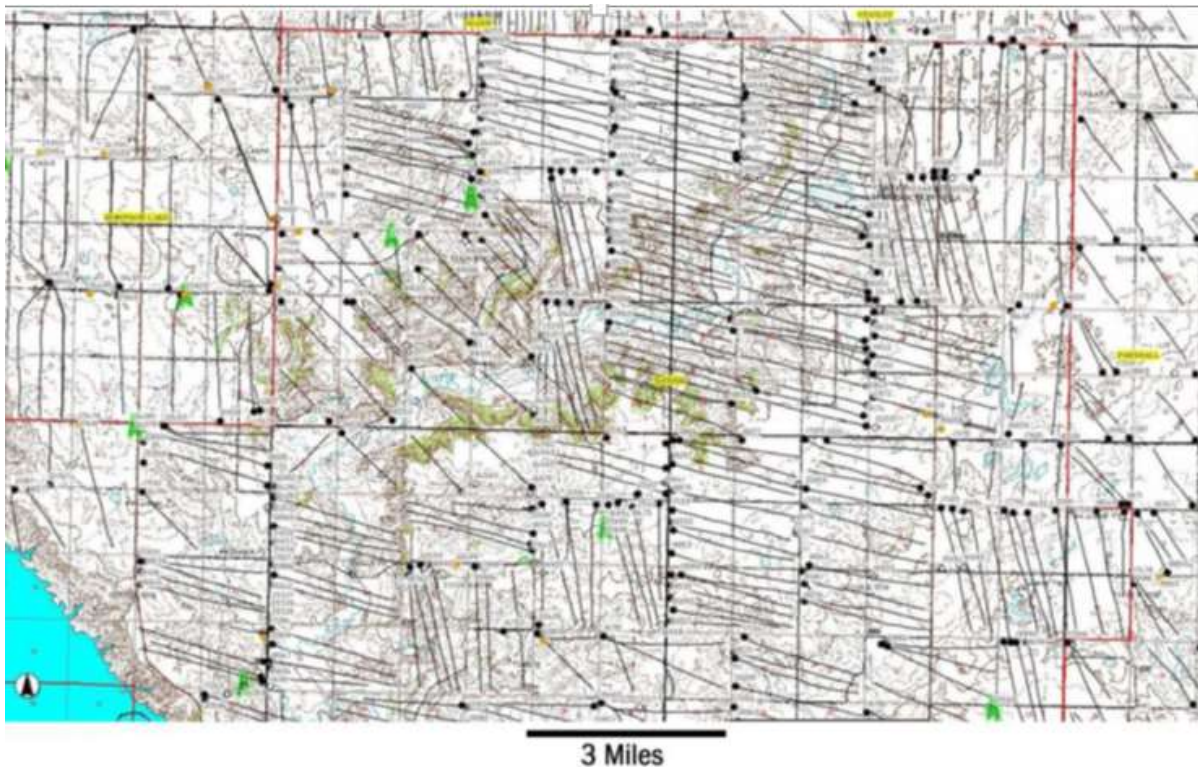


Рис. 2. Расположение горизонтальных скважин в одной из наиболее разбуренных зон («сладких» участков) Бакена (PARSHALL) [18]

Для сложнейших геологических условий БС задача формирования эффективного вытесняющего агента обоснована необходимостью работать в зонах с ультранизкими проницаемостями и в то же время требованием минимизации преждевременных прорывов агентов при попадании в зоны развитой геологической или техногенной трещиноватости. И конечно, формирование вытесняющего агента при ТГВ, прежде всего, направлено на поддержание пластового давления. Выработка по дренируемым зонам при условии формирования зоны смешимости и снижении темпов падения пластового давления может достигать 60 % и выше от геологических запасов нефти, однако существует много факторов, влияющих на эффективность вытеснения. В частности, при снижении пластового давления происходит изменение фазового состояния смеси в зоне, соответствующей фронту вытеснения. При изменении термобарических условий в пласте изменяется охват пласта воздействием, идет рост газового фактора в отбираемой продукции и могут формироваться зоны («пальцы») с увеличенной газонасыщенностью.

Устойчивость и, соответственно, эффективность условий поддержания оторочки определяется выдержанностью и гидродинамической связанностью зон, в которых она сформировалась и продвигается, а также ее размерами. Расчеты для традиционных коллекторов показывают, что устойчивость оторочки сохраняется при ее объеме, составляющем 0,2–0,3 от порового объема участка воздействия.

Для условий отложений БС требуется непрерывный контроль процесса для сохранения оптимальных условий выработки с проведением комплексного контроля за пластовыми условиями, включая пластовое давление, газовый фактор, состав попутно-добываемых газов. По результатам исследований необходимо проведение геолого-технических мероприятий и уточнение режимов работы добывающих скважин для снижения прорывов газовых агентов вплоть до их временной остановки или перевода на периодическую эксплуатацию, переход на закачку водовоздушной смеси и другие мероприятия.

В задачах контроля за проведением термогазового воздействия и других тепловых ме-

тодов важно определять не только изменение величин пластового давления, но и распределение свойств по пласту и, соответственно, основных путей фильтрации агентов по площади, направление преимущественного продвижения теплового фронта. Часть задач решается при проведении комплекса исследований по программе гидропрослушивания скважин опытных участков совместно с контролем состава и концентраций попутно-добываемых агентов, включая содержание азота и углекислого газа, фактически являющихся трассерными агентами.

Как показано в ряде работ [21, 22], данный контроль за реализацией технологии позволяет получить информацию по протеканию процессов в пласте, которая затем эффективно используется для математического моделирования процессов при адаптации модели и в прогнозных расчетах.

Таким образом, задача контроля за формированием и продвижением теплового фронта, его влияние на процесс образования синтетических УВ и их фильтрации должна решаться при комплексном анализе всех проводимых исследований с обязательным применением математического моделирования процессов при максимальном применении информации по геологическому строению и особенностям формирования залежей УВ в БС.

Синтетическая нефть формируется по мере реализации пиролиза керогена в зонах вблизи теплового фронта, скорость продвижения которого невысока. Поэтому для ускоренного переноса тепла и расширения зон протекания процесса по площади используются технологии влажного внутрипластового горения (ВВГ), когда реализуется закачка термогазовых смесей с определенным водовоздушным отношением [23]. Особенностью ВВГ является использование тепловых свойств насыщенного пара, способного аккумулировать в себе гораздо больше тепла, чем остальные газовые агенты, что позволяет ускорить процесс переноса тепла в область перед фронтом горения.

Концепция внутрипластового каталитического ретортинга

Из других предлагаемых отечественных технологий надо выделить технологию КВКР-5(6) компании ООО «Новые Технологии», представленной совместно с со-разработчиком и промышленным партнером ПАО «Газпром нефть» [3, 24].

Технология КВКР включает проведение термо-газо-химических методов и закачку различных агентов воздействия, в том числе находящихся в сверхкритическом состоянии. Технология, определяемая авторами как концепция, направлена на проведение внутрипластового каталитического ретортинга (ВКР) и создание реторты в объеме, охваченном воздействием горизонтальной или наклонно-направленной скважины. Предлагаемый авторами подход сочетает в себе ряд технических решений и применяемых агентов и, как отмечают авторы, комбинаторно сформирован из нескольких известных технологий, давно и хорошо освоенных российской промышленностью [3].

Проведение КВКР требует выполнения технических условий по сохранению агентов в сверхкритическом состоянии при попадании их в пласт. Это позволит воздействовать на пласт (создать так называемую внутрипластовую реторту) и реализовать прогрев окружающих керогенсодержащих пород до температуры формирования синтетических УВ с формированием дополнительных зон микротрещиноватости в недренируемых частях разреза.

Сегодня, на наш взгляд, существуют две основные задачи, их можно формулировать как вызовы, которые необходимо решить до начала опытно-промышленных работ по КВКР на месторождении. Первый вызов определяется техническими возможностями и необходимостью сохранения устойчивости пород в ПЗП при закачке флюидов в сверхкритическом (СК) состоянии, приводящих к формированию тепловых взрывов и, соответственно, к аномальному росту давлений и температур и с высокой вероятностью деформации пород (отдельных зон, интервалов) вблизи ствола скважин.

Наличие тепловых взрывов при экзотермических реакциях окисления органических со-

единений в СК-воде и при дальнейших реакциях кислородосодержащих составов с УВ-компонентами в пласте является одной из характеристик технологии КВКР [24]. Изменения параметров при тепловых взрывах в поверхностных условиях изучались рядом исследователей и надо заметить, что возможности управления такими развивающимися процессами в пласте пока ограничены [25].

Как показал опыт применения термогазового воздействия на низкопроницаемых коллекторах, важным требованием является необходимость переноса зоны формирования высокотемпературного фронта по возможности дальше от ствола скважины [21]. Реакции высокотемпературного крекинга и пиролиза должны формироваться уже на определенном удалении от ствола скважин для безопасного протекания процессов. Для этого, например, при проведении ТГВ возможно отодвинуть время инициализации окислительных реакций, реализовать перенос фронта вглубь пласта путем начальной закачки воды для снижения нефтенасыщенности в ПЗП, проводить закачку водовоздушной смеси или закачку определенных порций инертного газа (азота). Так как продвижение фронта при ТГВ идет от воздухомангнетательной скважины вглубь пласта за счет существующего перепада давлений между нагнетанием и зоной отбора, дальнейшая реализация процесса происходит уже в межскважинном пространстве, и таким образом реализуется задача безопасного проведения работ. Надо отметить, что и при долговременных остановках закачки воздуха (тепловых агентов) существует возможность формирования обратной тепловой волны в направлении ПЗП, и для минимизации этого также может осуществляться закачка инертного газа.

Второй вызов при применении КВКР заключается в том, что данное воздействие на пласт планируется реализовать со стороны добывающих скважин, оно не направлено на поддержание пластового давления в пласте и применимо при режиме истощения залежи с использованием только энергии пласта, хотя в целом и более эффективно, чем использование ГРП в ГС. Поэтому возможно, что при комплексировании данного метода с технологией, направленной одновременно и на поддержание пластового давления со стороны нагнетательных скважин, эффективность КВКР значительно возрастет.

Реализация данной технологии планируется в зоне действия компании ПАО «Газпром нефть» (планируется после 2022 г.), поэтому развитие технологического комплекса по закачке компонентов, включая закачку агентов находящихся в СК, вызывает значительный интерес.

Заключение. Необходимо еще раз отметить следующие основополагающие моменты, необходимые для эффективной выработки запасов и ресурсов БС. Говоря о текущем распределении запасов и ресурсов углеводородного сырья, необходимо отметить, что в отложениях БС сформировались не просто зоны с различным насыщением УВ в различных частях разреза, а две различные системы: первая – сформирована легкими, высокоподвижными соединениями, а вторая – более тяжелыми, преимущественно запечатанными в закрытых порах УВ. Соотношение объемов данных систем и разница их свойств определяет необходимость индивидуального подхода к их изучению, но затем требует комплексного подхода для их единовременной выработки.

Для проектирования эффективных систем выработки всех запасов и ресурсов необходимо проведение работ по разработке и внедрению интегрированных технологических решений, направленных на комплексный подход при разработке данных запасов.

Основные геологически выдержанные дренируемые интервалы гидродинамически связаны между собой и формируют зоны преимущественной выработки запасов. Выделение данных зон как по площади, так и в разрезе пласта, имеющих высокие фильтрационные свойства, определяет дальнейшие подходы для эффективного вовлечения в разработку всех запасов.

Для описания структуры запасов, их распределения по площади, а также для определения зон различной продуктивности необходимо применение комплексного подхода с учетом различных факторов. Подход должен включать как применение традиционных, так и новых

петрофизических и геофизических исследований, сейсмический анализ, включая оценку характера изменения отраженных и рассеянных сигналов, учет деформационно-прочностных свойств, геомеханических напряжений в среде и определение других параметров, определяющих характеристики микротрещиноватой структуры. Поэтому необходимо отметить:

1. Структуризация запасов и ресурсов УВ в различных зонах пласта, определяет задачи их дальнейшей выработки, которые включают следующие основные направления:

- получение максимальной выработки подвижных углеводородов, уже сформировавшихся в дренируемых зонах БС,
- подключение к выработке интервалов – зон закрытой пористости, преимущественно за счет тепловых и геомеханических методов воздействия, позволяющих сформировать зоны техногенной трещиноватости,
- преобразования керогена для получения синтетических углеводородов, проходящее на неизотермических режимах при тепловом, термогазовом и других видах воздействия на пласт.

2. Необходимость применения комплексного подхода при работе с БС заключается в требовании совместного отбора легких нефтей из дренируемых зон, запасов из недренируемых зон и формирования условий для генерации дополнительной синтетической нефти.

3. Для оптимизации извлечения всего комплекса углеводородных соединений из дренируемых и недренируемых интервалов и зон пласта БС важно подбирать и реализовывать технологические решения таким образом, чтобы преимущественно отбирать УВ-сырье при едином технологическом процессе.

4. Необходимость одновременной выработки запасов и ресурсов залежи требует применения различной плотности размещения скважин, различных комбинаций типов конструкций скважин. Так, более редкое размещение скважин возможно при выработке выдержанных дренируемых зон, а более плотное с применением МГРП в ГС для отбора из преимущественно недренируемых зон. Размещение скважин определяется детальным геологическим строением участков пласта, требует значительного комплекса исследований по описанию структуры запасов и их распределения по площади, выделения зон различной продуктивности и других геолого-физических особенностей.

5. Эффективная выработка запасов и ресурсов по всем трем вышеназванным направлениям, включая добычу синтетических углеводородов, возможна при реализации методов увеличения нефтеотдачи, например, таких, как: тепловое воздействие, закачка термогазовых смесей с определенными водовоздушным отношением и ряда других.

6. Для условий отложений БС требуется непрерывный контроль процесса для сохранения оптимальных условий выработки с проведением комплексного контроля за пластовыми условиями, включая пластовое давление, газовый фактор, состав попутно добываемых газов, и по результатам исследований проведение мероприятий с уточнением режимов работы добывающих скважин.

7. Применение технологии внутрипластового каталитического ретортинга КВКР-5(6) позволит значительно расширить объем воздействия на пласт, реализовать ускоренный прогрев в охваченных зонах и требует обязательного решения задачи сохранения устойчивости пород в зоне ствола скважин и в ПЗП при закачке флюидов в сверхкритическом состоянии.

8. При осуществлении теплового воздействия на пласт перенос зоны формирования высокотемпературного фронта по возможности дальше от ствола скважины необходим для безопасного проведения процесса и реализован в технологии термогазового воздействия. Продвижение фронта при ТГВ идет от воздухомангнетательной скважины вглубь пласта и реализация процесса происходит уже в межскважинном пространстве.

9. Воздействие на пласт при КВКР планируется реализовывать со стороны добывающих скважин, оно не направлено на поддержание пластового давления в пласте, поэтому реализуется режим истощения залежи. В связи с этим при комплексировании данного метода с технологией, направленной одновременно и на поддержание пластового давления со стороны мангнетательных скважин, эффективность КВКР значительно возрастет.

10. Применяемые сегодня отечественные технологические решения – термогазовое воздействие и новые разрабатываемые российские технологии (например, КВКР) позволят значительно увеличить эффективность выработки запасов баженовской свиты.

11. Решение задач по максимальному охвату недренируемых зон с высоким ресурсным потенциалом требует применения всего комплекса новых технологических подходов, направленных на увеличение охвата воздействием теплом и агентами данных зон, включая закачку водо-воздушных смесей и другие решения.

12. Эффективность реализации и успех технологий в значительной степени зависят от комплексного контроля, сопровождения и управления процессами.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-07-00504_А.

Литература

1. Алекперов В. Ю., Грайфер В. И., Николаев Н. М., Карпов В. Б., Кокорев В. И., Нургалиев Р. Г., Палий А. П., Боксерман А. А., Клинчев В. А., Фомкин А. В. Новый отечественный способ разработки месторождений баженовской свиты. Часть 1 // Нефт. хоз-во. № 12. 2013. С. 100–105.
2. Батурин Ю. Е., Сонич В. П., Малышев А. Г., Зарипов О. Г., Шеметилло В. Г. Оценка перспектив применения гидротермовоздействия в пласте Ю₀ месторождений ОАО «Сургутнефтегаз» // Интервал. № 1 (36). 2002. С. 17–36.
3. Коломийченко О. В., Чернов А. А. Технология для освоения баженовской свиты. Концепция внутрипластового каталитического ретортинга // Oil & Gas Journal Russia, Октябрь, 2015. С. 58–66.
4. Калмыков Г. А., Балушкина Н. С., Белонин В. С., Билибин С. И., Дьяконова Т. Ф., Исакова Т. Г. Пустотное пространство пород баженовской свиты и насыщающие его флюиды // Недропользование XXI век. 2015. № 1. С. 34–46.
5. Балушкина Н. С., Калмыков Г. А., Белохин В. С., Хамидуллин Р. А., Корост Д. В. Кремнистые коллекторы баженовского горизонта Средне-Назымского месторождения и структура их пустотного пространства // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 4. Геология. 2014. Т. 4. № 2. С. 35–43.
6. Баталин О. Ю., Вафина Н. Г. Формы захвата свободных углеводородов керогеном // Междунар. журн. приклад. и фундамент. исслед. 2013. № 10–3. С. 418–425.
7. Кокорев В. И. Техничко-технологические основы инновационных методов разработки месторождений с трудноизвлекаемыми и нетрадиционными запасами нефти : автореф. дис. ... д-ра тех. наук. М., 2010. 318 с.
8. Ашмян К. Д., Юдин В. А., Вольпин С. Г., Афанаскин И. В., Королев А. В., Миронов Д. Т. Проблемы и задачи изучения углеводородов баженовской свиты для применения метода термогазового воздействия // Труды НИИСИ РАН, том 6. 2016. № 1. С. 17–25.
9. Алексеев А. Д., Немова В. Д., Колосков В. Н., Гаврилов С. С. Литологические особенности строения Нижнетутлемейской подсвиты Фроловской нефтегазоносной области в связи с особенностями ее нефтеносности // Геология нефти и газа. 2009. № 2. С. 27–31.
10. Немова В. Д., Асташкин Д. А., Гаврилов С. С. Методологические особенности комплексных литолого-петрофизических исследований отложений баженовской свиты // Геология нефти и газа № 2. 2013. С. 38–45.
11. Конторович А. Э. Феномен Баженовской свиты: литология, органическая геохимия, палеогеография, пост-седиментационная эволюция, потенциал генерации аккумуляции нефти и газа // Докл. на VIII Всерос. литолог. совещании. ИНГГ, Новосибирск. 30 окт. 2015. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=nPoVWKZmeVw> (дата обращения: 06.07.2018).
12. Стрижнев К. В., Заграновская Д. Е., Жуков В. В. Выделение перспективных нефтегазоносных площадей для нетрадиционных коллекторов баженовской свиты // Недропользование XXI век. 2015. № 1. С. 46–51.

13. Петров А. И, Шеин В. С. Геодинамическая модель резервуара с кремнисто-глинистым коллектором: на примере БС Салымского нефтяного месторождения Западной Сибири) // Геология нефти и газа. 1999. № 9–10. С. 7–13.
14. Харахинов В. В., Шленкин С. И., Берин М. В., Вашкевич А. А., Олюнин А. В., Шевчук Т.Н. Новые подходы к освоению нефтегазового потенциала баженовского горизонта Западной Сибири // Геология, геофизика и разработка нефт. и газ. месторождений. 2015. № 1. С.37–51.
15. Езерский Д. М., Филимонов А. Ю., Богданович Н. Н., Борисенко С. А., Рудаковская С. Ю., Остапчук М. А. Оценка водосодержания пород баженовской свиты // Нефт. хоз-во. 2015. № 10. С. 38–44.
16. Васильев А. Л., Пичкур Е. Б., Михуткин А. А., Спасенных М. Ю., Богданович Н. Н., Балущкина Н. С., Калмыков Г. А. Исследования морфологии пустотного пространства керогена баженовской свиты // Нефт. хоз-во. 2015. № 10. С. 28–32.
17. Билибин С. И., Калмыков Г. А., Балущкина Н. С., Былевский А. Г., Юканова Е. А., Бачин С. И., Валова Л. Н. К оценке запасов и ресурсов сланцевой нефти // Недропользование XXI век. 2015. № 1. С. 34–45.
18. Hughes J. D. Drill, Baby, Drill: Can Unconventional Fuels Usher in a New Era of Energy Abundance? Post Carbon Institute, February. 2013. 166 p.
19. Montes A. R., Moore R. G., Mehta S. A., Usenbach M. G., Gutierrez D. Is high-pressure air injection (HPAI) simply a flue-gas flood? // Journal of Canadian Petroleum Technology. 2010. Vol. 49. № 2. P. 56–63.
20. Боксерман А. А., Сафиуллин Р. Х., Кузьмина М. В. Разработка нефтяных месторождений с помощью внутрипластового горения // Горное дело. Разработка нефтяных и газовых месторождений. ВИНТИ, 1969. С. 106–161.
21. Боксерман А. А., Вольпин С. Г., Миронов Д. Т. Особенности моделирования МУН для условий применения термогазового метода увеличения нефтеотдачи в различных геолого-физических условиях : Север России: стратегии и перспективы развития : материалы II Всерос. науч.-практ. конф. г. Сургут, 27 мая 2016. С. 8–19.
22. Умрихин И. Д., Боксерман А. А. Вольпин С. Г., Смирнов Ю. М., Савельев Ю. С. Контроль за внутрипластовым горением по результатам термогидродинамических исследований нагнетательных скважин // Нефт. хоз-во. 1978. № 11. С. 54–59.
23. Миронов Д. Т., Ашмян К. Д., Гореликов А. В. Учет особенностей строения пластов баженовской свиты при построении гидродинамических моделей и моделировании термогазового воздействия // Вестник кибернетики. 2018. № 2. С. 110–121.
24. Кирячек В. Г., Чернов А. А., Моисеев А. В. Технология No 5 KBKP для комплексного освоения баженовской свиты : Стратегия объединения : презентация на VIII Междунар. промышл.-эконом. форуме, 19–20 ноября 2015 г. URL: <http://docplayer.ru/36730806-Tehnologiya-5-kvkr-dlya-kompleksnogo-osvoeniya-bazhenovskoy-svity.htm> (дата обращения: 03.07.2018).
25. Востриков А. А., Псаров С. А., Дубов Д. Ю., Сокол М. Я., Федяева О. Н. Особенности взрывного окисления углеводородов в смеси H_2O/O_2 при сверхкритических условиях // Сверхкритические флюиды: теория и практика. 2008. Т. 3. № 4. С. 83–95.

УДК 004.94:004.514:550.822.3

ТЕХНОЛОГИЯ СОЗДАНИЯ МУЛЬТИЗАДАЧНОЙ ГРАФИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ СИСТЕМЫ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ЦИФРОВОЙ МОДЕЛИ КЕРНА

П. Ю. Тимохин, М. В. Михайлюк

*Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт
системных исследований Российской академии наук, webpismo@yahoo.de, mix@niisi.ras.ru*

В статье описана технология разработки мультизадачной графической оболочки системы визуализации цифровой модели ядра, основанная на создании подсистем виджетов с использованием открытой кроссплатформенной библиотеки Qt. Предложен метод разделения графического интерфейса системы визуализации между исполнительным ядром и модулями задач, а также модель подключения модулей задач к ядру. На основе предложенных технологий, методов и алгоритмов создан программный комплекс, реализующий графическую оболочку системы визуализации цифровой модели ядра. Созданный комплекс успешно апробирован при исследовании цифровых моделей ядер баженовской свиты и песчаника и показал адекватность разработанного решения поставленной задаче. Разработанное в ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН решение направлено на развитие технологии «цифрового месторождения» и может быть использовано в исследованиях специалистов нефтегазовой отрасли, виртуальных лабораториях и образовательных приложениях.

Ключевые слова: система визуализации, ядро, цифровая модель, графическая оболочка, виджет.

IMPLEMENTATION TECHNOLOGY OF MULTITASKING GRAPHICAL SHELL OF VISUALIZATION SYSTEM FOR DIGITAL MODEL OF THE CORE MATERIAL

P. Yu. Timokhin, M. V. Mikhaylyuk

*System Research Institute, Russian Academy of Sciences
webpismo@yahoo.de, mix@niisi.ras.ru*

The paper proposes a technology for implementation of a multitasking graphical shell of a visualization system for digital model of the core material, based on development of widget subsystems using the open source cross-platform Qt library. The study provides a method to split the graphical interface of the visualization system between executive kernel and task modules, as well as a model to connect task modules to the kernel. Based on the developed technology, methods and algorithms a program complex implementing the graphical shell of the visualization system for digital model of the core material is created. The created complex is successfully tested through studies of digital models of the core materials of the Bazhenov Formation and Sandstone and showed adequacy of the proposed solution to the problem. The solution, developed in the System Research Institute, Russian Academy of Sciences, is aimed at the development of the “digital oilfield” technology and can be used in researches by specialists from oil and gas industry, virtual laboratories and educational applications.

Keywords: visualization system, core material, digital model, graphical shell, widget.

Стратегически важным направлением отечественного нефтегазового инжиниринга является создание новой технологии добычи трудноизвлекаемых запасов углеводородов (целики нефти, низкопроницаемые пласты, баженовская свита), основанной на использовании постоянно обновляемой суперкомпьютерной геолого-гидродинамической модели месторождения («цифровое месторождение») [1]. Одной из важных составляющих «цифрового месторожде-

ния» является система визуализации цифровой модели ядра [2] – столбца породы, извлеченного на месте нефтяного месторождения. Она включает в себя методы построения и визуализации трехмерной модели порового пространства ядра, двухмерных срезов и кросс-сечений модели ядра, визуализации неустойчивого вытеснения нефти из пористых сред и др. [3–5]. Данные методы имеют отличные друг от друга входные параметры и форматы представления графической информации, в связи с чем возникает задача создания эргономичной графической оболочки системы визуализации цифровой модели ядра.

Эффективным подходом является создание графической оболочки, состоящей из ядра, реализующего базовые функции системы визуализации, и динамически подключаемых к ядру программных модулей, расширяющих его функциональность (плагинов) [6]. В настоящее время существует ряд распространенных парадигм построения графических интерфейсов программных систем (Model-View-Controller, Hierarchical MVC, Presentation-Abstraction-Control) [7], однако разработка технологий практической реализации таких парадигм, в частности, для систем типа «ядро – плагин» является актуальным предметом для исследований. В системе ParaView [8] визуализации научных данных ядро графической оболочки содержит элементы управления для множества универсальных методов анализа и визуализации, из которых исследователь выбирает необходимые для решения конкретной прикладной задачи. Эта система является открытой и имеет возможность добавления плагинов, реализующих дополнительные методы обработки данных и элементы управления. Система Amira-Avizo [9] визуализации и анализа научных и промышленных данных является мультизадачной, и расширение ее базовых функций осуществляется с помощью модулей, решающих определенные задачи, например, модуль XMolecular визуализации молекулярных структур. Данная система является коммерческой, и ее реализация закрыта.

В работе предложена технология создания мультизадачной графической оболочки, в которой подключаемые к ядру модули решают определенные задачи по визуализации цифровой модели ядра в рамках единой системы визуализации. Предлагаемая технология является кроссплатформенной и основана на использовании современного открытого комплекса Qt средств разработки графических интерфейсов [10].

Создание графической оболочки системы визуализации

В предлагаемой технологии система визуализации цифровой модели ядра имеет модульную структуру и включает в себя исполняемое *ядро* и ряд динамически связываемых с ним библиотечных *модулей задач* (рис. 1). В ядре содержится главное окно и некоторый базовый функционал системы визуализации, а в каждом модуле задачи – программная реализация отдельного метода визуализации цифровой модели ядра, включающего блок графических расчетов и набор необходимых *элементов графического интерфейса* (ЭГИ). Совокупность наборов ЭГИ и главного окна образуют графическую оболочку системы визуализации (на рис. 1 выделена серым цветом).

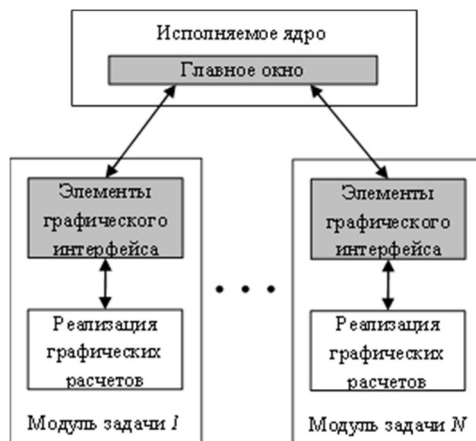


Рис. 1. Графическая оболочка в системе визуализации

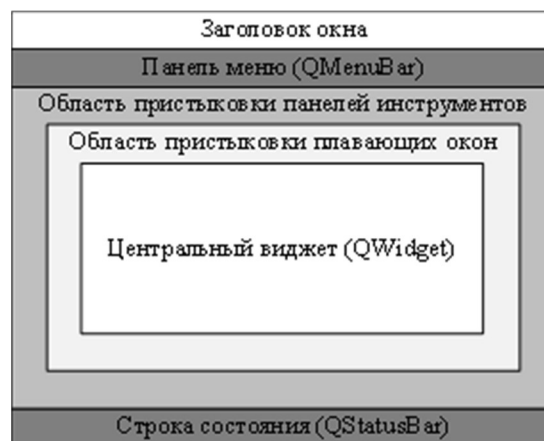
Суть предлагаемой технологии состоит в том, что графическая оболочка динамически трансформируется под выбор исследователя: набор ЭГИ метода визуализации встраивается в главное окно (становится видимым), если этот метод выбран исследователем в меню главного окна, а в остальных случаях набор ЭГИ является исключенным из главного окна и скрыт от исследователя.

Создание такой графической оболочки выполняется на основе виджетов библиотеки Qt. Виджет – это самодостаточный визуальный элемент интерфейса пользователя, способный посылать *сигналы*, содержащие информацию о событии (например, о выборе пункта меню, изменении значения текстового поля и т. п.), и формировать ответную реакцию на сигналы от других виджетов с помощью специальных функций – *слотов* [10]. Предлагаемая технология создания графической оболочки основана на построении подсистем виджетов (виджетов, взаимосвязанных сигналами и слотами) и включает в себя:

- создание подсистемы виджетов главного окна;
- создание подсистемы виджетов модуля задачи;
- подключение модулей задач к исполняемому ядру.

Рассмотрим эти составляющие:

1. Подсистема виджетов главного окна графической оболочки создается на основе виджета QMainWindow. Он включает в себя ряд виджетов с фиксированным расположением (рис. 2): контейнер панели меню (QMenuBar); центральный виджет (QWidget); строку состояния (QStatusBar), а также области пристыковки свободно перемещаемых виджетов типа «панель инструментов» и «плавающее окно». При переносе свободно перемещаемого виджета в область пристыковки происходит его автоматическое встраивание между ближайшей стороной главного окна и центральным виджетом.

**Рис. 2. Структура главного окна графической оболочки**

Подсистема виджетов главного окна создается в два этапа. На первом этапе создается ее макет с помощью визуального редактора Qt Designer, входящего в пакет установки библиотеки Qt. В макете в меню главного окна добавляется раздел «Задача», предназначенный для вызова методов визуализации цифровой модели керна, и раздел со справкой по системе визуализации. Созданный макет сохраняется в XML-формате и добавляется в файл исполняемого ядра системы визуализации. На втором этапе в исполняемом ядре с помощью функции *setupUi* библиотеки Qt [10] из сохраненного XML-макета создается непосредственно сама подсистема виджетов главного окна.

2. Подсистема виджетов модуля задачи. Создание подсистемы виджетов модуля задачи включает в себя:

1) создание внешних виджетов – крупных виджетов-контейнеров, которые будут подключаться непосредственно к главному окну графической оболочки. В данной работе используются следующие основные внешние виджеты: контейнер панели меню (QMenuBar); контейнеры панелей инструментов (QToolBar); окно визуализации (QOpenGLWidget); контейнеры плавающих окон (QDockWidget);

2) создание внутренних виджетов – виджетов, расположенных внутри внешних виджетов, с помощью которых исследователь непосредственно взаимодействует с методом визуализации, например, полей ввода целых и действительных чисел (QSpinBox и QDoubleSpinBox), пунктов меню (QAction), графиков (QChartView) и др.;

3) связывание внутренних виджетов, на которые воздействует пользователь (пункты меню, кнопки панелей инструментов и т. д.), с блоком графических расчетов модуля задачи (см. рис. 1).

Подсистема виджетов модуля задачи так же, как и подсистема виджетов главного окна (см. п. 1), создается в два этапа.

На первом этапе создается макет подсистемы виджетов с помощью Qt Designer. Основой макета является базовый виджет QMainWindow, на котором размещаются простые внешние виджеты (контейнеры панели меню, панелей инструментов, плавающих окон). Созданный макет добавляется в файл модуля задачи.

На втором этапе в модуле задачи на основе макета создаются внешние и внутренние виджеты, а также выполняется связывание внутренних виджетов с блоком графических расчетов модуля задачи. Внешние виджеты, входящие непосредственно в макет, создаются с помощью функции *setupUi*, а остальные виджеты создаются и размещаются с помощью базовых классов Qt (более подробно они описаны в [10]). Связывание внутренних виджетов с блоком графических расчетов осуществляется с помощью упомянутого выше механизма сигналов и слотов и включает в себя:

- выбор стандартного сигнала внутреннего виджета, описывающего осуществляемое пользователем воздействие. Примером является сигнал *triggered* виджета QAction, который возникает, когда пользователь нажимает пункт меню, кнопку панели инструментов или комбинацию горячих клавиш;

- создание слота, реализующего ответную реакцию модуля задачи на выбранный сигнал внутреннего виджета, например, чтение значений параметров из панели инструментов и передача их в функцию визуализации. Слот создается в основном виджете QMainWindow модуля задачи с помощью квалификатора «*slots:*»;

- связывание выбранного сигнала и созданной функции-слота с помощью Qt-функции *connect* ($W_{SRC}, signalFunc, W_{DST}, slotFunc$), где W_{SRC} – виджет-источник сигнала *signalFunc*, а W_{DST} – виджет-приемник с функцией-слотом *slotFunc*.

Отметим, что для реализации нестандартного поведения виджета (например, цветовой индикации введенных значений параметров, выходящих за границы допустимого диапазона) создается производный класс от базового класса виджета, в который добавляются собственные сигналы с помощью квалификатора «*signals:*», а генерация этих сигналов осуществляется с помощью квалификатора «*emit*» [10].

3. Подключение модулей задач к исполняемому ядру. В предлагаемой технологии подключение модулей задач к исполняемому ядру осуществляется динамически на стадии загрузки системы визуализации. Предлагаемая модель подключения модулей задач основана на отложенной загрузке динамических библиотек и включает в себя следующие этапы:

1) создание в каждом модуле задачи набора F интерфейсных функций:

- *create()* – создает подсистему виджетов и блок графических расчетов;
- *destroy()* – удаляет подсистему виджетов и блок графических расчетов;
- *getTaskName()* – возвращает короткое название метода визуализации;
- *runGui()* – встраивает подсистему виджетов в главное окно исполняемого ядра;
- *closeGui()* – исключает подсистему виджетов из главного окна исполняемого ядра;

2) создание в главном окне исполняемого ядра следующих функций-слотов:

- *runTask()* – запускает метод визуализации (модуль задачи), выбранный пользователем;
- *closeCurrentTask()* – закрывает текущий метод визуализации (модуль задачи);

3) формирование меню доступных методов визуализации в главном окне графической оболочки.

Рассмотрим эти этапы.

Создание набора *F* интерфейсных функций. Из данного этапа рассмотрим более подробно работу функций *runGui()* и *closeGui()* на примере модуля задачи, содержащего внешние виджеты, описанные в п. 2.

Функция *runGui()* включает в себя выполнение следующих шагов:

1. Вставка разделов меню модуля задачи (вместе с пунктами) в панель меню главного окна (после раздела «Задача») с помощью функции *insertMenu* виджета *QMenuBar*.

2. Добавление панелей инструментов модуля задачи в главное окно с помощью функции *addToolBar* виджета *QMainWindow*.

3. Добавление плавающих окон модуля задач в главное окно с помощью функции *addDockWidget* виджета *QMainWindow*.

4. Добавление окна визуализации модуля задачи в главное окно. Для этого вначале создается компоновочный слой и к нему прикрепляется окно визуализации модуля задачи с помощью функции *addWidget* виджета *QBoxLayout*. Полученный слой прикрепляется к центральному виджету главного окна с помощью функции *setLayout* виджета *QWidget*. Использование промежуточного слоя позволяет избежать относительно медленного пересоздания окон визуализации при переключении между различными методами визуализации в графической оболочке.

Задача функции *closeGui()* состоит в приведении вида главного окна к состоянию до подключения модуля задачи. Это реализуют следующие шаги:

1. Отсоединение окна визуализации модуля задачи от компоновочного слоя с помощью функции *removeWidget* виджета *QBoxLayout* (сам слой удаляется автоматически).

2. Отсоединение плавающих окон модуля задачи от главного окна с помощью функции *removeDockWidget* виджета *QMainWindow*.

3. Отсоединение панелей инструментов модуля задачи от главного окна с помощью функции *removeToolBar* виджета *QMainWindow*.

4. Извлечение разделов меню модуля задачи из меню главного окна с помощью функции *removeAction* виджета *QMenuBar*.

Создание функций-слотов в исполняемом ядре. Функции-слоты *runTask()* и *closeCurrentTask()* выполняют вызовы функций *runGui()* и *closeGui()* модуля задачи, выбранного исследователем в разделе «Задача» меню главного окна. Пункт меню (модуль задачи), который выбрал пользователь, определяется с помощью функции *sender* базового объекта *QObject* библиотеки Qt.

Формирование меню доступных методов визуализации реализуется на стадии загрузки системы визуализации и выполняется за два шага.

На первом шаге создается список *taskList* имен модулей задач, доступных системе визуализации. Такими являются динамические библиотеки с именами формата «*xModule*» (*x* – акроним метода визуализации), помещенные в специальную директорию «*Tasks*» на стадии установки системы визуализации на компьютер исследователя.

На втором шаге для каждого модуля задачи из списка *taskList* выполняется следующий алгоритм подключения модуля задачи:

1. Загрузка модуля задачи в адресное пространство процесса системы визуализации с помощью функции *load()* класса *QLibrary*.

2. Получение адреса интерфейсных функций модуля задачи с помощью функции *resolve(funcName)* класса *QLibrary*, где *funcName* – имя функции из набора *F*.

3. Создание подсистемы виджетов и блока графических расчетов модуля задачи с помощью функции *create()* из набора *F*.

4. Получение из модуля задачи короткого имени «*shortName*» метода визуализации с помощью функции *getTaskName()* из набора *F*.

5. Добавление в раздел меню «Задача» главного окна пункта «*shortName*» с помощью функции *addAction()* библиотеки Qt.

6. Связывание сигнала *triggered* добавленного пункта меню со слотом *runTask()* модуля задачи с помощью функции *connect* (см. п. 2). При этом виджетом-источником является пункт меню (QAction), а виджетом-приемником – основной виджет QMainWindow главного окна.

Отметим, что при выходе из системы визуализации для каждого модуля задачи из списка *taskList* выполняется освобождение памяти, выделенной для подсистемы виджетов и блока графических расчетов, с помощью функции *destroy()* из набора *F*.

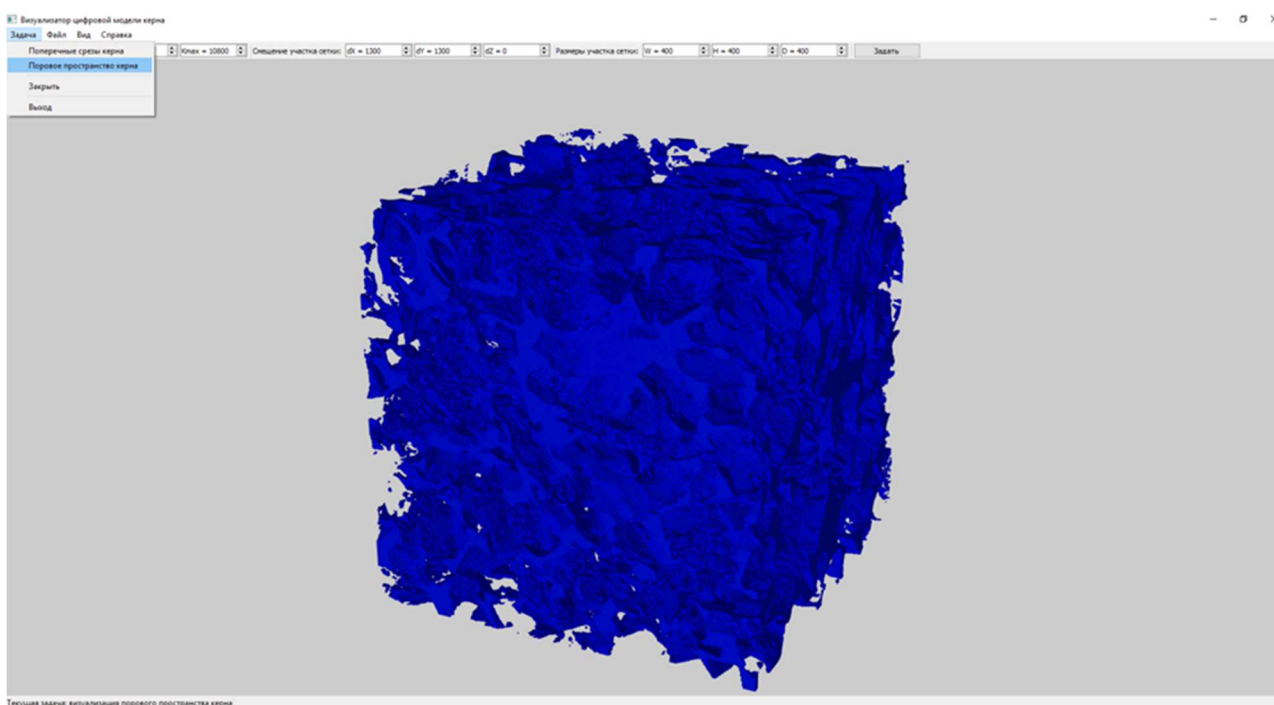
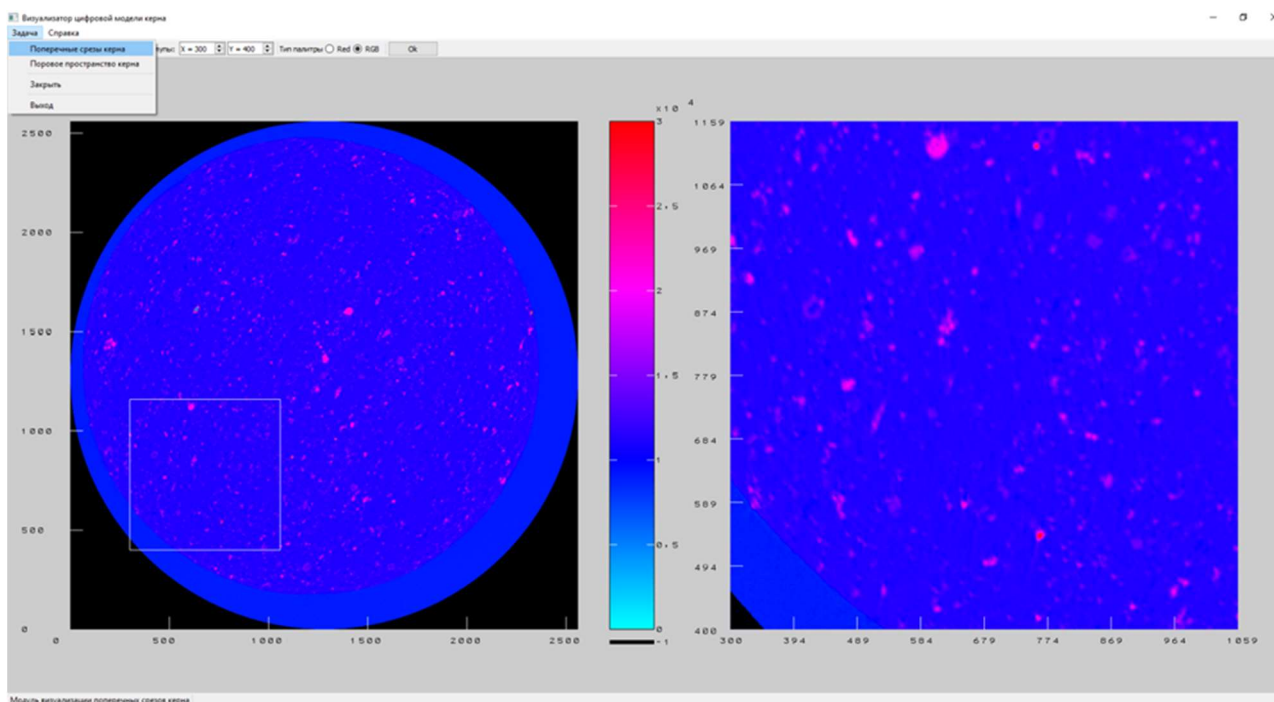


Рис. 3. Вид графической оболочки при выбранных методах визуализации поперечных сечений керна (сверху) и порового пространства керна (внизу)

На основе предложенных технологии, методов и алгоритмов в ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН был разработан программный комплекс, реализующий мультизадачную графическую оболочку системы визуализации цифровой модели керна. Были созданы подсистемы виджетов исполнительного ядра и модулей задач визуализации поперечных сечений, кросс-сечений и порового пространства модели керна. Данные модули задач были подключены к исполняемому ядру системы визуализации цифровой модели керна. С помощью разработанного программного комплекса было проведено исследование сечений и порового пространства цифровых моделей образцов кернов баженовской свиты и песчаника, полученных с помощью рентгеновской компьютерной томографии. Исследованные образцы имели размеры $2\,560 \times 2\,560 \times 8\,600$ вокселей (размер вокселя 0,0015276 мм) и $2\,600 \times 2\,600 \times 7\,360$ вокселей (размер вокселя 0,0029896 мм) соответственно. На рис. 3 показан внешний вид разработанной графической оболочки при выборе исследователем различных методов визуализации.

Заключение. В работе предложена технология создания мультизадачной графической оболочки системы визуализации цифровой модели керна, основанная на создании подсистем виджетов с использованием открытой кроссплатформенной библиотеки Qt. Технология позволяет эффективно объединять в единой системе различные задачи визуализации цифровой модели керна, имеющие отличные друг от друга входные параметры и выходные форматы представления графической информации. Кроме того, предложен метод разделения графического интерфейса системы визуализации между исполнительным ядром и модулями задач, а также модель подключения модулей задач к ядру, которые позволяют добавлять новые методы исследования модели керна в систему визуализации без изменения программного кода ее ядра, а также эффективно изменять набор существующих методов. На основе предложенных технологии, методов и алгоритмов была создана альфа-версия программного комплекса, реализующего графическую оболочку в системе визуализации цифровой модели керна. Созданный комплекс был успешно апробирован при проведении исследований цифровых моделей кернов баженовской свиты и песчаника и показал адекватность разработанного решения поставленной задаче.

Предложенное решение позволяет создавать эффективные программные пакеты, ориентированные как на определенный круг задач по исследованию цифровой модели керна, так и на проведение всестороннего исследования цифровой модели керна с компьютерным моделированием нефтегазовых процессов. Полученные результаты направлены на развитие технологии «цифрового месторождения» и могут быть использованы в исследованиях специалистов нефтегазовой отрасли, виртуальных лабораториях и образовательных приложениях.

Работа выполнена в рамках государственного задания по проведению фундаментальных научных исследований (ГП 14) по теме (проекту) «34.9. Системы виртуального окружения: технологии, методы и алгоритмы математического моделирования и визуализации» (0065-2018-0020).

Литература

1. Бетелин В. Б. Цифровое месторождение – путь к трудноизвлекаемым запасам углеводородов // Инновации. 2014. № 1. С. 37–38.
2. Бетелин В. Б., Никитин В. Ф., Смирнов Н. Н., Михальченко Е. В., Скрылева Е. И., Стамов Л. И., Тюренкова В. В. Компьютерный керноsimулятор: подходы и методы // Вестник кибернетики. 2015. № 4. С. 33–44.
3. Михайлюк М. В., Тимохин П. Ю., Мальцев А. В., Никитин В. Ф., Скрылева Е. И., Тюренкова В. В. Моделирование и визуализация процесса вытеснения нефти из пористой

среды // Вестник кибернетики. 2016. № 3. С. 35–41.

4. Михайлюк М. В., Мальцев А. В., Торгашев М. А. Моделирование и визуализация порового пространства ядра // Тр. НИИСИ РАН. 2017. Т. 7. № 4. С. 78–82.

5. Михайлюк М. В., Кононов Д. А., Логинов Д. М. Визуализация порового пространства в цифровой модели ядра // ИТ-Стандарт : электрон. науч. журн. 2017. № 3. С. 7–10. URL: <http://journal.tc22.ru/> (дата обращения: 02.07.2018).

6. Pandolfi R. J., Allan D. B., Arenholz E. et. al. Xi-cam: a versatile interface for data visualization and analysis // Journal of Synchrotron Radiation. 2018. V. 25. № 4. P. 1–10.

7. Karagkasidis A. Developing GUI Applications: Architectural Patterns Revisited / EuroPLoP-2008 : 13th Annual European Conference on Pattern Languages of Programming. Irsee, Germany. July 9–13, 2008. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-610/paper11.pdf> (дата обращения: 02.07.2018).

8. ParaView. URL: <https://www.paraview.org/Wiki/ParaView> (дата обращения: 02.07.2018).

9. Amira-Avizo Software. URL: <https://www.fei.com/software/avizo/> (дата обращения: 02.07.2018).

10. Qt Documentation. URL: <http://doc.qt.io/> (дата обращения: 02.07.2018).

Сетевое издание. Полные тексты статей размещаются на официальном сайте издания surgu.ru и в базе данных Научной электронной библиотеки на сайте elibrary.ru, сведения о публикуемых материалах включаются в Российский индекс научного цитирования (РИНЦ).

Адрес учредителя и издателя:
бюджетное учреждение высшего образования Ханты-Мансийского автономного округа – Югры
«Сургутский государственный университет»,
628412, Ханты-Мансийский автономный округ – Югра, Сургут, пр. Ленина, 1. Тел. (3462) 76-30-67.

Дата выхода в свет 28.12.2018.
Формат 60 × 84/8.
Уч.-изд. л. 25.1.
Цена свободная.